

УДК 539.3:534.1

© 2004 г. Л.М. ЗУБОВ, М.С. ЛАСТЕНКО

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ЦИЛИНДРА ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

На основе уравнений пространственной нелинейной теории упругости исследуется устойчивость равновесия кругового цилиндра при однородном осевом растяжении. Изучаются осесимметричные формы неустойчивости, описывающие образование “шейки” в растянутом стержне. Изотропный несжимаемый материал стержня обладает степенным упрочнением и описывается при помощи логарифмического тензора деформации. Путем решения линеаризованных уравнений устойчивости растягиваемого цилиндра определен спектр критических значений продольной деформации и найдены собственные моды выпучивания. Установлено, что моды бифуркации равновесия, связанные с образованием шейки, возникают при удлинении, незначительно превышающем точку максимума на диаграмме растяжения стержня. Отмечена особенность потери устойчивости с образованием шейки, состоящая в том, что различные моды неустойчивости имеют близкие собственные значения. Аналогичные с качественной точки зрения результаты были получены ранее [1] в задаче об образовании шейки в прямоугольном брусе в условиях плоской деформации.

1. Осесимметричная деформация кругового цилиндра. Рассмотрим упругое тело, имеющее в отсчетной конфигурации форму кругового цилиндра с радиусом r_0 и длиной l . За лагранжевы координаты примем цилиндрические координаты r, φ, z , в которых область, занимаемая телом, задается неравенствами $0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq l$. Предположим, что цилиндр испытывает конечную осесимметричную деформацию, описываемую соотношениями

$$R = R(r, z), \quad \Phi = \varphi, \quad Z = Z(r, z) \quad (1.1)$$

Здесь R, Φ, Z – цилиндрические координаты точек тела после деформации. Учитывая представление оператора градиента в цилиндрических координатах

$$\text{grad} = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.2)$$

и выражение вектора положения частицы тела в деформированном состоянии

$$\mathbf{R} = R\mathbf{e}_r + Z\mathbf{e}_z \quad (1.3)$$

вычислим градиент деформации $\mathbf{C} = \text{grad}\mathbf{R}$, соответствующий преобразованию (1.1):

$$\mathbf{C} = \frac{\partial R}{\partial r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\partial Z}{\partial r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \frac{R}{r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial R}{\partial z} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\partial Z}{\partial z} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (1.4)$$

В (1.2)–(1.4) $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ – единичные векторы, касательные к координатным линиям цилиндрической системы координат. Из (1.4) находим меру деформации Коши –

Грина [2] $\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T$:

$$\mathbf{G} = a\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + b\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + b\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r + c\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + d\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi$$

$$a = \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2, \quad b = \frac{\partial R \partial R}{\partial r \partial z} + \frac{\partial Z \partial Z}{\partial r \partial z} \quad (1.5)$$

$$c = (\partial R / \partial z)^2 + (\partial Z / \partial z)^2, \quad d = (R/r)^2$$

Система уравнений, описывающих деформацию упругого тела при отсутствии массовых сил, состоит [2] из уравнений равновесия для тензора напряжений Пиолы \mathbf{D} :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} \equiv \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial z} = 0 \quad (1.6)$$

и определяющих соотношений

$$\mathbf{D} = d\Pi/d\mathbf{C} - \eta p \mathbf{C}^{-T}, \quad (1.7)$$

где div – оператор дивергенции в отсчетной конфигурации, Π – удельная потенциальная энергия деформации, p – давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию. Параметр η равен нулю для сжимаемого материала и единице для несжимаемого. На основании (1.4), (1.5), (1.7) нетрудно заключить, что в случае однородного изотропного материала, когда Π – функция инвариантов тензора \mathbf{G} , тензор \mathbf{D} будет иметь представление

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & D_{rr}(r, z)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + D_{rz}(r, z)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + D_{\varphi\varphi}(r, z)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \\ & + D_{zr}(r, z)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r + D_{zz}(r, z)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.8)$$

В силу (1.7), (1.8) векторное уравнение равновесия (1.6) в случае сжимаемого материала сводится к двум скалярным уравнениям относительно двух функций $R(r, z)$ и $Z(r, z)$.

