МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2004

УДК 531.011

 В.Ф. ЖУРАВЛЕВ

О ГЕОМЕТРИИ КОНИЧЕСКИХ ВРАЩЕНИЙ

Обсуждается предыстория известной в кинематике ортогональных триэдров теоремы А.Ю. Ишлинского [1] о телесном угле. Доказывается сопряженная ей теорема и теорема о перенесении вектора вдоль замкнутой траектории на группе $SO(3)$. Рассматриваются примеры приложения в теории гироскопов, физике и аналитической механике.

1. История. В фундаментальном труде [2] Гамильтон формулирует следующий результат: "*the infinitely many infinitesimal and conical rotations of the perimeter of any closed figure on a sphere, compound themselves into single resultant and finite rotation, represented by the total area of figure*".[1]

Под коническим вращением Гамильтон понимает такое движение ортогонального трехгранника с неподвижным началом, когда одна из его осей описывает на единичной сфере замкнутую траекторию, имея проекцию угловой скорости на эту ось тождественно равной нулю.

При этом заметим, что само понятие угловой скорости им нигде не используется. На установленный им факт Гамильтон смотрел как на факт чисто геометрический, а не кинематический.

Доказательство приведенного утверждения Гамильтон начинает со случая трех плоских поворотов, когда на единичной сфере ось вычерчивает сферический треугольник. Он записывает кватернионы составляющих поворотов и перемножает их, замечая, что скалярная часть результирующего кватерниона, определяющая искомый угол, задается площадью указанного треугольника, т.е. телесным углом описанного конуса. Затем он повторяет вычисления для четырех поворотов и, обнаружив тот же результат, делает предположение, что он верен и для любого числа поворотов, уже его не доказывая. Далее он сделал еще одно предположение о том, что формула для n плоских поворотов имеет предел при $n \to \infty$.

В 1952 году А.Ю. Ишлинским доказана следующая теорема (теорема о телесном угле) [1].

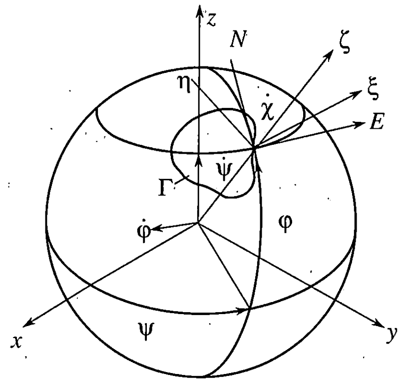
Теорема. Если одна из осей ортогонального трехгранника с неподвижным началом описывает замкнутую поверхность, то угла поворота самого трехгранника вокруг этой оси равен

$$\chi = S + \int_0^T \omega(t)dt \tag{1.1}$$

где S – телесный угол описанного осью конуса, $\omega(t)$ – проекция угловой скорости тела на эту ось, T – время обхода.

Доказательство. Положение рассматриваемого трехгранника $\xi\eta\zeta$ относительно неподвижного трехгранника xyz определим тремя углами ψ, φ и χ (фиг. 1). Пусть ось ζ

[1] Перевод: "...бесконечное число конических инфинитезимальных поворотов вдоль произвольной замкнутой сферической кривой эквивалентны единственному повороту, равному площади фигуры, ограниченной этой кривой".



Фиг. 1

описывает коническую поверхность, определяемую на единичной сфере кривой γ. Проекция угловой скорости трехгранника на подвижную ось ζ равна $\omega(t) = \dot{\psi}\sin\varphi + \dot{\chi}$. Интегрируя это равенство за время полного обхода осью ζ кривой γ, получаем

$$\chi = -\int_0^T \sin\varphi\dot{\psi}dt + \int_0^T \omega(t)dt = -\oint_\gamma \sin\varphi d\psi + \int_0^T \omega(t)dt$$

Используя формулу Грина для криволинейного интеграла, находим

$$\chi = \iint_S \cos\varphi d\psi d\varphi + \int_0^T \omega(t)dt = S + \int_0^T \omega(t)dt$$

Теорема доказана. Все условия обхода контура и его свойства сформулированы в теореме Грина.

Поскольку при каждом плоском повороте в принятой Гамильтоном постановке задачи угловая скорость с неизбежностью перпендикулярна отслеживаемой оси, которая возвращается в итоге на свое место, то в (1.1) $\omega(t) \equiv 0$, и сделанное Гамильтоном утверждение легко следует из теоремы Ишлинского.

