

УДК 539.3:534.1

© 2004 г. Л.П. ЖЕЛЕЗНОВ, В.В. КАБАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Интегрированием уравнений, полученных приравнением нулю компонентов линейных деформаций, получены явные выражения для перемещений элементов некруговых цилиндрических оболочек как твердых тел. Полученные выражения использованы при построении функций формы эффективного четырехугольного конечного элемента. На основе этого элемента разработан алгоритм исследования нелинейного деформирования и устойчивости оболочек. Исследована устойчивость цилиндрической оболочки с эллиптическим контуром поперечного сечения. Выяснено влияние эллиптичности и нелинейности деформирования оболочки в докритической стадии.

1. Перемещения конечных элементов некруговых цилиндрических оболочек как твердых тел. При перемещениях элементов как твердых тел компоненты деформаций равны нулю. Приравнявая нулю линейные компоненты деформаций, изменений кривизны и кручения [1], получаем уравнения:

$$\varepsilon_1 = u_x = 0 \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_2 = k_2(v_\beta + w) = 0 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_3 = v_x + k_2 u_\beta = 0 \quad (1.3)$$

$$\chi_1 = w_{xx} = 0 \quad (1.4)$$

$$\chi_2 = k_2[k_2(v - w_\beta)]_\beta = 0 \quad (1.5)$$

$$\chi_2 = [k_2(v - w_\beta)]_x = 0 \quad (1.6)$$

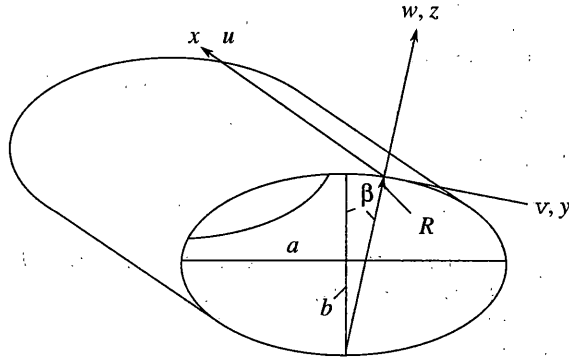
Здесь u , v , w – тангенциальные перемещения и прогиб, R , $k_2 = R^{-1}$ – радиус и кривизна поперечного сечения, β – угол нормали к поперечному сечению с осью b поперечного сечения, x – продольная координата (фиг. 1). В индексах x , β означают дифференцирование по x , β .

Проинтегрируем уравнения (1.1)–(1.6). Из уравнения (1.5) имеем

$$v = w_\beta + RC_5, \quad C_5 = \text{const} \quad (1.7)$$

Из (1.2) следует

$$w = -v_\beta \quad (1.8)$$



Фиг. 1

С учетом этого равенства из (1.7) получаем уравнение

$$v_{\beta\beta} + v = RC_5 \quad (1.9)$$

Его решение

$$v = C_3c + C_4s + v_n, \quad c = \cos\beta, \quad s = \sin\beta \quad (1.10)$$

где частное решение v_n неоднородного уравнения находится методом вариации произвольных постоянных C_3, C_4 . Пусть

$$v_n = C_3c + C_4s \quad (1.11)$$

где C_3, C_4 функции от x и β .

Находим

$$v_{n\beta\beta} = C_{3\beta}c - C_3s + C_{4\beta}s + C_4c$$

Положим

$$C_{3\beta}c + C_{4\beta}s = 0 \quad (1.12)$$

Тогда

$$v_{n\beta\beta} = -C_{3\beta}s - C_3c + C_{4\beta}c - C_4s$$

Уравнение (1.9) при этом будет таким

$$C_{3\beta}s - C_{4\beta}c = -RC_5 \quad (1.13)$$

Решая систему (1.12), (1.13) и интегрируя, получаем

$$C_3 = C_5\Psi_1 + C_7(x), \quad C_4 = -C_5\Psi_2 + C_8(x), \quad \Psi_1 = \int Rsd\beta, \quad \Psi_2 = -\int Rcd\beta \quad (1.14)$$

После этого из (1.10), (1.8) с учетом (1.11) находим

$$\begin{aligned} v &= C_3c + C_4s - C_5(\Psi_1c + \Psi_2s) + C_7c + C_8s \\ w &= C_3s - C_4c - C_5(\Psi_1s - \Psi_2c) + C_7s - C_8c \end{aligned} \quad (1.15)$$

Удовлетворим уравнение (1.4), положив

$$C_7 = C_2x, \quad C_8 = -C_1x$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} v &= C_3c + C_4s - C_5(\Psi_1c + \Psi_2s) + (C_2c - C_1s)x \\ w &= C_3s - C_4c - C_5(\Psi_1s - \Psi_2c) + (C_2s + C_1c)x \end{aligned} \quad (1.16)$$

Из уравнения (1.3) находим

$$u = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2 + C_6 \quad (1.17)$$

Функции (1.16), (1.17) удовлетворяют уравнениям (1.1)–(1.6) и, следовательно, являются перемещениями элементов как твердых тел.