Будем считать, что боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузки, а на торцах отсутствуют силы трения, т.е. касательные напряжения, и задано постоянное нормальное перемещение. Сказанное приводит к следующим граничным условиям:

$$D_{rr}(r_0, z) = 0, \quad D_{rz}(r_0, z) = 0 \quad (1.9)$$

$$D_{zr}(r, 0) = D_{zr}(r, l) = 0, \quad Z(r, 0) = 0, \quad Z(r, l) = \lambda l \quad (1.10)$$

где λ – заданная положительная постоянная.

Краевые условия (1.10) означают, что при растяжении цилиндра задаются вертикальные перемещения его торцов, т.е. нагружение стержня осуществляется в жесткой испытательной машине.

В дальнейшем будем использовать модель несжимаемого изотропного материала, для которого допустимы только изохорические деформации. При осесимметричной деформации условие несжимаемости $\det \mathbf{C} = 1$ согласно (1.4) накладывает следующее ограничение на функции $R(r, z)$ и $Z(r, z)$:

$$\frac{R}{r} \left(\frac{\partial R \partial Z}{\partial r \partial z} - \frac{\partial R \partial Z}{\partial z \partial r} \right) = 1 \quad (1.11)$$

Один из способов представления уравнений состояния изотропного несжимаемого материала заключается [2, 3] в применении логарифмической меры деформации (тензора Генки):

$$\mathbf{H} = \ln \mathbf{G} / 2 \quad (1.12)$$

Так как при изохорической деформации $\text{tr} \mathbf{H} = 0$, для несжимаемого тела тензор \mathbf{H} является девиатором. Обозначив его второй инвариант через $-\Gamma^2/2$, получим

$$\Gamma = \sqrt{\text{tr} \mathbf{H}^2} \quad (1.13)$$

Определяющее соотношение для тензора напряжений Пиолы в изотропном несжимаемом теле можно записать при помощи (1.7), (1.12) в виде

$$\mathbf{D} = (d\Pi/d\mathbf{H}) \cdot \mathbf{C}^{-T} - p\mathbf{C}^{-T} \quad (1.14)$$

В задаче об осесимметричной деформации несжимаемого тела p – неизвестная функция координат r, z . Появление этой дополнительной неизвестной функции компенсируется добавочным уравнением – условием несжимаемости (1.11).

По определению логарифма положительно определенного тензора [2] и на основании (1.12) имеем

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \ln G_i \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i \quad (1.15)$$

где G_i – собственные значения тензора \mathbf{G} ; \mathbf{d}_i – его собственные единичные векторы. При помощи (1.5) находим

$$G_1 = d, \quad G_{2,3} = \frac{1}{2}(h \pm \sqrt{h^2 - 4/d}) \quad (1.16)$$

$$h = a + c = \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2$$

$$\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 &= \\ &= (h - 2G_3)^{-1} (a\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + b\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + b\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r + c\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z - G_3\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - G_3\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3 = (h - 2G_2)^{-1} (a\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + b\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + b\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r + c\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z - G_2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - G_2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)$$

Формулы (1.15)–(1.17) дают явное выражение тензора Генки при осесимметричной деформации через функции R и Z .

В качестве конкретной модели изотропного несжимаемого тела рассмотрим материал со степенным упрочнением [4, 5], для которого упругий потенциал имеет вид

$$\Pi = A\Gamma^\beta, \quad A > 0, \quad \beta > 1 \quad (1.18)$$

где A, β – постоянные. Тензор напряжений Пиолы для данного материала согласно (1.14) имеет представление

$$\mathbf{D} = A\beta(\text{tr} \mathbf{H}^2)^{\beta/2-1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{-T} - p\mathbf{C}^{-T} \quad (1.19)$$

Связь главных истинных напряжений σ_i (т.е. собственных значений тензора напряжений Коши) с главными истинными деформациями H_i (т.е. собственными значениями тензора Генки) для материала (1.18) дается формулами

$$\sigma_i = A\beta\Gamma^{\beta-2} H_i - p \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.20)$$

Модель (1.18) удовлетворительно описывает [4, 6] поведение ряда упругопластических конструкционных материалов при активном нагружении и может служить обобщением деформационной теории пластичности на случай больших деформаций.