Заметим, что, во-первых, это избавляет от необходимости выполнять достаточно громоздкую операцию перемножения трех или четырех кватернионов. Во-вторых, из теоремы Ишлинского следует тот же результат и при любом числе плоских поворотов, а также и для предельного случая. Доказательство такого результата посредством перемножения кватернионов крайне проблематично, если не невозможно. Потому Гамильтон и оставил его без доказательства.

Таким образом, теорема Гамильтона, являющаяся теоремой о сложении поворотов, а не теоремой об интеграле кинематических уравнений, как это имеет место в теореме А.Ю. Ишлинского, легко из последней следует. Это позволяет утверждать, что кинематическая теорема о телесном угле Гамильтоном не только не доказана, но даже и не сформулирована[2].

Неудача Гамильтона как раз и объясняется тем, что он воспользовался конечными поворотами, в то время как у А.Ю. Ишлинского основные рассуждения имеют диффе-

[2] В работе *Г.Б. Малыкин, С.А. Харламов*. Топологическая фаза в классической механике (УФН. 2003. Т. 173. № 9) вопрос о роли Гамильтона в истории теоремы о телесном угле трактуется ошибочно.

ренциальную форму. Использование конечных углов неудобно, поскольку они некоммутативны, тогда как угловая скорость есть элемент линейного пространства.

В 1958 г. в обстоятельной и с серьезными примерами работе [3] Л.Е. Гудман и А.Р. Робинсон, видимо не зная о работе А.Ю. Ишлинского, фактически воспроизводят его результат. Они приводят ссылку на Гамильтона, считая свой результат близким, но не вытекающим из результата Гамильтона. В 1985 г. Дж. Ханнай [4] обсуждаемую теорему о телесном угле, почерпнутую им у Л.Е. Гудмана и А.Р. Робинсона, объявляет следствием установленной им теоремы о накоплении угла в почти интегрируемой гамильтоновой системе с одной степенью свободы. Поскольку теорема Ханная получила некоторую известность, в частности и в связи с теоремой о телесном угле, имеет смысл коснуться ее. Ход рассуждений Ханная следующий. Пусть гамильтониан системы имеет вид $E_0(p, q, \lambda) + \varepsilon E_1(p, q, \lambda)$.

Параметр ε считается малым, а параметр $\lambda(\varepsilon t)$ медленно меняющимся во времени. При каждом фиксированном λ порождающая система интегрируема и имеет решения в виде

$$p = p(I, \varphi, \lambda), \quad q = q(I, \varphi, \lambda) \tag{1.2}$$

где I – константа, а φ – линейная функция времени. Ввести I и φ можно так, чтобы они представляли собой переменные действие-угол, тогда (1.2) можно рассматривать, как каноническую замену переменных, в которой гамильтониан приобретает форму $H_0(I, \lambda) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \lambda)$. Результат Ханная заключается в том, что если $\lambda(0) = \lambda(1)$, то при изменении t от нуля до $1/\varepsilon$ угол φ приобретает приращение

$$\begin{gathered}\varphi(1/\varepsilon) - \varphi(0) = \chi_{\mathrm{dyn}} + \chi_{\mathrm{geom}} + \chi_{\mathrm{res}} \\ \chi_{\mathrm{dyn}} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \frac{\partial H_0(I(\tau/\varepsilon), \lambda(\tau))}{\partial I} d\tau, \quad \chi_{\mathrm{geom}} = \int_0^1 \frac{\partial H_1(I(0), \tau)}{\partial I} d\tau, \quad \chi_{\mathrm{res}} = O(\varepsilon)\end{gathered} \tag{1.3}$$

Величина χ_{geom}, названная впоследствии топологической фазой, и представляет собой, по мнению Ханная, то, что вычислили для гироскопов Л.Е. Гудман и А.Р. Робинсон, а до них А.Ю. Ишлинский.

Это мнение, очевидно, ошибочное, поскольку речь идет о разных понятиях. В теореме А.Ю. Ишлинского накапливаемый угол – это один из углов Эйлера, представляющих собой локальные координаты на группе $SO(3)$. В теореме Ханная, которую предварительно надо распространить на системы, по крайней мере с тремя степенями свободы, накапливается векторная каноническая переменная “угол”, которая преобразованиями типа (1.2) связана со всеми углами Эйлера и вдобавок с сопряженными импульсами. Но даже если эту ошибку и исправить, бросается в глаза несоответствие моделей и притязаний. Теорема о телесном угле может использоваться в любых задачах, где возникает вопрос о кинематике ортогональных триэдров, даже не имеющих отношения к динамическим задачам и вообще к задачам механики, как это иллюстрируется приводимыми ниже примерами. Теорема же Ханная относится только к почти интегрируемым гамильтоновым системам. Теорема о телесном угле точная. Теорема Ханная есть только первое приближение метода осреднения. При этом оценка χ_{res} для случая трех степеней свободы резко ухудшается по сравнению с оценкой для одномерного случая (1.3). Наконец, не стоит для доказательства чисто геометрических, или кинематических фактов прибегать к уравнениями динамики.

