

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ВЫПУЧИВАНИЯ РЕОНОМНЫХ СТЕРЖНЕЙ

В задачах теории выпучивания стержней, в отличие от теории устойчивости прямолинейной формы равновесия [1], характерным является существование малого начального несовершенства в виде искривления оси. В [2] был предложен энергетический метод определения критического времени в задачах продольного изгиба стержней, нагруженных сосредоточенными силами по концам в условиях ползучести. Ниже дано обобщение этого метода на случай действия произвольной системы сил, в том числе распределенных нагрузок.

Доказано, что предложенный энергетический метод дает верхнюю оценку реального критического времени. Установлена аналогия между основным уравнением энергетического метода и уравнением релаксации реономной модели растянутого или сжатого стержня. Получена новая формула, определяющая закономерность нарастания прогибов со временем в зависимости от значения показателя степени в уравнении состояния нелинейно-вязкого материала.

В качестве примера определено критическое время в задаче выпучивания стержня, нагруженного равномерно распределенным по длине давлением. Указанное давление может быть обусловлено полем сил тяжести. В этом случае полученное далее теоретическое решение представляет интерес в задачах проектирования башен и других высотных сооружений при прогнозировании ресурса безаварийной эксплуатации.

1. Общий случай расчетной схемы продольного изгиба стержня изображен на фиг. 1, где  $z$  – ось, совпадающая по направлению с осью недеформированного стержня,  $y$  – ось прогибов,  $A$  – амплитуда прогибов в деформированном состоянии,  $q$  – интенсивность распределенной нагрузки,  $P_i$  – сосредоточенные силы.

В начальный момент времени  $t = 0$ ,  $A = A_0$ , где  $A_0$  малое начальное несовершенство оси стержня, обусловленное, в частности, технологическими причинами.

Уравнение состояния материала примем в виде

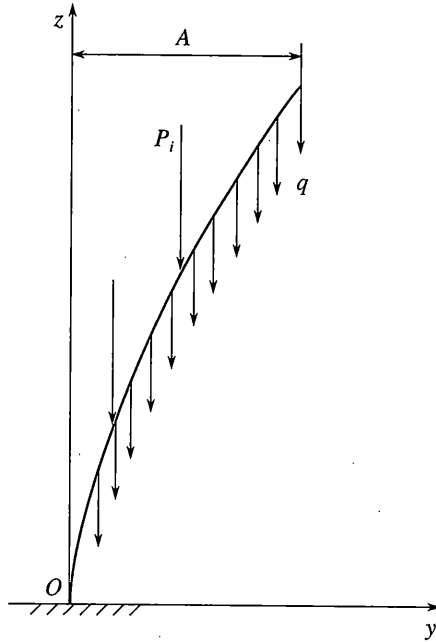
$$\xi = k\sigma^n \quad (1.1)$$

где  $\xi$  – скорость деформации,  $\sigma$  – напряжение,  $k$  и  $n$  – постоянные материала при определенной температуре.

Основное энергетическое уравнение, следующее из закона сохранения мощности в текущий момент времени, имеет вид

$$\int_0^l q\dot{\lambda}(z)dz + P_1\dot{\lambda}_1 + P_2\dot{\lambda}_2 + \dots = W, \quad W = \int_V \sigma\xi dV \quad (1.2)$$

где  $\lambda(z)$  – осевое перемещение в произвольном поперечном сечении,  $\lambda_i$  – перемещение точки приложения сосредоточенной силы  $P_i$ ,  $W$  – мощность внутренних сил,  $l$  и  $V$  – длина и объем стержня, точкой обозначена производная по времени.



Фиг. 1

В случае нелинейно-вязкого материала имеет место связь [3]:

$$W = (n + 1)\tilde{\Lambda} \quad (1.3)$$

где \$\tilde{\Lambda}\$ – дополнительное рассеяние всего тела.

В [4] была предложена аппроксимация дополнительного рассеяния в виде

$$\tilde{\Lambda} = \frac{kF}{n+1} \int_0^l \left[ (Ma)^2 + \beta \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \frac{N}{F} Ma + \left( \frac{N}{F} \right)^2 \right]^{(n+1)/2} dz \quad (1.4)$$

$$a = F^{-1/(n+1)} J_n^{-n/(n+1)}$$

где \$M\$ – изгибающий момент, \$N\$ – нормальная сила, \$F\$ – площадь поперечного сечения, принимаемая здесь без нарушения общности, постоянной по длине стержня, \$\beta\$ – параметр, зависящий от формы поперечного сечения, \$J\_n\$ – обобщенный момент инерции поперечного сечения.