2. Однородное состояние одноосного растяжения. Краевая задача (1.6), (1.9), (1.10) для несжимаемого материала со степенным упрочнением имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} R(r, z) &= \lambda^{-1/2} r, \quad Z(r, z) = \lambda z \\ p &= p_0 = -\frac{1}{2} A \beta \left(\frac{3}{2} \ln^2 \lambda \right)^{\beta/2-1} \ln \lambda \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решению (2.1) соответствует однородное напряженно-деформированное состояние цилиндра, при котором равны нулю все напряжения, кроме нормального напряжения, действующего на площадках $z = \text{const}$. Величина истинного растягивающего напряжения σ согласно (1.20), (2.1) связана с относительным осевым удлинением $\delta = \lambda - 1$ формулой

$$\sigma(\lambda) = A \beta (3/2)^{\beta/2} \ln^{\beta-1} \lambda \quad (2.2)$$

Растягивающая сила, приложенная к торцам цилиндра, выражается соотношением

$$P = \pi r_0^2 \lambda^{-1} \sigma = \pi r_0^2 A \beta (3/2)^{\beta/2} \lambda^{-1} \ln^{\beta-1} \lambda \quad (2.3)$$

Зависимость (2.3) описывает диаграмму одноосного растяжения стержня и, в отличие от зависимости (2.2), не является монотонно возрастающей. Функция $P(\lambda)$, заданная соотношением (2.3), имеет одну точку максимума $\lambda_* = \exp(\beta - 1)$. Ниспадающий участок диаграммы растяжения, на котором $\lambda > \lambda_*$, на практике может быть реализован при деформировании стержня в жесткой испытательной машине.

3. Линеаризованная краевая задача об устойчивости состояния однородного растяжения. Из опытов на простое растяжение хорошо известно, что после достижения максимума на диаграмме нагружения процесс однородного деформирования становится неустойчивым. Цилиндрическая форма растянутого образца сменяется осесимметричной формой равновесия, образуется шейка. Исследуем образование шейки как явление потери устойчивости состояния однородного растяжения цилиндра, основываясь на точных уравнениях трехмерной теории устойчивости упругих тел [2, 7]. Рассмотрим осесимметричную форму равновесия упругого цилиндра, мало отличающуюся от однородного одноосного растяжения, описанного в п. 2:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \varepsilon \mathbf{w}, \quad p(r, z) = p_0 + \varepsilon p^*(r, z) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{R}_0 = \lambda^{-1/2} r \mathbf{e}_r + \lambda z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{w} = u(r, z) \mathbf{e}_r + w(r, z) \mathbf{e}_z$$

Здесь ε – малый параметр, \mathbf{w} – вектор добавочного перемещения. Линеаризуя уравнение равновесия (1.6) относительно осесимметричных возмущений, получим

$$\text{div} \mathbf{D}^* = 0 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{D}^* = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{D}(\mathbf{C}_0 + \varepsilon \text{grad} \mathbf{w}) \right|_{\varepsilon=0}, \quad \mathbf{C}_0 = \text{grad} \mathbf{R}_0$$

Здесь учтено, что $\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \varepsilon \text{grad} \mathbf{w}$.