2. Развитие. Теорема А.Ю. Ишлинского сформулирована и доказана им для случая, когда известна угловая скорость вращающегося триэдра в проекции на жестко связанную с ним ось. Группа вращений является некоммутативной и заданию угловой скорости во вращающихся осях соответствует левый сдвиг производной от элемента группы, т.е. $\dot{A}$, в алгебру этой группы: $\Omega = A^{-1}\dot{A}$, где A – ортогональная матрица поворота. Любым утверждениям относительно левых сдвигов соответствуют сопряженные утверждения для правых сдвигов, т.е. для случая проектирования угловой скорости на неподвижные оси $\Omega = \dot{A}A^{-1}$.

Теорема 1 [5]. Если ортогональный триэдр с закрепленным началом вращался так, что неподвижная в пространстве ось описала в нем замкнутую коническую поверхность, то он оказывается повернутым вокруг этой оси на угол

$$\chi = -S + \int_0^T \omega(t)dt$$

где ω – проекция угловой скорости триэдра на рассматриваемую неподвижную ось, T – время обхода конуса, S – телесный угол конуса.

Доказательство. Оно легко следует из основной теоремы, если принять неподвижным вращающийся триэдр, а подвижным рассматривать первоначально неподвижное пространство. Тогда угловая скорость пространства равна исходной скорости триэдра с обратным знаком и можно воспользоваться теоремой Ишлинского

$$\chi = -\int_0^T \omega(t)dt + S$$

а поскольку угол поворота пространства относительно рассматриваемого триэдра равен искомому углу поворота триэдра относительно пространства с обратным знаком, то и получаем утверждаемый факт. Следствие доказано.

Можно рассмотреть также и такую ситуацию, когда ось, в проекции на которую угловая скорость подвижного триэдра известна, не является неподвижной ни в самом триэдре, ни в пространстве.

Теорема 2 [6]. Если угловая скорость триэдра с неподвижным началом известна в проекции на прямую, описавшую за время T замкнутую коническую поверхность в неподвижном пространстве и вместе с тем замкнутую коническую поверхность в самом триэдре, то он оказывается повернутым вокруг этой прямой на угол

$$\chi = S_1 - S_2 + \int_0^T \omega(t)dt$$

где S_1 и S_2 – соответственно телесные углы описанных конусов в неподвижном и в подвижном пространствах.

Доказательство. Введем вспомогательный трехгранник. Одна из его осей совпадает с рассматриваемой прямой, а проекция его угловой скорости на нее равна $\omega(t)$. Тогда для этого трехгранника справедлива основная теорема А.Ю. Ишлинского о телесном угле. Поворот вспомогательного трехгранника вокруг основной прямой равен телесному углу описанного этой прямой в неподвижном пространстве конуса S_1 плюс интеграл от $\omega(t)$. Для основного трехгранника вспомогательный играет роль неподвижного. Поэтому угол поворота его вокруг неподвижной для него прямой равен телесному углу S_2, взятому с обратным знаком в соответствии с теоремой 1. Поскольку поворот основного трехгранника относительно вспомогательного и поворот вспомогательного относительно неподвижного измеряются вокруг одной и той же оси, то полный поворот основного трехгранника равен их алгебраической сумме. Теорема доказана.

Обе доказанные теоремы, так же как и теорема А.Ю. Ишлинского, соответствуют эффекту параллельного перенесения вектора вдоль замкнутой кривой на двумерной сфере, на которую проектируется трехмерная кинематика при введенном ограничении на угловую скорость. Между тем представляет интерес выяснить, в чем состоит эффект параллельного перенесения вектора вдоль замкнутой кривой на самой группе $SO(3)$.

Теорема 3. Если подвижный триэдр с закрепленным началом описал на группе $SO(3)$ замкнутую траекторию, то интегралы от проекций угловой скорости триэдра на собственные оси отличаются от целого числа 2π на телесные углы описанных соответствующими осями конусов.

