

КАЧЕНИЕ И СКОЛЬЖЕНИЕ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРА ПО ГРАНИЦЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

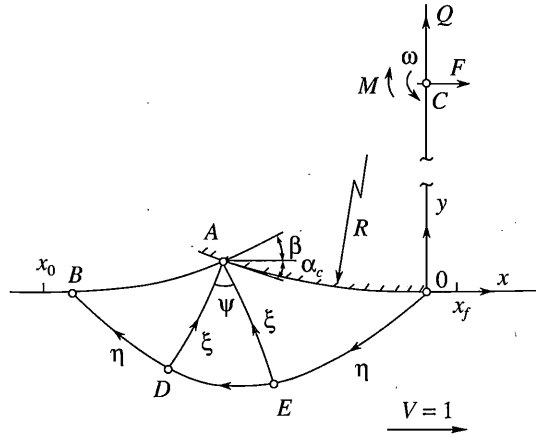
Получено численное решение задачи о стационарном плоском пластическом течении жесткопластического полупространства при качении и скольжении по границе гладкого и шероховатого жесткого цилиндра. Показано изменение формы пластической области и дуги контакта в зависимости от сил и момента, приложенных к цилиндру. Получены предельные значения дуги контакта при которых возможно стационарное пластическое течение в зависимости от величины и направления касательных напряжений контактного трения. Задача представляет интерес для теории трения качения и технологии поверхностного пластического деформирования материала прокаткой и волочением.

1. Введение. Задача о качении жесткого цилиндра по границе деформируемого полупространства имеет фундаментальное значение для моделирования трения качения. Качение жесткого цилиндра по вязкоупругому и идеально упругому полупространству с учетом проскальзывания моделируется в [1, 2]. В модели [1] сила сопротивления качению вызвана несимметричным распределением давления на цилиндр, которое зависит от вязкости материала. В модели [2] сила сопротивления качению обусловлена проскальзыванием цилиндра в зоне контакта и трением скольжения по закону Амонтона – Кулона.

При качении жесткого цилиндра по границе несжимаемого жесткопластического полупространства перед цилиндром возникает стационарная пластическая область, показанная на фиг. 1 [3]. Ось цилиндра принимаем неподвижной, а полупространство движущимся с единичной скоростью $V = 1$. Вдоль жесткопластической границы $OEDB$ скорость непрерывна. При стационарном пластическом течении границы AB и OA являются линиями тока, касательные к которым в точках B и O направлены по границе полупространства. Поэтому нижняя точка O цилиндра находится на границе полупространства. Отсутствие на дуге контакта точки или конечной зоны прилипания, разделяющей зоны контакта с противоположными направлениями скольжения, обосновано в [3] и согласуется с анализом таких зон для упругой модели полупространства в [2].

Качение гладкого цилиндра по границе жесткопластического полупространства анализируется в [3] методом малого параметра для малой дуги контакта цилиндра с пластической областью. Приближенный анализ качения цилиндра по жесткопластическому полупространству с заменой дуги контакта хордой приведен в [4]. Обзоры исследований по проблеме трения качения приведены в [1–4].

Известны расчеты качения цилиндра без скольжения по границе упругопластического полупространства методом конечных элементов [5, 6]. Однако, большие деформации, возникающие в зоне пластического контакта, проблема неизвестной стационарной границы пластической области и сингулярность полей напряжения и скоростей перемещений в точке пересечения свободной пластической границы с цилиндром существенно затрудняют упругопластическое моделирование качения и скольжения цилиндра.



Фиг. 1

В публикуемой работе задача о качении и скольжении жесткого гладкого и шероховатого цилиндра по границе жесткопластического полупространства решается на основе теории идеальной пластичности [7]. Рассматривается стационарное пластическое течение с образованием криволинейной свободной границы перед цилиндром. Показано, что определение свободной границы и всей пластической области сводится к решению нелинейного векторного уравнения относительно распределения давления на границе контакта. Решение задачи получено численным методом. Определены предельные значения дуги контакта, сил и моментов, действующих на цилиндр, при которых пластическое течение стационарно. Для шероховатого цилиндра рассмотрены два варианта задачи с изменением направления контактного трения в зависимости от направления скольжения материала по границе контакта с цилиндром.

Задача о качении и скольжении жесткого цилиндра по границе пластического полупространства имеет важное значение для технологических процессов пластического деформирования при прокате и волочении толстых заготовок, когда пластические деформации возникают только в поверхностном слое и не проникают через толщину заготовки. Для технологических приложений написаны численные процедуры расчета линий тока, накопленной пластической деформации материальных частиц и искривления координатной сетки при движении материальных частиц по линиям тока.

2. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим качение жесткого цилиндра радиуса R по границе жесткопластического полупространства (фиг. 1). К цилиндру приложены силы F и Q и момент M , которые определяются распределением нормальных и касательных напряжений на дуге контакта с углом α_c . Скорость оси цилиндра V и дугу контакта $R\alpha_c$ принимаем за характерную скорость и длину соответственно. Напряжения будем считать безразмерными, принимая за характерное напряжение удвоенное значение предела текучести идеально пластического материала при чистом сдвиге $2k = 1$. Введем систему координат $\{x, y\}$ с началом в точке O , которая перемещается вместе с осью цилиндра. В этих координатах ось цилиндра и граница AB пластической области неподвижны, а пластическое полупространство движется со скоростью $V = 1$.

При отсутствии скольжения относительно полупространства в точке O цилиндр вращается с угловой скоростью ω , которая удовлетворяет соотношению $\omega R = 1$. В этом случае скорость скольжения пластического материала относительно цилиндра

ра V_c и касательные напряжения контактного трения τ_c направлены от точки O к точке A и момент $M > 0$. Если $\omega R < 1$ и величина ω мала настолько, что V_c и τ_c направлены от точки A к точке O , то $M < 0$. Для гладкого цилиндра $\tau_c = 0$ и $M = 0$. В этом случае сила сопротивления качению F вызвана только асимметрией пластической области. Таким образом, в зависимости от величины и направления контактного трения τ_c будем рассматривать три случая.

1. Качение и скольжение гладкого цилиндра: $\tau_c = 0, M = 0, 0 \leq \omega R \leq 1$.

2. Качение шероховатого цилиндра с передним скольжением: $\tau_c > 0, M > 0, \omega R = 1$.

3. Качение шероховатого цилиндра с задним скольжением: $\tau_c < 0, M < 0, 0 \leq \omega R < V_c$.

Правая часть последнего неравенства известна после вычисления поля скоростей.

В пластической области должны выполняться соотношения Генки и Гейрингер вдоль линий скольжения ξ и η :

$$d\sigma - d\varphi = 0 \text{ вдоль } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = 0 \text{ вдоль } \eta \quad (2.1)$$

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \text{ вдоль } \xi, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = 0 \text{ вдоль } \eta \quad (2.2)$$

где σ – среднее напряжение, φ – угол наклона касательной к линии скольжения ξ с осью x и V_ξ, V_η – проекции вектора скорости на ξ и η . Дифференциальные уравнения линий скольжения имеют вид

$$dy/dx = \operatorname{tg} \varphi \text{ для } \xi \text{ и } dy/dx = -\operatorname{ctg} \varphi \text{ для } \eta \quad (2.3)$$

Вдоль свободной границы AB известны главные напряжения $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1$ и $\sigma = -1/2$. Граница AB совпадает с линией тока и направлением σ_2 :

$$\operatorname{tg}(\varphi - \pi/4) = V_y/V_x, \quad \sigma = -1/2 \text{ на } AB \quad (2.4)$$

где V_x и V_y – проекции вектора скорости на оси координат x и y , связанные с V_ξ и V_η соотношениями

$$V_x = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_y = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi \quad (2.5)$$

Из условия непрерывности скоростей вдоль жесткопластической границы $O - B$ и соотношений (2.5) находим

$$V_\xi = \cos \varphi, \quad V_\eta = -\sin \varphi \text{ на } O - B \quad (2.6)$$

Линии скольжения пересекают границу контакта OA под углом θ , который определяется напряжением контактного трения τ_c :

$$\theta = 1/2 \arccos 2\tau_c, \quad 0 \leq \tau_c \leq 1/2 \quad (2.7)$$

Если цилиндр гладкий, то линии скольжения ξ и η пересекают границу OA под углом $\pi/4$ и угол φ определяется соотношением

$$\varphi = 3\pi/4 - \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_c \text{ на } OA \quad (2.8)$$

где α – угол наклона касательной к границе цилиндра OA и осью Ox .

При качении шероховатого цилиндра с передним скольжением угол θ образуется между линией скольжения ξ и касательной к OA . При заднем скольжении угол θ образуется между линией скольжения η и касательной к OA . Поэтому угол φ зависит от направления скольжения материала относительно поверхности цилиндра

$$\varphi = \pi - \alpha - \theta, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_c \text{ на } OA \quad (2.9)$$

при переднем скольжении или

$$\varphi = \pi/2 + \theta - \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_c \text{ на } OA \quad (2.10)$$

при заднем скольжении.

Скорость по нормали к границе цилиндра равна нулю. Отсюда получаем кинематические граничные условия на границе контакта OA :

$$V_\xi = V_\eta \text{ на } OA \quad (2.11)$$

для гладкого цилиндра, или

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{ctg} \theta, \quad V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \theta \text{ на } OA \quad (2.12)$$

для шероховатого цилиндра при переднем и заднем скольжении соответственно.