Возмущение \mathbf{D}^* тензора напряжений Пиолы найдем путем линеаризации определяющего соотношения (1.14)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* &= (d\Pi/d\mathbf{H})^* \cdot \mathbf{C}_0^{-T} - (d\Pi/d\mathbf{H})_0 \cdot \mathbf{C}_0^{-T} \cdot (\text{grad} \mathbf{w})^T \cdot \mathbf{C}_0^{-T} - \\ &- p^* \mathbf{C}_0^{-T} + p_0 \mathbf{C}_0^{-T} \cdot (\text{grad} \mathbf{w})^T \cdot \mathbf{C}_0^{-T} \end{aligned} \quad (3.3)$$

При помощи (1.15)–(1.17) и (3.1) вычислим возмущение логарифмической меры деформации

$$\mathbf{H}^{\cdot} = \left(-\lambda^{1/2} \frac{\partial u}{\partial r} - \lambda^{-1} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \mathbf{e}_{\varphi} \otimes \mathbf{e}_{\varphi} + \lambda^{-1} \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \lambda^{1/2} \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \\ + \frac{3}{2} \ln \lambda \frac{\lambda^{-1/2} \partial u / \partial z + \lambda \partial w / \partial r}{\lambda^2 - \lambda^{-1}} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r) \quad (3.4)$$

Для материала со степенным упрочнением на основании (1.18), (3.4) находим

$$(d\Pi/d\mathbf{H})^{\cdot} = A\beta \left(\frac{3}{2} \ln^2 \lambda \right)^{\beta/2-1} \left\{ \left(-\lambda^{1/2} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\beta}{2} \lambda^{-1} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \mathbf{e}_{\varphi} \otimes \mathbf{e}_{\varphi} + \right. \\ + (\beta - 1) \lambda^{-1} \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \left. \left(\left[1 - \frac{\beta}{2} \right] \lambda^{-1} \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda^{1/2} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \ln \lambda \frac{\lambda^{-1/2} \partial u / \partial z + \lambda \partial w / \partial r}{\lambda^2 - \lambda^{-1}} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r) \right\} \quad (3.5)$$

Подстановка (3.3)–(3.5) в (3.2) приводит к линеаризованным уравнениям равновесия

$$A\beta \left(\frac{3}{2} \ln^2 \lambda \right)^{\beta/2-1} \left\{ \lambda^{1/2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{3}{2} \ln \lambda \frac{\lambda^{-1/2} \partial^2 u}{\lambda^2 - \lambda^{-1} \partial z^2} + \right. \\ \left. + \left(\left[1 - \frac{\beta}{2} \right] \lambda^{-1} + \frac{3}{2} \frac{\ln \lambda}{\lambda^4 - \lambda} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r} \lambda^{1/2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\lambda^{-1} \partial w}{r \partial z} \right\} - \frac{\partial p^{\cdot}}{\partial r} = 0 \quad (3.6)$$

$$A\beta \left(\frac{3}{2} \ln^2 \lambda \right)^{\beta/2-1} \left\{ \frac{3}{2} \ln \lambda \frac{\lambda^{-1/2} \partial^2 u / \partial z \partial r + \lambda \partial^2 w / \partial r^2}{\lambda^2 - \lambda^{-1}} + \right. \\ \left. + \lambda^{-1} \left(\beta - 1 - \frac{3}{2} \ln \lambda \right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{3}{2} \frac{\ln \lambda \lambda^{-1/2} \partial u / \partial z + \lambda \partial w / \partial r}{r (\lambda^2 - \lambda^{-1})} \right\} - \frac{\partial p^{\cdot}}{\partial z} = 0$$

Линеаризованное условие несжимаемости вытекает из (1.11) и имеет вид

$$\lambda^{-3/2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0 \quad (3.7)$$

Граничные условия на боковой поверхности цилиндра в возмущенном состоянии равновесия согласно (1.9) задаются векторным равенством $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}^{\cdot}(r_0, z) = 0$, которое накладывает следующие ограничения на функции u, w, p^{\cdot} при $r = r_0$:

$$A\beta \left(\frac{3}{2} \ln^2 \lambda \right)^{\beta/2-1} \left\{ \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) \lambda^{-1/2} \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial r} \right\} - \lambda^{1/2} p^{\cdot} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \lambda^{3/2} \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