Выражение (1.4) может быть представлено в виде

$$\tilde{\Lambda} = \frac{kF}{n+1} \int_0^l (Ma)^{n+1} dz + \frac{kF}{n+1} \Delta, \quad \Delta > 0 \quad (1.5)$$

Удержим, в первом приближении, в выражении (1.5) только первый член. Тогда основное энергетическое уравнение (1.2) с учетом (1.3) примет вид

$$\int_0^l q \lambda(z) dz + P_1 \lambda_1 + P_2 \lambda_2 + \dots > \frac{k}{J_{n0}^n} \int_0^l M^{n+1} dz$$

Изменим здесь знак неравенства на равенство. Тогда получим

$$\int_0^l q \dot{\lambda}(z) dz + P_1 \dot{\lambda}_1 + P_2 \dot{\lambda}_2 + \dots = \frac{k}{J^n} \int_{n_0}^l M^{n+1} dz \quad (1.6)$$

Вычисление дополнительного рассеяния по формуле (1.6) равносильно предложению о том, что в процессе ползучести энергия рассеивается только от действия изгибающего момента. В действительности происходит рассеяние энергии также от действия нормальной силы. В результате критическое время, определяемое равенством (1.6), будет давать верхнюю оценку реального критического времени.

В [2] показано, что при продольном изгибе уравнение (1.6) дает возможность правильно определить критическое время при начальных прогибах порядка характерного размера поперечного сечения.

В задачах выпучивания сжатых стержней в условиях ползучести из-за разброса характеристик ползучести материала и, часто, неопределенности начального несовершенства, основная ценность приближенных решений заключается в возможности качественной оценки степени влияния различных факторов на величину критического времени.

Зададим функцию прогибов с учетом граничных условий задачи в виде

$$y = A(t)f(z) \quad (1.7)$$

где  $A(t)$  – функция времени,  $f(z)$  – координатная функция. В этом случае соотношения [2]:

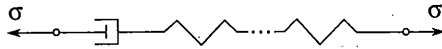
$$\dot{\kappa} = \partial^2 y / \partial z^2 \quad (1.8)$$

$$\dot{\lambda} = A \dot{A} \int_0^z \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz \quad (1.9)$$

где  $\dot{\kappa}$  – скорость изменения кривизны оси стержня в процессе ползучести, а также (1.7) дают возможность представить уравнение (1.6) в форме

$$\alpha_1 \dot{A} + \alpha_2 \dot{A} + \alpha_3 \dot{A} + \dots = b A^n \quad (1.10)$$

где  $\alpha_i$  и  $b$  – размерные коэффициенты, зависящие от исходных условий задачи.



Фиг. 2

2. Схожее по структуре уравнение, отличающееся только знаком в правой части, описывает процесс релаксации реологической модели, показанной на фиг. 2.

В последнем случае

$$c_1 \dot{\sigma} + c_2 \dot{\sigma} + c_3 \dot{\sigma} + \dots = -k \sigma^n \quad (2.1)$$

где  $c_i$  – коэффициенты, обратно пропорциональные модулям упругости упругих элементов нелинейно-вязкоупругой модели.

Заметим, что модель, состоящая из нелинейно-вязкого элемента и двух упругих применялась [5, 6] для описания релаксации в металлах в условиях горячего формоизменения.

Оба процесса: выпучивания в соответствии с уравнением (1.10) и релаксации по уравнению (2.1) относятся к неустановившейся ползучести. В первом случае из-за происходящих геометрических изменений даже при постоянных во времени силах и малых перемещениях, а во втором – вследствие перераспределения деформаций между вязким и упругими элементами.

При  $n = 1$  решения уравнений (1.10) и (2.1) имеют вид

$$A_0/A = \exp(-t/t_0'), \quad \sigma/\sigma_0 = \exp(-t/t_0) \quad (2.2)$$

где  $t_0$  – время релаксации [7],  $t_0'$  – время, за которое амплитуда прогиба увеличивается в  $e$  раз по сравнению с  $A_0$ .

Таким образом, прогибы при продольном изгибе в теле Ньютона нарастают по такому же закону, как убывают напряжения в теле Максвелла в процессе релаксации. Параметр  $t_0'$  по аналогии со временем релаксации можно назвать временем выпучивания.