Поле линий скольжения и соответствующее ему поле скоростей можно построить только для положительных значений угла ψ центрированного веера в точке A , который определяется соотношениями

$$\psi = \pi/2 - (\alpha_c + \beta) \quad (2.13)$$

для гладкого цилиндра и

$$\psi = 3\pi/4 - (\alpha_c + \beta + \theta) \quad (2.14)$$

или

$$\psi = \pi/4 + \theta - (\alpha_c + \beta) \quad (2.15)$$

для шероховатого цилиндра при переднем и заднем скольжении соответственно. В последних соотношениях β – угол наклона касательной к границе AB в точке A :

$$\beta = \operatorname{arctg}(V_y/V_x)_A \quad (2.16)$$

который становится известным после вычисления поля линий скольжения и поля скоростей. Среднее напряжение в точке O находим из уравнения Генки (2.1) для η линии скольжения $O - B$ и соотношений (2.7)–(2.10) при $\alpha = 0$.

Для гладкого цилиндра

$$\sigma_0 = -1/2(1 + \pi) \quad (2.17)$$

При этом значении σ_0 жесткий клин с вершиной в точке O нагружен до предельного пластического состояния. Для шероховатого цилиндра находим

$$\sigma_0 = -1/2(1 + 3\pi/2) + \theta \quad (2.18)$$

$$\sigma_0 = -1/2(1 + \pi/2) - \theta \quad (2.19)$$

при переднем и заднем скольжении соответственно.

Выражение (2.18) показывает, что при переднем скольжении несущая способность жесткого клина в точке O выполняется, если в этой точке $\tau_c = 0$ ($\theta = \pi/4$), поэтому в этом случае пластическую область, показанную на фиг. 1, можно построить только при переменном τ_c с нулевым значением в точке O . В публикуемой работе принималось линейное изменение τ_c с максимальным значением в точке A . Приводимые ниже результаты численного решения показывают приближенную пропорциональную зависимость между τ_c и скоростью скольжения V_c , что позволяет трактовать переменные значения τ_c как вязкое сопротивление сдвигу пограничного слоя материала на

границе контакта цилиндра с пластической областью. Такая зависимость качественно подтверждается экспериментальными измерениями напряжений контактного трения при прокатке толстых заготовок [8]. При заднем скольжении несущая способность жесткого клина в точке O выполняется при всех значениях τ_c , которое принимаем постоянным на границе контакта OA .

Среднее напряжение σ снижается по абсолютной величине вдоль границы контакта OA , и в точке A принимает значение, зависящее от угла ψ :

$$\sigma_A = -1/2(1 + 2\psi) \quad (2.20)$$

Силы и момент, действующие на цилиндр, определяются распределением нормальных σ_n и касательных τ_c напряжений на дуге контакта OA :

$$Q = \frac{1}{\alpha_c} \int_0^{\alpha_c} [(-\sigma_n) \cos \alpha \pm \tau_c \sin \alpha] d\alpha \quad (2.21)$$

$$F = \frac{1}{\alpha_c} \int_0^{\alpha_c} [(-\sigma_n) \sin \alpha \mp \tau_c \cos \alpha] d\alpha \quad (2.22)$$

$$M = \pm \frac{1}{2} \int_0^{\alpha_c} \tau_c d\alpha \quad (2.23)$$

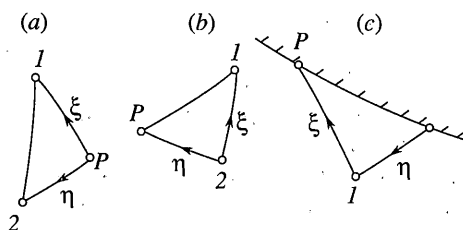
где верхние и нижние знаки относятся к переднему и заднему скольжению соответственно и нормальное напряжение определяется распределением σ по границе контакта

$$\sigma_n = \sigma - 1/2 \sin 2\theta \quad (2.24)$$

Для гладкого цилиндра $\sigma_n = \sigma - 1/2$, $M = \tau_c = 0$. Для шероховатого цилиндра при переднем скольжении и линейном изменении τ_c из (2.23) находим $M = 1/2(\tau_c)_A/\alpha_c$, и при заднем скольжении $M = -\tau_c/\alpha_c$.

Соотношения (2.4), (2.13)–(2.16) показывают, что задача о качении и скольжении цилиндра требует совместного вычисления полей напряжений и скоростей. Эта задача приводит к нелинейному операторному уравнению относительно распределения среднего напряжения на границе контакта OA .