Частные случаи оболочек:
эллиптическая оболочка

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad R = \frac{a^2b^2}{d^3}, \quad d^2 = a^2s^2 + b^2c^2, \quad \Psi_1 = -\frac{b^2c}{d}, \quad \Psi_2 = -\frac{a^2s}{d}$$

параболическая оболочка

$$z^2 = 2py, \quad R = \frac{p}{c^3}, \quad \Psi_1 = \frac{p}{c^2}, \quad \Psi_2 = ps$$

гиперболическая оболочка

$$\frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad R = \frac{a^2b^2}{d^3}, \quad d^2 = a^2s^2 - b^2c^2, \quad \Psi_1 = \frac{b^2c}{d}, \quad \Psi_2 = -\frac{a^2s}{d}$$

круговая оболочка

$$z^2 + y^2 = R^2, \quad \Psi_1 = -Rc, \quad \Psi_2 = -Rs$$

2. Конечный элемент и алгоритм решения задачи. Разобьем оболочку линиями главных кривизн по образующей на m , а по направляющей на n частей. Таким образом, оболочку представим набором $m \times n$ криволинейных прямоугольных конечных элементов (фиг. 1). Используя билинейную аппроксимацию деформационных тангенциальных перемещений и бикубическую аппроксимацию для прогиба, с учетом (1.16), (1.17) запишем выражения для полных перемещений точек конечного элемента:

$$\begin{aligned} u &= a_1xy + a_2x + a_3y + a_4 + a_6\Psi_2 + a_{20}\Psi_1 \\ v &= a_5xy + a_6xc + a_7y + a_8(\Psi_1c + \Psi_2s) - a_{20}xs + a_{23}c - a_{24}s \\ w &= a_9x^3y^3 + a_{10}x^3y^2 + a_{11}x^3y + a_{12}x^3 + a_{13}x^3y^3 + a_{14}x^2y^2 + a_{15}x^2y + \\ &+ a_{16}x^2 + a_{17}xy^3 + a_{18}xy^2 + a_{19}xy + a_{20}xc + a_{21}y^3 + a_{22}y^2 + a_{23}s + \\ &+ a_{24}c + a_6xs + a_8(\Psi_1s - \Psi_2c) \end{aligned} \quad (2.1)$$

В матричной форме (2.1) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{P}\mathbf{a} \quad (2.2)$$

где $\tilde{\mathbf{u}} = \{u, v, w\}^T$ – вектор перемещений точек срединной поверхности конечного элемента; $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_{24}\}^T$ – вектор неизвестных коэффициентов полиномов a_i ; \mathbf{P} – матрица связи порядка (3×24) , элементами которой являются множители при коэффициен-

тах a_i в функциях (2.1). Выражая коэффициенты a_i через узловые неизвестные, получаем

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{u}} \quad (2.3)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \{u_i, v_i, w_i, \vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}, w_{xyi}, u_j, v_j, w_j, \vartheta_{1j}, \vartheta_{2j}, w_{xyj}, u_k, \dots, w_{xyk}, u_n, \dots, w_{xyn}\}^T$$

где $\bar{\mathbf{u}}$ – вектор узловых перемещений, углов поворотов и смешанных производных прогиба; \mathbf{B} – матрица порядка (24×24) , ненулевые элементы которой имеют вид:

$$\begin{aligned} b_{1,j} &= p_{1,j}, & b_{2,j} &= p_{2,j}, & b_{3,j} &= p_{3,j}, & b_{4,j} &= (p_{3,j})_x, & b_{5,j} &= \frac{1}{R}(p_{2,j} - (p_{3,j})_y) \\ b_{6,j} &= (p_{3,j})_{xy}, & x &= -a_1, & y &= -b_1 \\ b_{7,j} &= p_{1,j}, & b_{8,j} &= p_{2,j}, & b_{9,j} &= p_{3,j}, & b_{10,j} &= (p_{3,j})_x, & b_{11,j} &= \frac{1}{R}(p_{2,j} - (p_{3,j})_y) \\ b_{12,j} &= (p_{3,j})_{x\beta}, & x &= -a_1, & y &= b_1 \\ b_{13,j} &= p_{1,j}, & b_{14,j} &= p_{2,j}, & b_{15,j} &= p_{3,j}, & b_{16,j} &= (p_{3,j})_x, & b_{17,j} &= \frac{1}{R}(p_{2,j} - (p_{3,j})_y) \\ b_{18,j} &= (p_{3,j})_{xy}, & x &= a_1, & y &= -b_1 \\ b_{19,j} &= p_{1,j}, & b_{20,j} &= p_{2,j}, & b_{21,j} &= p_{3,j}, & b_{22,j} &= (p_{3,j})_x, & b_{23,j} &= \frac{1}{R}(p_{2,j} - (p_{3,j})_y) \\ b_{24,j} &= (p_{3,j})_{xy}, & x &= a_1, & y &= b_1 \quad (j = 1, \dots, 24), & a_1 &= \frac{L}{2m}, & b_1 &= \frac{l}{2n} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где L, l – размеры образующей и направляющей оболочки.