3. В отличие от случая  $n = 1$  при  $n > 1$  в задаче выпучивания существует критическое время, соответствующее условию  $A \rightarrow \infty$ . Зависимость  $A(t)$  определяется в результате интегрирования уравнения (1.10):

$$A/A_0 = (1 - t/t_*)^{-1/(n-1)} \quad (3.1)$$

где  $t_*$  – критическое время.

Формула (3.1) устанавливает закономерность увеличения прогибов в связи со значениями показателя степени  $n$  в уравнении состояния (1.1).

По структуре эта формула схожа с формулой Хоффа в теории вязкого разрушения растянутого стержня [7]:

$$l/l_0 = (1 - t/t_{**})^{-1/n}$$

где  $t_{**}$  – время вязкого разрушения.

На фиг. 3 построены графики зависимости  $A(t)$  для двух значений  $n$ :  $n = 3$  (кривая 1) и  $n = 5$  (кривая 2). В частности, в случае  $n = 5$  уже при  $A = 2A_0$  имеет место равенство  $t = 0.95 t_*$ , т.е. по существу критическое состояние наступает при прогибах значительно меньших, чем требуется по условию определения асимптотического критического времени ( $A \rightarrow \infty$ ).

Формула (3.1) справедлива при сделанных допущениях независимо от условий нагружения, граничных условий и вида задаваемой координатной функции.

4. В качестве примера определения критического времени рассмотрим задачу выпучивания стержня, нагруженного распределенным по длине давлением (фиг. 4,а).

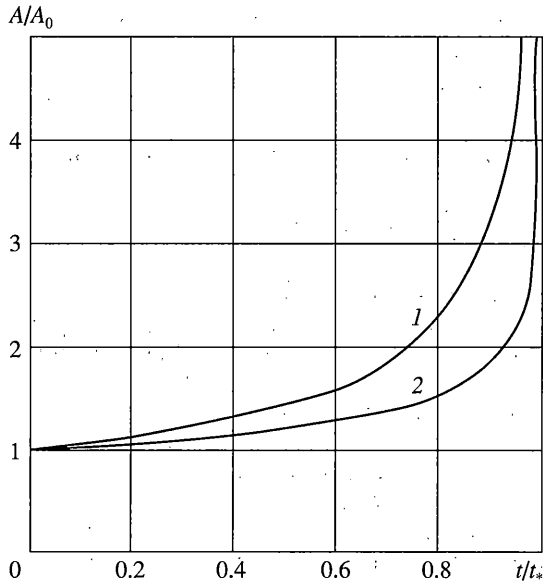
Вначале получим решение с учетом зависимости  $\dot{\kappa}$  от нормальной силы по методике, изложенной в работе [2]. Заменяем реальное поперечное сечение идеальным двутавром. Тогда будем иметь

$$\xi_0 = \frac{k}{2F^n h^n} [ |Nh + M|^{n-1} (Nh + M) + |Nh - M|^{n-1} (Nh - M) ] \quad (4.1)$$

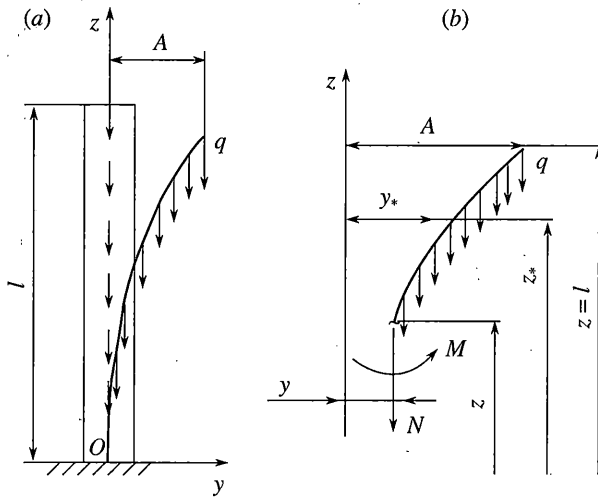
$$\dot{\kappa} = \frac{k}{2F^n h^{n+1}} [ |Nh + M|^{n-1} (Nh + M) - |Nh - M|^{n-1} (Nh - M) ] \quad (4.2)$$

$$h = (J_n/F)^{n/(n+1)}$$

где  $\xi_0$  – скорость деформации оси стержня в процессе ползучести,  $h$  – параметр двутавра.