Пусть на границе OA задано непрерывное распределение σ с учетом известных значений (2.17)–(2.19) в точке O . Тогда σ и граничные условия (2.7)–(2.10) определяют данные Коши для уравнений (2.1), (2.3) и позволяют найти поле линий скольжения в области OAE . В области AED поле линий скольжения находим из решения задачи Гурса с данными σ и φ на AE и в особой точке A с углом веера ψ , который определяется соотношением (2.20). В области ABD решаем обратную задачу Коши по значениям σ и φ на AD и условиям $\sigma = -1/2$, $dy/dx = \operatorname{tg}(\varphi - \pi/4)$ на границе AB . В результате находим неизвестную свободную границу AB и границу пластической области $O - B$. Затем вычисляем поле скоростей из решения смешанной краевой задачи для уравнений (2.2) и граничных условий (2.6), (2.11), (2.12). Если на границе AB выполняется условие стационарности течения (2.4), то распределение σ на OA является решением задачи. Так как приведенная последовательность решения краевых задач однозначно определяет поле линий скольжения с неизвестной границей AB и поле скоростей в зависимости от рас-



Фиг. 2

пределения σ на OA , то соотношение (2.4) является определяющим уравнением для неизвестного распределения σ на OA , которое можно записать в операторном виде

$$\Phi(\sigma) \equiv \operatorname{tg}(\varphi - \pi/4) - V_y/V_x = 0 \text{ на } AB \quad (2.25)$$

где Φ – алгоритм вычисления границы AB и скоростей на этой границе. При численной реализации алгоритма распределение σ задается в конечном числе узловых точек на границе контакта. При этом (2.25) представляет нелинейное векторное уравнение относительно вектора σ компоненты которого равны значениям σ в узловых точках на границе OA .

3. Численное решение. Исходными данными задачи принимаем угол контакта α_c и величину контактного трения τ_c . Для вычисления поля линий скольжения и поля скоростей при заданном распределении σ на границе OA используем приведенные в [9, 10] алгоритмы решения задачи Коши, Гурса и смешанного типа с включением процедур расчета координат узловых точек линий скольжения и значений σ , φ , V_ξ и V_η на основе конечноразностной аппроксимации дифференциальных соотношений (2.1)–(2.3) с использованием граничных условий приведенных в п. 2.

В регулярных узлах сетки линий скольжения решаем элементарные задачи Коши с известными значениями σ , φ , V_ξ и V_η в точках 1 и 2 на линиях скольжения ξ и η в окрестности неизвестной точки P (фиг. 2, а). Из соотношений (2.1) находим σ и φ :

$$\sigma = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2 - \varphi_1 + \varphi_2), \quad \varphi = 1/2(\varphi_1 + \varphi_2 - \sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.1)$$

а затем из уравнений (2.3) находим координаты точки P по средним значениям углов φ между точками 1 – P и 2 – P :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= 1/2(\varphi_1 + \varphi), \quad \tilde{\varphi}_2 = 1/2(\varphi_2 + \varphi) \\ x &= [y_2 - y_1 + x_1 \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_1 + x_2 \operatorname{ctg} \tilde{\varphi}_2] / (\operatorname{tg} \tilde{\varphi}_1 + \operatorname{ctg} \tilde{\varphi}_2) \\ y &= [x_2 - x_1 + y_1 \operatorname{ctg} \tilde{\varphi}_1 + y_2 \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_2] / (\operatorname{tg} \tilde{\varphi}_2 + \operatorname{ctg} \tilde{\varphi}_1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

если $\tilde{\varphi}_1 \neq \pi/2$ и $\tilde{\varphi}_2 \neq \pi/2$

или $x = x_1, \quad y = y_2$ если $\tilde{\varphi}_1 = \pi/2$ или $\tilde{\varphi}_2 = \pi/2$

где нижние индексы 1 и 2 относятся к значениям переменных в точках 1 и 2. Скорости V_ξ и V_η находим из соотношений (2.2) при известном значении φ в точке P :

$$\begin{aligned} V_\xi &= [V_\xi^1 + (V_\eta^1 + V_\eta^2)a_1 - V_\xi^2 a_1 a_2] / (1 + a_1 a_2) \\ V_\eta &= [V_\eta^2 - (V_\xi^1 + V_\xi^2)a_2 - V_\eta^1 a_1 a_2] / (1 + a_1 a_2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$a_1 = 1/2(\varphi - \varphi_1), \quad a_2 = 1/2(\varphi - \varphi_2)$$

где верхние индексы 1 и 2 относятся к значениям скоростей в точках 1 и 2.

Свободную границу AB получаем из решения последовательности элементарных обратных задач Коши (фиг. 2, b) от начальной точки A . В точках 1 и 2 на линии скольжения ξ значения σ и φ известны, причем точка 1 принадлежит границе AB , совпадающей со вторым главным напряжением. В точках 1 и P границы AB $\sigma = -1/2$. Из соотношений (2.1) для ξ линии 1–2 и для η линий 2 – P находим φ в точке P :

$$\varphi = 2\varphi_2 - \varphi_1 \quad (3.4)$$

Координаты точки P находим из дифференциального уравнения границы AB :

$$dy/dx = \operatorname{tg}(\varphi - \pi/4)$$

и дифференциального уравнения η линии (2.3), принимая средние углы наклона касательных между точками 1 – P и 2 – P :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= 1/2(\varphi_1 + \varphi) - \pi/4 \text{ и } \tilde{\varphi}_2 = 1/2(\varphi_2 + \varphi) \\ x &= [y_2 - y_1 + x_1 \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_1 + x_2 \operatorname{ctg} \tilde{\varphi}_2] / (\operatorname{tg} \tilde{\varphi}_1 - \operatorname{ctg} \tilde{\varphi}_2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$y = y_1 + (x - x_1) \operatorname{tg} \tilde{\varphi}_1$$