Линеаризация краевых условий (1.10) на торцах цилиндра $z = 0$ и $z = l$ дает

$$w = 0$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_r = A\beta \left(\frac{3}{2}\right)^{\beta/2} \ln^{\beta-1} \lambda \frac{\partial u / \partial z + \lambda^{-3/2} \partial w / \partial r}{\lambda^2 - \lambda^{-1}} = 0 \quad (3.9)$$

Уравнения (3.6), (3.7) и граничные условия (3.8), (3.9) образуют линейную однородную краевую задачу, которая всегда имеет тривиальное решение $u = w = p = 0$. Согласно бифуркационному критерию устойчивости равновесия [2, 7], исследование устойчивости в малом сводится к нахождению спектра критических значений параметра λ , при которых указанная краевая задача имеет нетривиальные решения, а также к определению собственных функций – мод выпучивания.

Заметим, что в силу концепции продолжающегося нагружения бифуркационный критерий пригоден с прикладной точки зрения также и для исследования устойчивости упругопластических тел [8].

Решение краевой задачи (3.6)–(3.9) будем искать в виде

$$u(r, z) = U(r) \cos \gamma z, \quad w(r, z) = W(r) \sin \gamma z$$

$$p = A Q(r) \cos \gamma z, \quad \gamma = n\pi/l \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.10)$$

Эта форма решения позволяет удовлетворить краевым условиям (3.9) на торцах цилиндра. Подстановка (3.10) в (3.6)–(3.8) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\beta \left(\frac{3}{2} \ln^2 \lambda\right)^{\beta/2-1} \left\{ \lambda^{3/2} \left(U'' + \frac{2}{r} U' - \frac{3}{2} \gamma^2 \frac{\ln \lambda}{\lambda^3 - 1} U \right) + \right.$$

$$\left. + \gamma \left(\frac{3}{2} \frac{\ln \lambda}{\lambda^3 - 1} + 1 - \frac{\beta}{2} \right) W' + \frac{\gamma}{r} W \right\} - \lambda Q' = 0$$

$$\beta \left(\frac{3}{2} \ln^2 \lambda\right)^{\beta/2-1} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\ln \lambda}{\lambda^2 - \lambda^{-1}} \left(-\lambda^{-1/2} \gamma \left[U' + \frac{1}{r} U \right] + \lambda W'' + \frac{\lambda}{r} W' \right) + \right.$$

$$\left. + \lambda^{-1} \gamma^2 \left(\frac{3}{2} \ln \lambda - \beta + 1 \right) W \right\} + \gamma Q = 0$$

$$U' + \frac{1}{r} U + \lambda^{-3/2} \gamma W = 0$$

с граничными условиями

$$\left[\beta \left(\frac{3}{2} \ln^2 \lambda\right)^{\beta/2-1} \left\{ \left(1 - \frac{\beta}{2} \right) \lambda^{-1/2} \gamma W + \lambda U' \right\} - \lambda^{1/2} Q \right] \Big|_{r=r_0} = 0$$

$$(\gamma U - \lambda^{3/2} W') \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (3.12)$$

Таблица 1

n	$\beta = 1.01$	$\beta = 1.1$	$\beta = 1.5$	$\beta = 2.0$
1	0.01008	0.10543	0.64929	1.71870
2	0.01019	0.10621	0.65099	1.71995
3	0.01042	0.10756	0.65385	1.72204
4	0.01085	0.10959	0.65786	1.72495
10	0.02988	0.14594	0.70708	1.75950
30	0.50076	0.59901	1.09411	2.04107
90	0.69308	0.84360	1.59451	2.82390
300	0.76825	0.93500	1.78310	3.26516
500	0.78038	0.94968	1.81428	3.34077
1000	0.78928	0.96045	1.83712	3.39549

Таблица 2

β	1.01	1.1	1.5	2.0
δ_*	0.01005	0.10517	0.64872	1.71828

Для решения системы (3.11) кроме условий (3.12) необходимы еще два краевых условия в точке $r = 0$. Они вытекают из требования неразрывности материала и гладкости решения на оси цилиндра и имеют вид