Доказательство. Пусть угловая скорость подвижного триэдра в проекции на собственные оси известна $\boldsymbol{\omega}(t) = \{p(t), q(t), r(t)\}$. Пусть далее в момент времени $t = T$ триэдр вновь занимает положение, которое он имел при $t = 0$. Тогда для каждой из осей триэдра в отдельности можно применить теорему о телесном угле. Пусть одну из таких осей выбрали. Тогда, поскольку триэдр возвращается в первоначальное положение, то угол поворота двух других осей вокруг выбранной оси равен 2π, умноженное на произвольное целое число. Проделав это для каждой оси в отдельности, получим окончательно

$$2\pi m = S_\xi + \int_0^T p(t)dt, \quad 2\pi n = S_\eta + \int_0^T q(t)dt, \quad 2\pi l = S_\zeta + \int_0^T r(t)dt$$

где m, n, l – произвольные целые числа, S_ξ, S_η, S_ζ – телесные углы конусов, описанных осями ξ, η, ζ соответственно. Откуда и следует

$$\theta_1(T) \equiv \int_0^T p(t)dt = 2\pi m - S_\xi$$

$$\theta_2(T) \equiv \int_0^T q(t)dt = 2\pi n - S_\eta$$

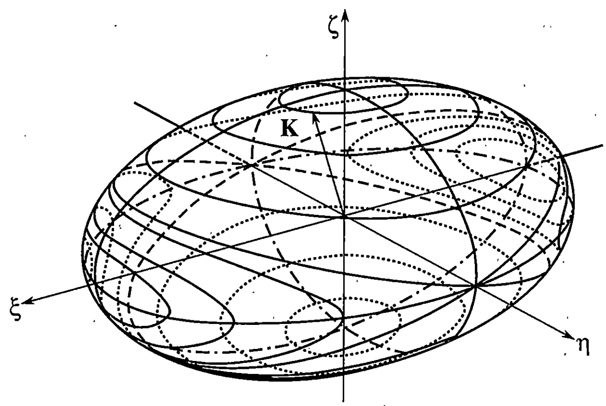
$$\theta_3(T) \equiv \int_0^T r(t)dt = 2\pi l - S_\zeta$$

Теорема доказана.

Следствие (*сопряженная теорема*). Если подвижный триэдр с закрепленным началом описал на группе $SO(3)$ замкнутую траекторию, то интегралы от проекций угловой скорости на неподвижные оси отличаются от целого числа 2π на телесные углы, описанные соответствующими осями конусов в подвижном триэдре:

$$\int_0^T \omega_x(t)dt = 2\pi m + S_x, \quad \int_0^T \omega_y(t)dt = 2\pi n + S_y, \quad \int_0^T \omega_z(t)dt = 2\pi l + S_z$$

Переменные $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$ носят название квазикоординат [8]. Поскольку компоненты угловой скорости $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ не могут быть представлены как полные производные некоторых функций локальных координат, то эти компоненты являются неинтегрируемыми или неголономными, что и объясняет выражение "О неголономных движениях гироскопических систем", использованное в [1]. Следствием неголономности квазикоординат является тот факт, что эти переменные не могут определять ориентацию подвижного триэдра в заданный момент времени, поскольку она будет зависеть не только от значений этих переменных в данный момент, но и от всей предыдущей истории движения.



Фиг. 2

3. Примеры. (A) *Геометрическая интерпретация Мак-Куллага движения тела в случае Эйлера* [5, 7]. В задаче о движении твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Эйлера известны два первых интеграла: интеграл кинетической энергии

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T$$

и интеграл кинетического момента

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2$$

Эти интегралы можно выразить через компоненты кинетического момента

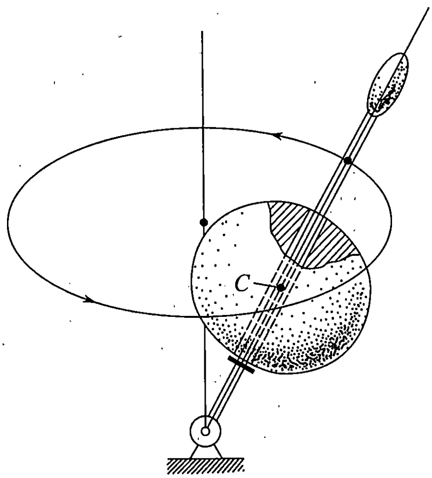
$$\frac{K_x^2}{A} + \frac{K_y^2}{B} + \frac{K_z^2}{C} = 2T, \quad K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = K^2$$

Вектор кинетического момента в теле движется вдоль кривых, являющихся пересечением жестко связанных с телом эллипсоида кинетической энергии и сферы кинетического момента. Поскольку вектор кинетического момента неподвижен в пространстве, то движение твердого тела представляет собой обкатывание эллипсоидом неподвижного конца K по линиям пересечения его со сферой (фиг. 2). Это и есть геометрическая интерпретация движения в случае Эйлера по Мак-Куллагу.