Скорости V_ξ и V_η на границе OA находим из решения смешанной задачи (фиг. 2, c) для соотношения (2.2) вдоль ξ линии 1 – P и граничных условий (2.11), (2.12):

$$\begin{aligned} V_\xi &= [V_\xi^1 + 1/2 V_\eta^1 (\varphi - \varphi_1)] / [1 - 1/2 a (\varphi - \varphi_1)] \\ V_\eta &= a V_\xi \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $a = 1$ для гладкого цилиндра, $a = \operatorname{tg} \theta$ при переднем скольжении и $a = \operatorname{ctg} \theta$ при заднем скольжении для шероховатого цилиндра. Верхние и нижние индексы 1 в (3.6) обозначают известные скорости и угол φ в точке 1.

Уравнения (3.1)–(3.6) линейны вследствие линейности дифференциальных соотношений (2.1) и (2.2). Поэтому вычисление весьма детальной сетки линий скольжения и поля скоростей на ПЭВМ Pentium-133 для заданного распределения σ в 20 узловых точках на границе OA выполняется за доли секунды.

Обозначим вектором σ неизвестные значения σ в N узловых точках на границе OA , и вектором f – разности углов наклона касательной к границе AB и вектора скорости в N узловых точках этой границы, представляющие погрешности условия стационарности (2.4). Алгоритм вычисления поля линий скольжения и поля скоростей определяет непрерывную зависимость f от σ , и операторное уравнение (2.25) принимает вид нелинейного векторного уравнения размерности N :

$$f(\sigma) = 0 \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) решаем методом Бroyдена [11], который представляет обобщение метода секущих для нелинейного уравнения с одной переменной на конечномерное векторное пространство. Итерационная процедура метода Бroyдена и условия его сходимости приведены в [12]. Вычислительная эффективность метода Бroyдена применительно к гиперболическим задачам плоского пластического течения с кинематическими граничными условиями показана в [13].

Начальное приближение σ^0 задавали линейным распределением σ на OA от известных значений (2.17)–(2.19) в точке O до значения (2.20) в точке A , принимая начальное приближение для угла $\beta = c\alpha$, где $c > 1$. Функциональную матрицу $\partial f_i / \partial \sigma_j$ в начальной точке σ^0 находили методом конечных разностей, решая N задач для вариаций σ^0 .

При качении и скольжении гладкого цилиндра с малыми углами контакта α_c поле линий скольжения приближается к несимметричному полю Прандтля для гладкого плоского штампа с постоянным распределением σ на OA и нулевыми скоростями в пластической области. В этом случае уравнение (3.7) решается на 1–2 итерации с точностью $|f|_{\max} \leq 10^{-5}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) при $c = 1$. Увеличение параметра c при увеличении дуги контакта обеспечивало такую же точность решения уравнения (3.7) при малом числе итераций. При этом условие $y = 0$ в точке B выполняется с точностью 10^{-6} .

4. Линии тока и искривление координатной сетки. Для технологических приложений представляет интерес распределение деформаций в пластической области и по толщине деформированного слоя, образуемого за цилиндром. С этой целью написаны вычислительные процедуры для расчета линий тока и искривления первоначально ортогональной координатной сетки при движении материальных частиц через пластическую область, которые работают после решения уравнения (3.7).

Линии тока вычисляли от начальной ортогональной к границе полупространства вертикальной линии $x_0 < x_B$ до конечной вертикальной линии $x_f > 0$ справа от точки O (фиг. 1). Первая линия тока проходит в жесткой области и касается жесткопластической границы в ее нижней точке. Последняя линия тока совпадает с границей полупространства при $x_0 < x_B$ и $x_f > 0$ и с границами BA и AO пластической области. Промежуточные линии тока задавали значениями координаты $-h < y < 0$ на линии $x_0 = \text{const}$, где h – глубина пластической области.

В жесткой области линии тока – прямые, параллельные границе полупространства, пересечение которых с передней жесткопластической границей определяет начальные точки криволинейных линий тока в пластической области, где линии тока находили численным интегрированием дифференциального уравнения

$$dy/dx = V_y/V_x \quad (4.1)$$

совместно с дифференциальными уравнениями (2.3) линий скольжения в поле скоростей, заданном числовыми значениями вектора скорости в узловых точках линий скольжения. Дифференциальное уравнение (4.1) заменяли конечноразностным соотношением и скорости – их средними значениями на малом сегменте линии тока. Узловые точки линии тока находили на пересечении прямой, проведенной из известной начальной точки, с ближайшим сегментом ξ и η линий скольжения. Вектор скорости в найденной точке определяли линейной интерполяцией по известным скоростям в узловых точках соответствующего сегмента линий скольжения. Затем найденную точку рассматривали как начальную на следующем шаге интегрирования линии тока до пересечения ею задней жесткопластической границы, после которой линии тока вновь становятся параллельными прямыми.