Фиг. 3



Фиг. 4

Составим выражения  $N(z)$  и  $M(z)$  на основе уравнений равновесия отсеченной части стержня (фиг. 4,б):

$$N = q(z - l) \quad (4.3)$$

$$M = q \int_z^l y_* dz_* - qy(l - z) \quad (4.4)$$

Зададимся функцией прогибов с учетом кинематических граничных условий в виде

$$y = A \left( 1 - \cos \frac{\pi z}{2l} \right), \quad A = A(t) \quad (4.5)$$

Подставляя эту функцию в выражение (4.4) после интегрирования получим

$$M = qA \left[ l \left( \cos \frac{\pi z}{2l} + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi z}{2l} \right) - z \cos \frac{\pi z}{2l} - \frac{2l}{\pi} \right] \quad (4.6)$$

На фиг. 5 показаны эпюры внутренних силовых факторов по высоте стержня. Нормальная сила и изгибающий момент достигают наибольших значений в заделке. Все граничные условия в рассматриваемом приближенном решении выполняются точно: при  $z = 0$  в соответствии с функцией (4.5)  $y = 0$  и  $\partial y / \partial z = 0$ , при  $z = l$  уравнение (4.6) дает  $M = 0$  и  $\partial M / \partial z = 0$ . Второй экстремум функция (4.6) имеет в начале координат.

Уравнения (1.8), (4.2), (4.3), (4.5) и (4.6) дают возможность определить критическое время в общем случае для стержня переменного сечения. С этой целью может быть использован метод Бубнова–Галеркина–Канторовича [2].

Другой вариант приближенного, аналитического решения, сопряженный с менее громоздкими вычислениями, связан с использованием метода коллокации. В этом случае удовлетворим точно полученные уравнения в опасном сечении у заделки ( $z = 0$ ).

В сечении у заделки в соответствии с формулами (4.1), (4.2) и (1.8)

$$\xi_0 = \frac{kq^n A^n l^n}{2F^n h^n} \left[ \left| \frac{\pi - 2}{\pi} - \frac{h}{A} \right|^{n-1} \left( \frac{\pi - 2}{\pi} - \frac{h}{A} \right) + \left| \frac{2 - \pi}{\pi} - \frac{h}{A} \right|^{n-1} \left( \frac{2 - \pi}{\pi} - \frac{h}{A} \right) \right] \quad (4.7)$$

$$\dot{\kappa} = \frac{kq^n A^n l^n}{2F^n h^{n+1}} \left[ \left| \frac{\pi - 2}{\pi} - \frac{h}{A} \right|^{n-1} \left( \frac{\pi - 2}{\pi} - \frac{h}{A} \right) - \left| \frac{2 - \pi}{\pi} - \frac{h}{A} \right|^{n-1} \left( \frac{2 - \pi}{\pi} - \frac{h}{A} \right) \right] \quad (4.8)$$

$$\dot{\kappa} = \pi^2 \dot{A} / (4l^2)$$

Соотношение (4.8) дает возможность определить аналитически критическое время для различных значений  $n$ . Например, при  $n = 5$ :

$$t_* = \frac{\pi^3 F^5 h^2}{16(\pi - 2)kq^5 l^7} \left\{ \frac{1}{5} \ln \left[ 1 + 10 \left( \frac{\pi}{\pi - 2} \right)^2 \frac{h^2}{A_0^2} + 5 \left( \frac{\pi}{\pi - 2} \right)^4 \frac{h^4}{A_0^4} \right] - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \frac{1 + (5 + 2\sqrt{5})(\pi/(\pi - 2))^2 (h/A_0)^2}{1 + (5 - 2\sqrt{5})(\pi/(\pi - 2))^2 (h/A_0)^2} \right\} \quad (4.9)$$

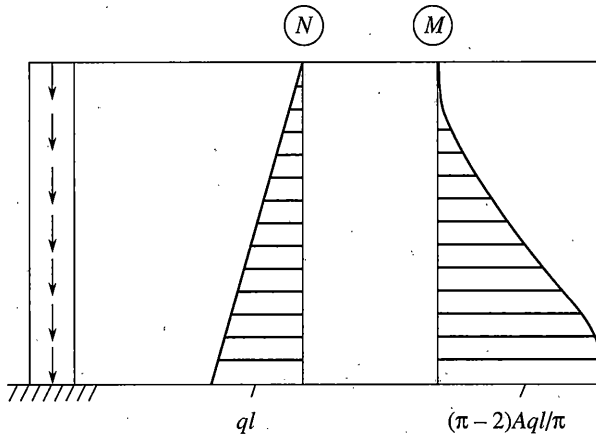
Обратимся к исследованию решения в сечении у заделки. Скорость деформации в этом сечении определяется с помощью гипотезы плоских сечений