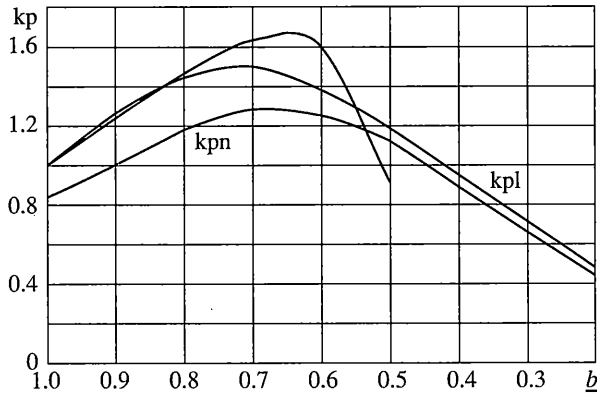
Подставляя (2.3) в (2.2), получаем зависимость перемещений точек элемента от узловых неизвестных

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{P}\mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{u}} \quad (2.5)$$

В каждом узле имеется шесть неизвестных, так что конечный элемент имеет 24 степени свободы. Узловые неизвестные определяем, используя вариационное уравнение Лагранжа $\delta\Pi = 0$, где Π полная потенциальная энергия оболочки. При записи выражения потенциальной энергии используем нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями [1]. Уравнение $\delta\Pi = 0$ приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных. Эту систему решаем шаговым методом по нагрузке с использованием на каждом шаге метода линеаризации Ньютона – Канторовича, уравнение которого для конечного элемента можно записать [2] в виде

$$\mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}}^n)\delta\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{q}_e - \mathbf{G}(\bar{\mathbf{u}}^n), \quad \bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^n + \delta\bar{\mathbf{u}} \quad (2.6)$$

где \mathbf{H} – матрица Гессе конечного элемента, которая определяется из второй вариации потенциальной энергии деформации, \mathbf{q}_e – вектор узловой нагрузки, \mathbf{G} – градиент потенциальной энергии. Уравнения типа (2.6) для всей оболочки строятся [3] обычным образом с учетом граничных условий. При этом используется разложение $\mathbf{H} = \mathbf{L}^T\mathbf{D}\mathbf{L}$ матрицы Гессе на диагональную и две треугольные матрицы. Решение системы ли-



Фиг. 2

нейных алгебраических уравнений (2.6) отыскиваем методом Краута. По найденным узловым перемещениям, по известным формулам, определяются напряжения и деформации. Контроль устойчивости осуществляется проверкой на положительную определенность матрицы Гессе, что сводится к проверке положительности элементов диагональной матрицы \mathbf{D} . Появление отрицательных элементов соответствует потере устойчивости оболочки. Изложенный алгоритм реализован программой для персонального компьютера.

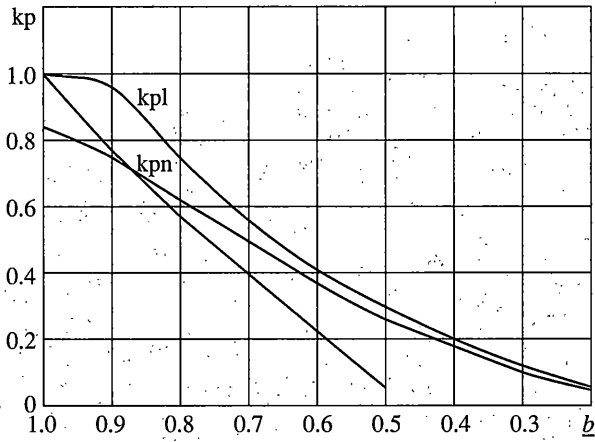
3. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости эллиптической оболочки. Рассмотрим задачу нелинейного деформирования и устойчивости эллиптической свободно опертой цилиндрической оболочки под действием изгибающего момента M . Оболочка имеет длину $L = 2800$ мм, толщину $h = 3.3$ мм, $R_0 = 1000$ мм – радиус окружности с периметром, равным периметру эллипса. Оболочка выполнена из материала с модулем упругости $E = 7 \cdot 10^4$ Мпа, $\nu = 0.3$.