По известным значениям вектора скорости в узловых точках линий тока вычисляли эффективную скорость деформации по соотношению [7]:

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{1}{2} \frac{V^2}{V_\xi V_\eta} \frac{dV}{ds} \quad (4.2)$$

где V – модуль вектора скорости, и производная dV/ds вычисляется вдоль линии тока. Соотношение (4.2) контролирует также условие неотрицательности диссипативной функции $\dot{\epsilon}_e \geq 0$, которая для всех вариантов задачи положительна. Из (4.2) с помощью соотношений $d\epsilon_e = \dot{\epsilon}_e dt$, $dt = ds/V$ находим приращение накопленной эффективной деформации

$$d\epsilon_e = \frac{1}{2} \frac{V}{V_\xi V_\eta} dV \quad (4.3)$$

Соотношение (4.3) определяет конечное приращение ϵ_e при переходе от свободной границы AB к границе контакта OA в сингулярной точке A . В остальной области накопления деформация является непрерывно возрастающей функцией при движении материальных частиц вдоль линий тока.

Искривление первоначально вертикальной координатной линии, ортогональной к границе полупространства, вызванное неоднородностью скоростей перемещений в пластической области, вычисляем следующим образом.

Время перемещения материальной частицы вдоль линии тока из начальной точки с координатой x_0 в текущую точку с координатной x определяется интегралом

$$T = \int_{x_0}^x \frac{dx}{V_x(x)} \quad (4.4)$$

Узловые точки линий тока находятся на пересечениях со всеми линиями скольжения, которые сгущаются в окрестности сингулярной точки A . Концентрация узловых точек линий тока адекватно учитывает высокие градиенты скоростей, поэтому изменение скорости между соседними узловыми точками i и $i + 1$ с достаточной точностью можно аппроксимировать линейной зависимостью

$$V_x(x) = a_i x + b_i \quad (4.5)$$

где a_i и b_i – константы, зависящие от сегмента $i, i + 1$ линии тока.

В пластической области $a_i \neq 0$, что позволяет найти из (4.4) и (4.5) время перемещения материальной частицы вдоль линии тока из узла i в узел $i + 1$:

$$\Delta T_i = \frac{1}{a_i} \ln[(a_i x_{i+1} + b_i)/(a_i x_i + b_i)] \quad (4.6)$$

В жесткой области $a_i = 0, V_x = 1$, и время перемещения равно шагу прямоугольной координатной сетки по оси x :

$$\Delta T_i = x_{i+1} - x_i = \Delta x \quad (4.7)$$

Суммирование приращений времени ΔT_i вдоль каждой линии тока с номером j дает значения времени перемещения T_j материальной частицы от сечения x_0 до сечения x_j :

$$T_j = \sum \Delta T_i \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.8)$$

Для первой линии тока, проходящей в жесткой области, из соотношения (4.7) находим $T_1 = x_f - x_0$. Другие линии тока проходят через пластическую область, в которой модуль скорости $V < 1$. Из интеграла (4.4) следует неравенство $T_j > T_1$ при $j > 1$. Обозначим через T_0 время движения материальной частицы по линии тока, совпадающей с границей полупространства и границей OAB пластической области. Так как скорость жесткой области равна единице, то конечное положение первоначальной вертикальной координатной линии сетки определяется координатами

$$x_j = x_f + (T_0 - T_j), \quad -h \leq y_j \leq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.9)$$

Для вычисления искривления координатной сетки между сечениями $x_0 = \text{const}$ и $x_f = \text{const}$ разделим значение T_0 на n интервалов. Для каждой линии тока j по соотношениям (4.6)–(4.8) находим интервал $i, i + 1$, удовлетворяющий неравенству

$$(T_j)_i < T_k < (T_j)_{i+1}, \quad T_k = kT_0/n \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1) \quad (4.10)$$

и из соотношений (4.6) или (4.7) находим координаты x_j материальной частицы при перемещении вдоль линии тока j от начальной линии $x_0 = \text{const}$ за время T_k :

$$x_j = \frac{1}{a_i} \{ (a_i x_i + b_i) \exp[a_i(T_k - T_j) - b_i] \}, \text{ если } a_i \neq 0 \quad (4.11)$$

или $x_j = x_i + T_k - T_j$, если $a_i = 0$

Соответствующую координату y_j находим по значению x_j линейной интерполяцией между узловыми точками i и $i + 1$ линии тока j .