$$\xi = \xi_0 + \kappa \tilde{y}$$

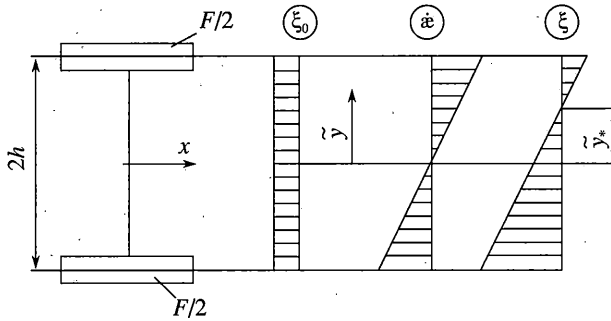
где  $\tilde{y}$  отсчитывается от оси  $x$ , являющейся нейтральной линией при отсутствии нормальной силы (фиг. 6).

В частном случае  $n = 5$  по формулам (4.7) и (4.8) координата нейтральной линии при продольном изгибе определяется условием  $\xi = 0$ :

$$\tilde{y}_* = h \frac{((\pi - 2)/\pi + h/A)^5 - ((\pi - 2)/\pi - h/A)^5}{((\pi - 2)/\pi + h/A)^5 + ((\pi - 2)/\pi - h/A)^5} \quad (4.10)$$



Фиг. 5



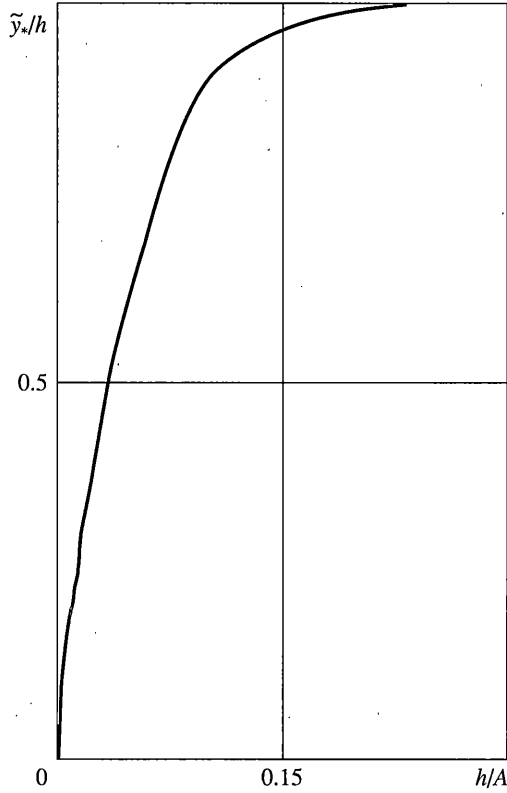
Фиг. 6

На фиг. 7 изображен график зависимости (4.10). При  $h/A \geq (\pi - 2)/\pi$  оказывается  $\tilde{y}_*/h \geq 1$ . Это означает, что при значениях амплитуды прогиба изогнутой оси  $A/h \leq \pi/(\pi - 2) \approx 2.75$  нейтральная линия не пересекает поперечное сечение в форме идеального двутавра. В этом случае продольный изгиб стержня происходит в области доминирующего сжатия [8]. При значениях  $A/h \geq \pi/(\pi - 2)$  нейтральная линия пересекает сечение двутавра и в процессе нарастания прогиба из-за ползучести материала нейтральная линия постепенно будет стремиться к центру тяжести сечения  $\tilde{y}_* \rightarrow 0$ . В этой области деформирования имеет место доминирующий изгиб [8].

Применим энергетический метод, основанный на соотношениях (1.6) и (1.9), к анализу выпучивания стержня (фиг. 4,а) в условиях доминирующего изгиба, т.е. при начальных прогибах  $A_0 \geq 2.75h$ .