Такая интерпретация неполна, поскольку неопределенным остается положение тела вокруг вектора кинетического момента.

Для завершения рассматриваемой интерпретации можно заметить, что проекция скорости тела на ось кинетического момента постоянна, и для определения его положения вокруг этой оси можно воспользоваться теоремой 1. Действительно, всякий раз, при возвращении кинетического момента в ту же точку на траектории, тело оказывается повернутым на угол, равный интегралу от проекции угловой скорости на кинетический момент за это время плюс телесный угол описанного конуса[3].

[3] В статье Ричарда Монтгомери (How much does the Rigid Body Rotate? // Amer. J. Phys. 1991. V. 59. № 5. P. 394–398) этот результат установлен посредством анализа уравнений динамики в случае Эйлера, поэтому он доказан только для этого случая и только когда направляющей конуса является действительная траектория. Монтгомери не знал работы А.Ю. Ишлинского, ни Л.Е. Гудмана и А.Р. Робинсона. Не заметив чисто геометрического характера результата, он устанавливал его, исходя из уравнений динамики, неоправданно длинными рассуждениями.



Фиг. 3

Теорема о телесном угле позволяет получить и более общий результат. Положение твердого тела в любой точке траектории относительно его положения в некоторой начальной точке можно задать, условно замкнув траекторию дополнительным плоским поворотом.

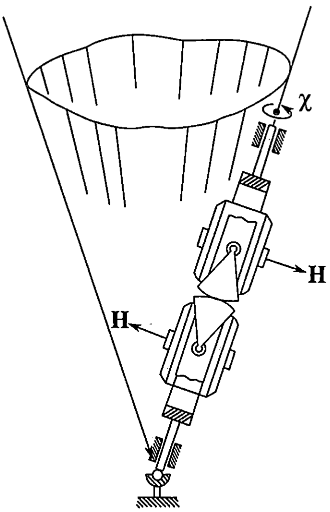
Тогда искомый телесный угол определяется площадью фигуры, ограниченной участком действительной траектории и воображаемой траекторией плоского поворота.

(B). Динамически симметричное твердое тело. В отличие от предыдущего примера, где твердое тело движется по инерции, в настоящем примере рассматривается динамически симметричное твердое тело, совершающее коническое вращение под действием управляющих моментов. Этот пример заимствован в [9]. На фиг. 3 изображено тело, насаженное на ось, являющуюся осью динамической симметрии. Трение предполагается отсутствующим, а центр масс лежащим на оси динамической симметрии. Обратимся к третьему уравнению из совокупности так называемых динамических уравнений Эйлера. При равенстве главных моментов инерции A и B оно имеет вид $Cdr/dt = M_z$. Выбрав $M_z \equiv 0$, получим $r = \text{const}$. Если теперь заставить ось, на которую насажено тело, совершить из положения покоя некоторое коническое движение, описав ею телесный угол S, то в конце такого движения вместе с осью остановится и тело. По отношению к первоначальному положению оно окажется повернутым на угол, вычисляемый по формуле (1.1), где $\omega(t) = r$.

Обратим еще раз внимание на то, что в этом примере направляющая конуса – произвольная кривая, а механическая система не является гамильтоновой, так что получить этот результат рассуждениями типа Ханнея, или Монтгомери, невозможно в принципе.

(C). Одноосный гиростабилизатор [1]. Одноосный гиростабилизатор, широко используемый в навигационной технике, предназначен для создания на подвижном объекте такой площадки, проекция угловой скорости которой на заданную ось была бы равна нулю независимо от движения основания.

Одноосный гиростабилизатор (фиг. 4) состоит из собранных в единой раме двух гироскопов с одинаковыми, но противоположно направленными кинетическими момента-



Фиг. 4

ми. Эти гироскопы связаны так, что при повороте всей конструкции в плоскости их кинетических моментов возникающие гироскопические моменты уравновешивают друг друга. Поэтому гироскопы не препятствуют повороту конструкции в этой плоскости. Также не встречает сопротивлений ее поворот вокруг оси, параллельной кинетическим моментам. Что касается оси общей рамы, то поворот вокруг нее невозможен, если кинетический момент гироскопов достаточно велик.