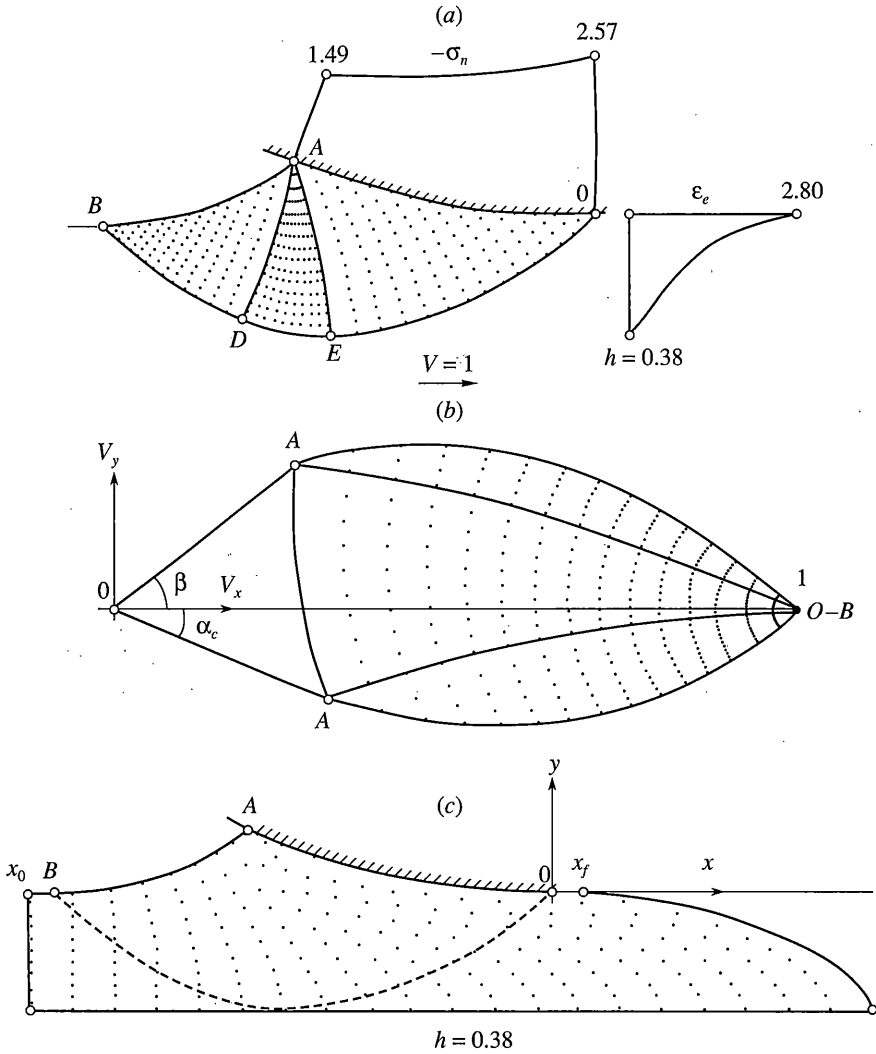
Приведенный алгоритм вычисления линий тока и искривления координатной сетки определяет связь лагранжевых координат материальных частиц с эйлеровыми координатами, в которых получено решение задачи пластического течения, и описывает деформированное состояние материала в пластической области.

5. Численные результаты. 5.1. Качение и скольжение гладкого цилиндра. На фиг. 3 показан пример расчета поля линий скольжения с распределением контактного давления $-\sigma_n$ и накопленной деформации ϵ_e по толщине пластического слоя за цилиндром (*a*), годографа скоростей (*b*) и деформированной сетки (*c*) при качении и скольжении гладкого цилиндра с углом контакта $\alpha_c = 0.4$. Для гладкого цилиндра граничные условия для напряжений и скоростей не зависят от вращения цилиндра, и полученные решения справедливы при качении и скольжении цилиндра по границе полупространства с угловой скоростью $0 \leq \omega R \leq 1$. С увеличением α_c угол центрированного веера ψ приближается к нулю, область *AED* на физической плоскости стягивается в линию, дуга *A-A* на годографе скоростей, соответствующая особой точке *A*, стремится к неподвижной точке *O*. Таким образом, при $\psi \rightarrow 0$ скорость вдоль свободной границы *AB* уменьшается от 1 в точке *B* до 0 в точке *A* с последующим возрастанием от 0 до 1 вдоль границы цилиндра от точки *A* к точке *O*. Для гладкого цилиндра получено предельное значение $\alpha_c^* \approx 0.453$. При $\alpha_c \rightarrow 0$ получаем скольжение плоского гладкого штампа Прандтля по границе полупространства при отсутствии пластических деформаций и горизонтальной силы *F*.