Основное энергетическое уравнение (1.6) при  $q = \text{const}$  и  $J_n = \text{const}$  дает интегральное равенство

$$\int_0^l \lambda(z) dz = \frac{k}{J_n} \int_{n_0}^l M^{n+1} dz$$



Фиг. 7

приводящее совместно с функциями (4.5) и (4.6) к дифференциальному уравнению для определения зависимости  $A(t)$ :

$$\frac{(\pi^2 - 4)J_n^n dA}{16kq^n t^{n+2} A^n dt} = I(n)$$

$$I(n) = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \cos \frac{\pi z}{2l} + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi z}{2l} - \frac{z}{l} \cos \frac{\pi z}{2l} - \frac{2}{\pi} \right)^{n+1} dz$$

Интегрируя полученное уравнение с учетом начального условия: при  $t = 0$ ,  $A = A_0$  приходим к соотношению ( $n > 1$ ):

$$t = \frac{(\pi^2 - 4)J_n^n (A_0^{1-n} - A^{1-n})}{16(n-1)kq^n t^{n+2} I(n)}$$

Критическое время соответствует условию  $A \rightarrow \infty$

$$t_* = \frac{(\pi^2 - 4)A_0^{1-n} J_n^n}{16(n-1)kq^n t^{n+2} I(n)} \tag{4.11}$$



В частном случае  $n = 1$  критического времени не существует, зависимость  $A(t)$  имеет вид

$$t = \frac{(\pi^2 - 4)J_1}{16kql^3 I(1)} \ln \frac{A}{A_0}$$

Время выпучивания в формуле (2.2) равно

$$t_0 = \frac{(\pi^2 - 4)J_1}{16kql^3 I(1)}$$

$$I(1) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{12} + \frac{9}{2\pi} - \frac{16}{\pi^2} \right) = 4.65 \cdot 10^{-2}$$

Вычисление интеграла  $I(n)$  при  $n > 1$  может быть существенно упрощено, если приближенно принять, что рассеяние энергии всем стержнем происходит также, как рассеивается энергия в опасном сечении у заделки. Сказанное равносильно предложению о том, что

$$I(n) = ((\pi - 2)/\pi)^{n+1} \tag{4.12}$$

Естественно, такой вариант вычисления  $I(n)$  приводит к завышенному значению последнего, поскольку эпюра изгибающего момента в любой момент времени заменяется прямоугольной эпюрой (штриховая линия на фиг. 5). Например, при  $n = 1$  по формуле (4.12)  $I(1) = 13.2 \cdot 10^{-2}$ .

При этом расчетное время получается меньше, чем его верхняя оценка, что идет в запас прочности конструкции.

Сопоставим между собой значения критического времени, даваемые решениями (4.9) и (4.11) при  $n = 5$ . В качестве примера положим, что поперечное сечение стержня – круг диаметром  $D$ . В этом случае оказывается  $h = 0.245 D$ . Примем  $A_0 = 4h \approx D$ . Тогда по формуле (4.9) будем иметь

$$t_* = 1.63 \cdot 10^{-3} D^{12} / (kq^5 l^7)$$

Заменим численное интегрирование вычислениями интеграла  $I(5)$  по формуле (4.12)  $I(5) = 2.3 \cdot 10^{-3}$ . С учетом этого значения энергетический метод в соответствии с решением (4.11) дает критическое время

$$t_* = 2.77 \cdot 10^{-3} D^{12} / (kq^5 l^7)$$

т.е. больше, чем эта же величина, определяемая по схеме идеального двутавра.

Схема идеального двутавра не является единственной возможностью определения критического времени при соизмеримых между собой величинах  $\xi_0$  и  $\kappa h$ . Равноправным является применение теоремы Келледайна–Друкера [4], также дающей большее значение  $t_*$  по сравнению с критическим временем, найденным по схеме идеального двутавра.

Таким образом, в условиях доминирующего изгиба, решение на основе энергетического уравнения (1.6) дает возможность оценить степень влияния различных факторов, таких, как свойства материала, условия нагружения, величина начального несовершенства, на величину критического времени при продольном изгибе стержней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н., Шестериков С.А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 3. С. 406–412.
2. *Романов К.И.* Продольный изгиб нелинейно-вязких стержней // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1993. Вып. 33. С. 139–151.
3. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
4. *Романов К.И.* Исследование продольного изгиба стержня в условиях ползучести на основе теоремы Келледайна–Друкера // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 157–161.
5. *Лазаренко Э.С., Малинин Н.Н., Романов К.И.* Метод оценки релаксации напряжений в условиях горячего формоизменения металлов и его использование для межотраслевой стандартизации // Унифицированные методы определения ползучести и длительной прочности / Под ред. С.А. Шестерикова. М.: Изд-во стандартов, 1986. Вып. 7. С. 16–21.
6. *Романов К.И.* Механика горячего формоизменения металлов. М.: Машиностроение, 1993. 240 с.
7. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 399 с.
8. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.

Москва

Поступила в редакцию  
2.04.2002