Как следует из теоремы о телесном угле, для того, чтобы такой поворот на самом деле отсутствовал, необходимо, чтобы ось стабилизации не совершала конического движения. Известны технические проекты, в которых незнание этой теоремы приводило к существенным ошибкам.

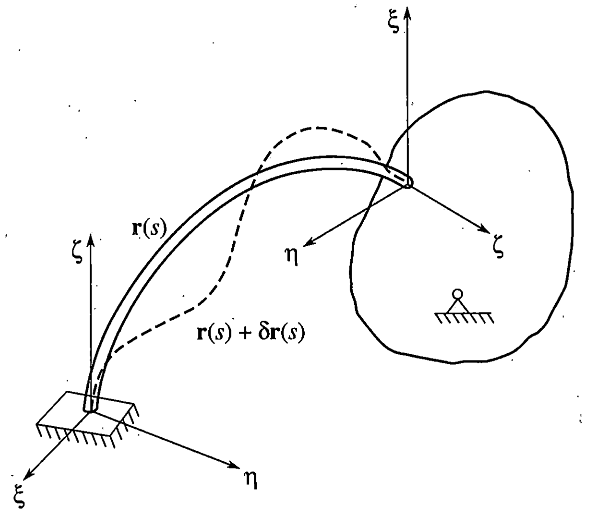
Следующие два примера имеют отношение к механике упругих систем. Известно, что в таких развитых абстракциях упругих систем, как стержни и оболочки вопросы чисто геометрического характера играют большую роль. А в тех случаях, когда уместно пользоваться такими предельными понятиями, как "абсолютно жесткий", "абсолютно гибкий" и т.п. геометрические вопросы вообще выходят на первый план.

(D). Пример реализации неголономной связи. Одним из примеров реализации неголономной связи, накладываемой на абсолютно твердое тело с одной неподвижной точкой, когда проекция мгновенной угловой скорости его на некоторую, жестко с ним связанную ось равна нулю, является рассмотренный в предыдущем примере одноосный гиростабилизатор. При этом следует иметь в виду, что такой пример точно реализует неголономную связь только при условии устремления кинетических моментов гироскопов к бесконечности и лишь при точном равенстве этих моментов друг другу.

В некоторых работах по неголономной механике рассматривался другой пример реализации неголономной связи такого типа (фиг. 5) при помощи гибкого стержня в предположении нулевой жесткости на изгиб и бесконечной жесткости на кручение (см. напр. [10]). Моделью такого стержня может быть цепочка достаточно большого числа достаточно малых кардановых узлов.

Этот пример реализации связи в отличие от выше упомянутого является ошибочным. При достаточно большой длине такого стержня он на самом деле не накладывает *никакой* связи на твердое тело.

Для того чтобы это показать введем сопровождающий трехгранник, связанный с рассматриваемым стержнем так. Оси ξ и η лежат в плоскости, перпендикулярной нейтральной линии стержня, ось ζ направлена по касательной к этой линии. Начальное сечение стержня выберем жестко связанным с основанием. В сечении стержня на поверхности тела ось ζ и есть та ось, в проекции на которую мгновенная угловая скорость тела должна, по мнению автора этого примера, обращаться тождественно в нуль. Основанием для такого мнения является условие бесконечной жесткости на кручение стержня. Однако это условие, как следует из дальнейшего, не ограничивает виртуальное перемещение тела вокруг оси ζ. Такое перемещение может быть осуществлено за счет вариации искривленной линии стержня. Действительно, пусть s – длина дуги нейтральной линии, отсчитываемой от основания. При $s = l$ (l – длина стержня) сечение принадлежит поверхности тела. Пусть $A(s)$ – ортогональная матрица, определяющая угловую ориентацию триэдра $\xi\eta\zeta$ в точке s относительно триэдра в точке $s = 0$, т.е. $A(0) = E$. Компоненты матрицы $A(s)$ представляют собой компоненты векторов ка-