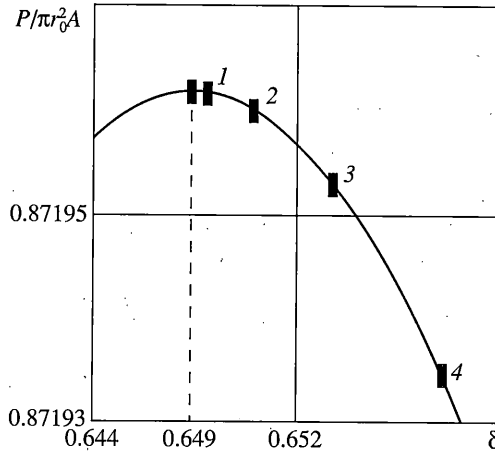
$$U(0) = W'(0) = 0 \tag{3.13}$$

4. Особенности спектра критических удлинений и форм потери устойчивости. Линейная однородная краевая задача (3.11)–(3.13) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений решалась численно, конечно-разностным методом, описанным в [9]. Установлено, что критические значения параметра λ существуют только на ниспадающем участке диаграммы растяжения, т.е. при $\lambda > \lambda_*$. Этот факт согласуется с теоремой об отсутствии смежных форм равновесия на возрастающем участке диаграммы растяжения стержня, доказанной [1] для изотропного несжимаемого материала общего вида в случае плоской деформации прямоугольного бруса.

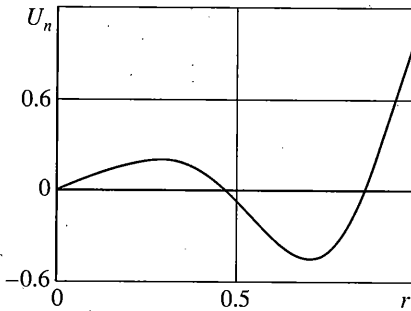
В табл. 1 представлены значения критических удлинений $\delta_n(\beta) = \lambda_n(\beta) - 1$ в зависимости от целочисленного параметра волнообразования n вдоль оси цилиндра и параметра упрочнения β . В этих расчетах было принято $l = 20$, $r_0 = 1$. Табл. 2 содержит значения $\delta_*(\beta)$, соответствующие точке максимума на диаграмме нагружения. Из сравнения табл. 1 и 2 видно, что первое критическое удлинение δ_1 расположено очень близко к точке максимума на диаграмме растяжения. Фиг. 1 наглядно представляет распределение нескольких первых критических значений удлинения при $\beta = 1.5$, которые отложены на узком участке диаграммы растяжения, примыкающем к точке максимума.

Отметим некоторые особенности распределения критических удлинений δ_n . Значения δ_n монотонно растут с ростом n . Разность $\delta_{n+1} - \delta_n$ сначала возрастает с ростом n , затем начинает убывать, а при достаточно больших n становится очень малой. Критические значения δ_n , соответствующие различным модам неустойчивости, близки друг к другу. По этой причине реальная форма “шейки” образуется в результате наложения многих синусоидальных мод неустойчивости.

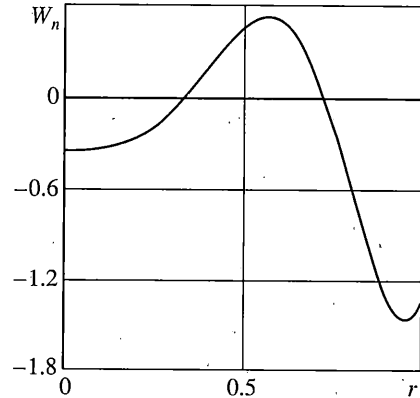
Как показывают численные расчеты, с ростом n увеличивается число нулей собственных функций $U_n(r)$, $W_n(r)$ краевой задачи (3.11)–(3.13). Это означает, что с возрастанием