Результаты исследования сходимости решения для этой оболочки при значениях параметра $\underline{b} = b/a = 1.0$ представлены ниже

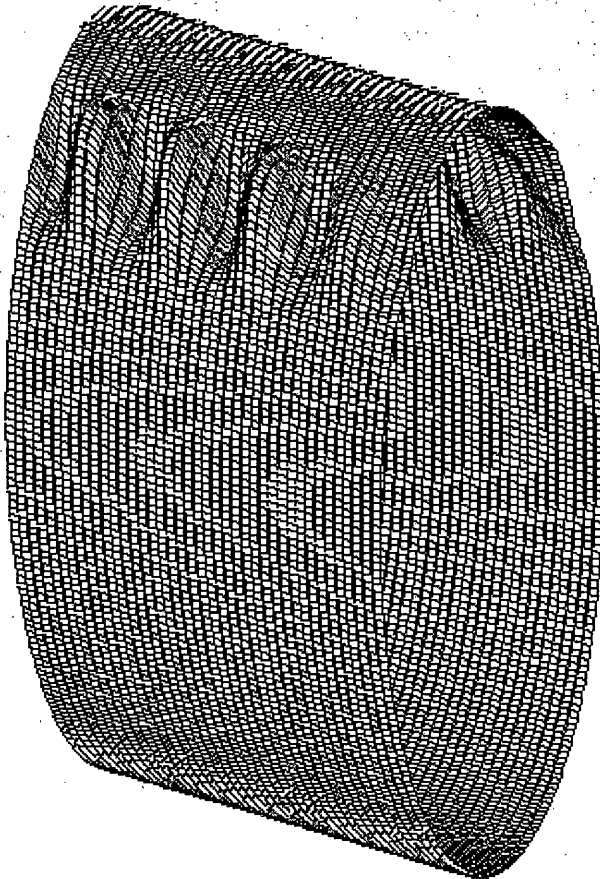
Сетка	10 × 10	20 × 20	30 × 30	40 × 40
k_{pl}	0.66	0.66	0.75	0.92
Сетка	20 × 40	20 × 60	30 × 80	–
k_{pl}	0.86	0.98	1.04	–
Сетка	30 × 40	30 × 50	30 × 60	30 × 80
k_{pl}	0.87	0.92	0.97	1.0

Как видно из таблицы, для обеспечения точности решения порядка 95% требуется проводить исследования на сетке конечных элементов 30 × 60 (30 конечных элементов по длине оболочки и 60 по окружности). Все результаты получены на сетке конечных элементов 30 × 80.

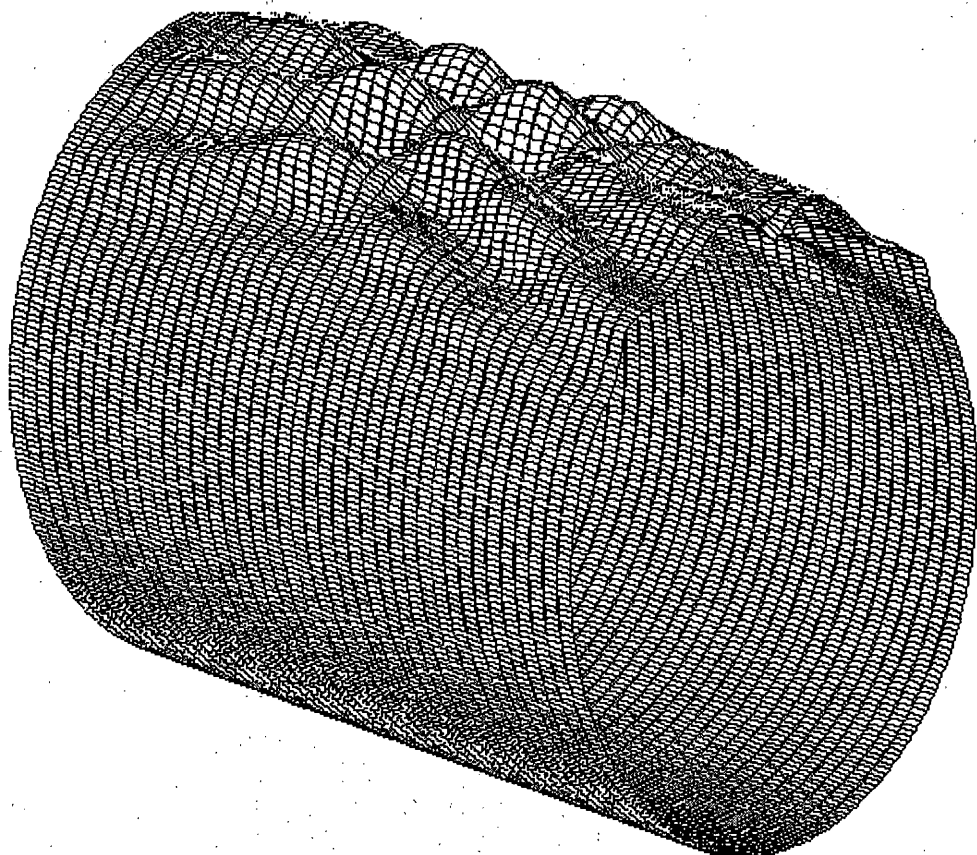
На фиг. 2 представлены графики зависимости параметра $k_p = M_{kp}/M_0$, где $M_0 = 2\pi ER_0 h^2 / \sqrt{12(1 - \nu^2)}$, $R_0 = a[3/2(1 + \underline{b}) + \sqrt{\underline{b}}]/2$, от параметра \underline{b} для случая линейного (k_{pl}) и нелинейного (k_{pn}) исходных напряженно-деформированных состояний для случая действия изгибающего момента в плоскости большой оси эллипса. Из фиг. 2 видно, что с уменьшением \underline{b} параметр k_p как для случая линейного, так и для случая нелинейного исходных напряженно-деформированных состояний, сначала возрастает,