Фиг. 5

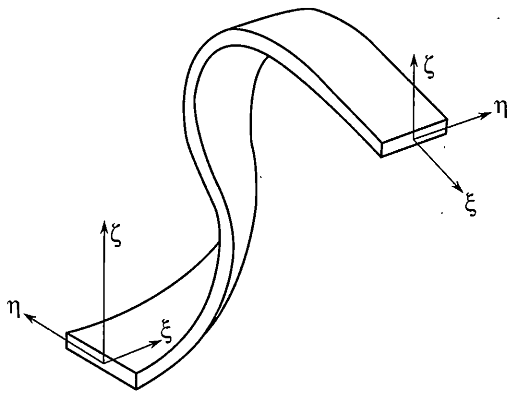
сательной, нормали и бинормали к средней линии стержня $\mathbf{r}(s)$ и вычисляются через производные от этой линии. Угловая скорость триэдра $\xi\eta\zeta$ в проекциях на его оси есть

$$\Omega = A^T\frac{dA(s)}{ds} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_\zeta & \omega_\eta \\ \omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ -\omega_\eta & \omega_\xi & 0 \end{Vmatrix}$$

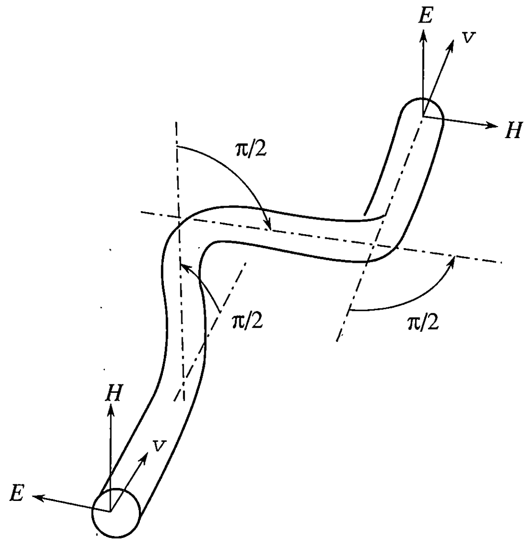
Проекция угловой скорости тела на ось ζ есть ω_ζ. Условие того, что жесткость стержня на скручивание равна бесконечности, эквивалентно тому, что $\omega_\zeta \equiv 0$. Это тождество представляет собой одно дифференциальное уравнение третьего порядка относительно трех компонент вектора $\mathbf{r}(s)$. Еще одно дифференциальное уравнение доставляет изопериметрическое условие $|d\mathbf{r}/ds| = 1$. К этим уравнениям для нахождения $\mathbf{r}(s)$ надо добавить два краевых условия $\mathbf{r}(0)$ и $\mathbf{r}(l)$. Общее решение такой задачи обладает функциональным произволом, в частности произвольной будет и ориентация трехгранника $\xi\eta\zeta$ вокруг оси ζ в точке $s = l$. Допустив вариацию траектории $\mathbf{r}(s) + \delta\mathbf{r}(s)$, получим приращение угла вокруг оси ζ, равное по теореме о телесном угле телесному углу описанного осью ζ конуса при перемещении триэдра вдоль $\mathbf{r}(s) + \delta\mathbf{r}(s)$ от $s = l$ до $s = 0$ с возвращением обратно вдоль $\mathbf{r}(s)$.

Таким образом, рассматриваемый пример неголономной связи был бы состоятелен, если бы факт, устанавливаемый теоремой о телесном угле, не имел бы места.

(Е). Гибкая лента. Еще один пример предельной абстракции упругой системы представляет собой нерастяжимая, гибкая лента (фиг. 6). Пусть ее средняя линия изогнута по некоторой пространственной кривой. Ориентация конечного сечения ленты по отношению к начальному может быть определена как ориентация связанных с этими сечениями триэдров. Если начальный триэдр перемещать вдоль средней линии так, чтобы вектор $\mathbf{i}$ был касательным к ней, а вектор $\mathbf{k}$ был расположен по нормали к ленте, то проекция угловой скорости трехгранника на ось $\mathbf{k}$ равна нулю (лента предполагается абсолютно жесткой в своей плоскости на изгиб и абсолютно гибкой в других направлениях). Если вектор $\mathbf{k}$ в конечном сечении совпадает с этим вектором в началь-



Фиг. 6



Фиг. 7

ном сечении, то поворот сечения вокруг него будет определяться теоремой о телесном угле.

(F). Волоконный световод. Пусть волоконный световод, по которому распространяется поляризованный луч света, произвольно изогнут (фиг. 7). С.М. Рытовым [11] было установлено, что при распространении света в среде с медленно изменяющимся от точки к точке показателем преломления угловая скорость трехгранника, образованного касательной к искривленному лучу, направлением электрического поля и направлением магнитного поля, направлена всегда перпендикулярно лучу.