Фиг. 1



Фиг. 2



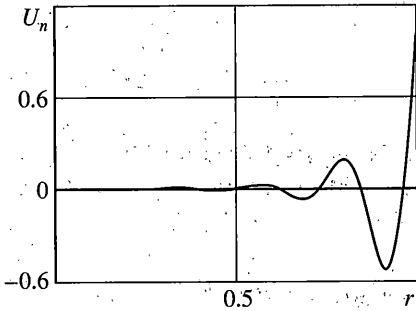
Фиг. 3

танием номера моды усиливается осцилляция решения по радиальной координате. Так, например, при $\beta = 1.1$ и $n < 10$ функции $W_n(r)$ не меняют знака в промежутке $(0, r_0)$, при $40 < n < 55$ имеют один нуль, при $75 < n < 90$ — два нуля и т.д. При $n = 300$ функция $W_n(r)$ имеет уже восемь нулей.

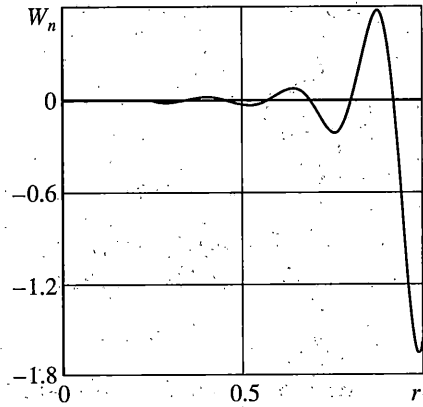
Характер осцилляции решения зависит от параметра упрочнения β . С ростом β осцилляция уменьшается. Установлено также, что для мод высших порядков деформация при потере устойчивости локализуется вблизи боковой поверхности цилиндра.

На фиг. 2, 3 изображены графики функций $U_n(r)$, $W_n(r)$, нормированных условием $U_n(r_0) = 1$, при $n = 90$, а на фиг. 4, 5 — при $n = 300$. Кривые на фиг. 2–5 относятся к случаю, когда $l = 20$, $r_0 = 1$, $\beta = 1.1$.

В заключение заметим, что вопросы, близкие к теме настоящей работы, обсуждались с другой точки зрения в [10–13], где показана физическая осуществимость падающего участка диаграммы, связывающей истинные напряжения с удлинениями, при сохранении свойства сильной эллиптичности материала (строгого неравенства Адамара). Само явление убывающей зависимости истинных напряжений от удлинений названо в [10–13] разупрочнением материала.



Фиг. 4



Фиг. 5

В публикуемой работе согласно (2.2) рассматривается материал, для которого зависимость истинного напряжения от удлинения является монотонно возрастающей, т.е. участок разупрочнения в смысле [10–13] отсутствует. Падающий участок наблюдается согласно (2.3) на диаграмме зависимости номинального напряжения от удлинения. Исследованное в [10–13] разупрочнение материала может иметь место на стадии достаточно развитой шейки. Однако, как показано выше, начало образования шейки не связано с разупрочнением материала, а обусловлено явлениями упругой неустойчивости, аналогичными выпучиванию конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* О неустойчивости растянутого нелинейно-упругого бруса // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 786–798.
2. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Новожилов В.В.* О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 6. С. 709–722.
4. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: ИЛ, 1954. 648 с.
5. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
6. *Белл Дж.Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 2. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 432 с.
7. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Некоторые проблемы устойчивости трехмерных нелинейно упругих тел // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 1999. № 1. С. 42–47.
8. *Клюшников В.Д.* Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
9. *Зубов Л.М., Моисеенко С.И.* Выпучивание упругого цилиндра при кручении и сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 78–84.
10. *Никитин Л.В., Рыжак Е.И.* Об осуществимости состояний материала, соответствующих “падающему” участку диаграммы // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 155–161.
11. *Рыжак Е.И.* К вопросу об осуществимости однородного закритического деформирования при испытаниях в жесткой трехосной машине // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 111–127.
12. *Рыжак Е.И.* Об устойчивом закритическом деформировании в нежесткой трехосной испытательной машине // Докл. РАН. 1993. Т. 330. № 2. С. 197–199.
13. *Рыжак Е.И.* Об устойчивом закритическом деформировании упругопластических образцов, стесненных обоймой конечной жесткости // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 3. С. 117–135.