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

достигая максимума при $\underline{b} = 0.7$, а потом начинает снижаться. Причем, при $\underline{b} = 1$ значения k_p совпадают с решением [1]. Влияние нелинейности на всем диапазоне изменения \underline{b} колеблется в диапазоне 10–15%, наиболее существенно при $\underline{b} > 0.6$ и незначительно при $\underline{b} < 0.5$. На фиг. 3 представлены графики зависимости параметра $k_p = M_{kp}/M_0$ от параметра \underline{b} для случая линейного (k_{pl}) и нелинейного (k_{pn}) исходных напряженно-деформированных состояний для случая действия изгибающего момента в плоскости малой оси эллипса. Из фиг. видно, что с уменьшением параметра \underline{b} параметр k_p как для случая линейного, так и для случая нелинейного исходных напряженно-деформированных состояний уменьшается. Влияние нелинейности на всем диапазоне изменения параметра \underline{b} колеблется в диапазоне 10–15%, наиболее существенно при $\underline{b} > 0.6$ и незначительно при $\underline{b} < 0.5$.

Форма потери устойчивости оболочки существенно зависит как от значения параметра \underline{b} , так и от направления действия изгибающего момента. Так при действии изгибающего момента в плоскости большой оси эллипса при значениях параметра $\underline{b} < 0.6$

оболочка теряет устойчивость от действия максимальных сжимающих усилий T_x на границе перехода малой кривизны в большую кривизну с образованием локальных поперечных вмятин (фиг. 4). А при значениях $\underline{b} > 0.6$ оболочка теряет устойчивость в верхней части в области действия максимальных сжимающих усилий T_x с образованием ромбовидных вмятин (фиг. 5). При действии изгибающего момента в плоскости малой оси эллипса при всех значениях \underline{b} оболочка теряет устойчивость в верхней части в области действия максимальных сжимающих усилий T_x с образованием поперечных складок.

Характер деформирования оболочки в исходном состоянии также сильно зависит от параметра \underline{b} . При малых значениях параметра $\underline{b} < 0.2$ в верхней части оболочки наблюдается некоторое обжатие ее во внутрь, чего нет для других значений \underline{b} , а при больших значениях \underline{b} наблюдается выпучивание оболочки по всей поверхности.

Кривые k_{pn} на фиг. 2–3 соответствуют аппроксимирующим зависимостям $k_{pn} \cong -0.9 + 6.43\underline{b} - 4.7\underline{b}^2$, $k_{pn} \cong 1.033\underline{b} - 0.213$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
2. Астрахарчик С.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости оболочек и панелей ненулевой гауссовой кривизны // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 102–108.
3. Кабанов В.В., Астрахарчик С.В. Нелинейное деформирование и устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек при изгибе // Пространственные конструкции в Красноярском крае. Сб. науч. тр. Красноярск: КИСИ, 1985. С. 75–83.

Новосибирск

Поступила в редакцию
3.12.2001