Следовательно, проекция на касательную равна нулю и если начальное сечение световода параллельно конечному, то, как следует из теоремы о телесном угле, на выходе световода будет наблюдаться поворот плоскости поляризации по отношению к плоскости поляризации на входе на угол, равный телесному углу конуса, описанного касательной. На фиг. 7 касательная совершила три плоских поворота, каждый из них на угол $\pi/2$, описав восьмую часть сферы. Следовательно, поворот плоскости поляризации равен $\pi/2$.

Этот результат был установлен В.В. Владимирским [12], заметившим, что, поскольку производная единичного вектора электрического поля и единичного вектора магнитного поля направлены по касательной к лучу, то это соответствует параллельному перенесению этих векторов на единичной сфере по замкнутой кривой, которую вычерчивает эта касательная. Тем самым задача вычисления угла поворота плоскости поляризации, сводится к задаче Гаусса о сферическом избытке.

Таким образом, В.В. Владимирскому удалось, не пользуясь теоремой о телесном угле, получить интересующий его результат чисто геометрическим образом.

4. Заключение. Теорема о телесном угле, как это видно только из приведенных примеров, находит широкое применение, как в теоретических исследованиях, так и на практике. При этом далеко не очевидный эффект, устанавливаемый этой теоремой, часто является причиной ошибок в рассуждениях (пример реализации неголономной связи) и проектах. Так, изучение конических движений гиростабилизатора как раз и было стимулировано несоответствием того, что наблюдалось на практике, тому, что было целью проекта.

Эта теорема в формулировке А.Ю. Ишлинского, повторенной через несколько лет Л.Е. Гудманом и А.Р. Робинсоном, представляет собой теорему о частном интеграле кинематических уравнений Эйлера в случае конических вращений.

Теорема о телесном угле, сформулированная У.Р. Гамильтоном, представляет собой теорему о сложении замкнутой последовательности плоских поворотов. Теорема У.Р. Гамильтона близка теореме А.Ю. Ишлинского в том смысле, что она из теоремы А.Ю. Ишлинского легко следует. А вот попытка доказать теорему А.Ю. Ишлинского методами, примененными У.Р. Гамильтоном, встречает серьезные препятствия. На этот момент обращают внимание Л.Е. Гудман и А.Р. Робинсон.

Гораздо ближе к теореме А.Ю. Ишлинского стоит результат В.В. Владимирского, который эту теорему фактически доказал, однако не в общих терминах кинематики ортогональных триэдров, а в терминах рассматриваемой задачи о распространении поляризованного луча света.

Появившиеся совсем недавно в литературе попытки представить теорему о телесном угле следствием теоремы о так называемой "геометрической адиабатической фазе" (фаза Берри или угол Ханная) всерьез восприниматься не могут. И дело не только в том, что эта фаза вычисляется весьма грубо для крайне узкого класса систем (почти интегрируемые гамильтоновы системы), тогда как системы, где применяется *точная* теорема о телесном угле неизмеримо шире. Дело в том, что в этих теоремах речь идет о *разных предметах* и теорема о телесном угле *принципиально* не может быть получена из теоремы о геометрической адиабатической фазе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования (грант Т02-140-1296).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Механика специальных гироскопических систем. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. 432 с.; 2-е изд. Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
2. *Hamilton W.R.* Lectures on quaternions. Dublin: Hodges and Smith, 1853. 736 p.
3. *Goodman L.E., Robinson A.R.* Effect of finite rotations on gyroscopic sensing devices // J. Appl. Mech. 1958. V. 25. № 2. P. 210–213.
4. *Hannay J.H.* Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian // J. Phys. A: Math. Gen. 1985. V. 18. № 2. P. 221–230.
5. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. 2-е изд. М.: Физматлит, 2001. 319 с.
6. *Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф.* О некоторых свойствах конечных поворотов твердого тела при наличии неголономной связи // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 1. С. 9–14.
7. *Журавлев В.Ф.* Теорема о телесном угле в динамике твердого тела // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 323–326.
8. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
9. *Ишлинский А.Ю.* Прикладные задачи механики. Т. 2. М.: Наука, 1986. 415 с.
10. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
11. *Рытов С.М.* О переходе от волновой к геометрической оптике // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. № 4–5. С. 263–266.
12. *Владимирский В.В.* О вращении плоскости поляризации в искривленном световом луче // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. № 3. С. 222–225.

Москва

Поступила в редакцию
15.01.2004