В таблице приведены результаты расчетов сил сопротивления качению гладкого цилиндра *Q* и *F*, толщины пластического слоя *h* и максимального значения накопленной деформации ϵ_e на границе полупространства за цилиндром в зависимости от угла контакта $\alpha_c < \alpha_c^*$. Так как за характерный размер принята дуга контакта $\alpha_c R = 1$, то силы *Q* и *F* представляют проекции среднего давления на дуге контакта. Момент $M = 0$, так как $\tau_c = 0$. При малых углах контакта $\alpha_c < 0.2$ коэффициент сопротивления качению $f = F/Q \approx \alpha_c/2$ и не зависит от *R*. При приближении к предельному значению α_c^* относительная толщина пластического слоя *h* уменьшается, а неоднородность распределения деформации ϵ_e быстро возрастает вследствие низких скоростей в окрестности сингулярной точки *A*.

Таблица

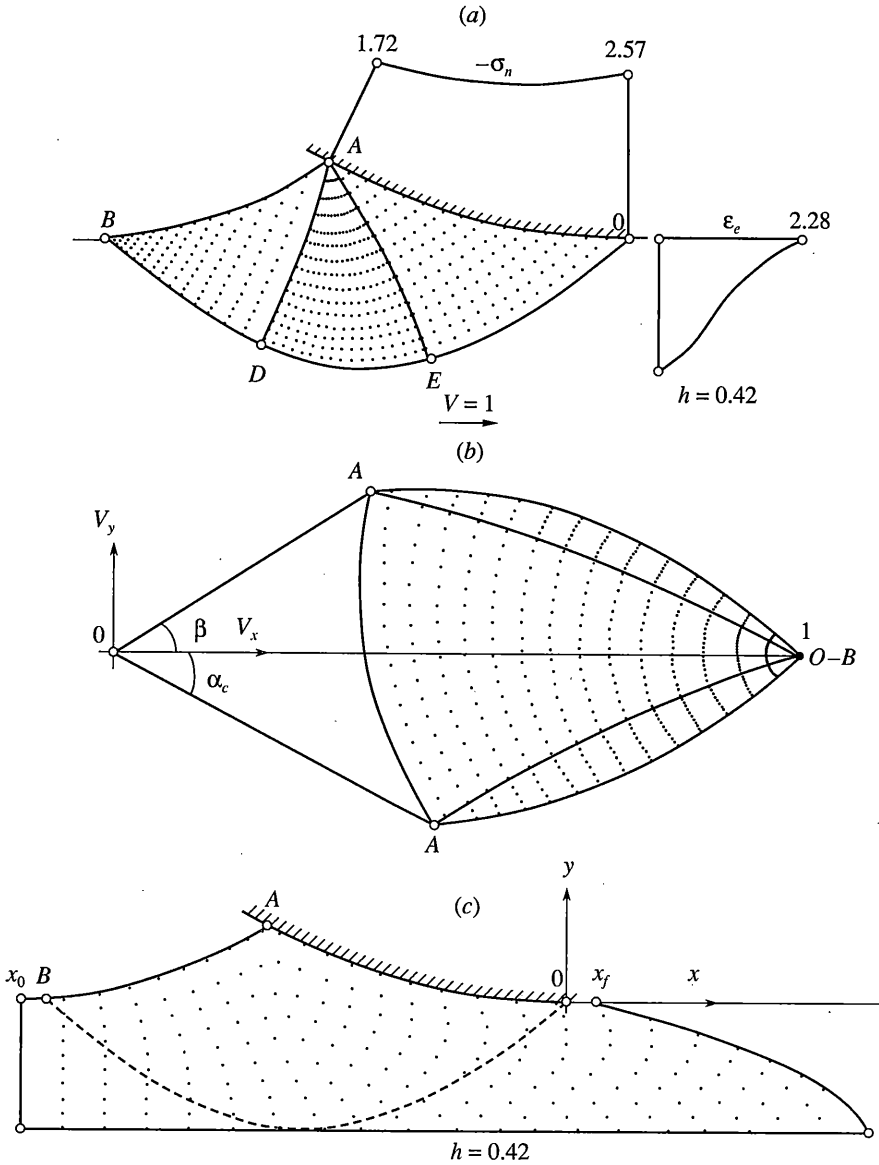
α_c	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45
<i>Q</i>	2.464	2.342	2.205	2.049	1.958
<i>F</i>	0.122	0.228	0.315	0.380	0.399
<i>h</i>	0.625	0.544	0.461	0.377	0.335
ϵ_e	0.365	0.840	1.522	2.800	5.040



Фиг. 3

5.2. Качение шероховатого цилиндра с передним скольжением. На фиг. 4 приведено поле линий скольжения с распределениями контактного давления $-\sigma_n$ и деформации ϵ_e по толщине пластического слоя за цилиндром (a), годограф скоростей (b) и деформированная сетка (c) при качении шероховатого цилиндра без скольжения в точке O для угла контакта $\alpha_c = 0.5$ и линейного распределения τ_c с максимальным значением $(\tau_c)_A = 0.3$ в точке A. Это вариант задачи с передним скольжением при $\omega R = 1$ без проскальзывания в точке O с моментом сопротивления качению $M = 0.30$.

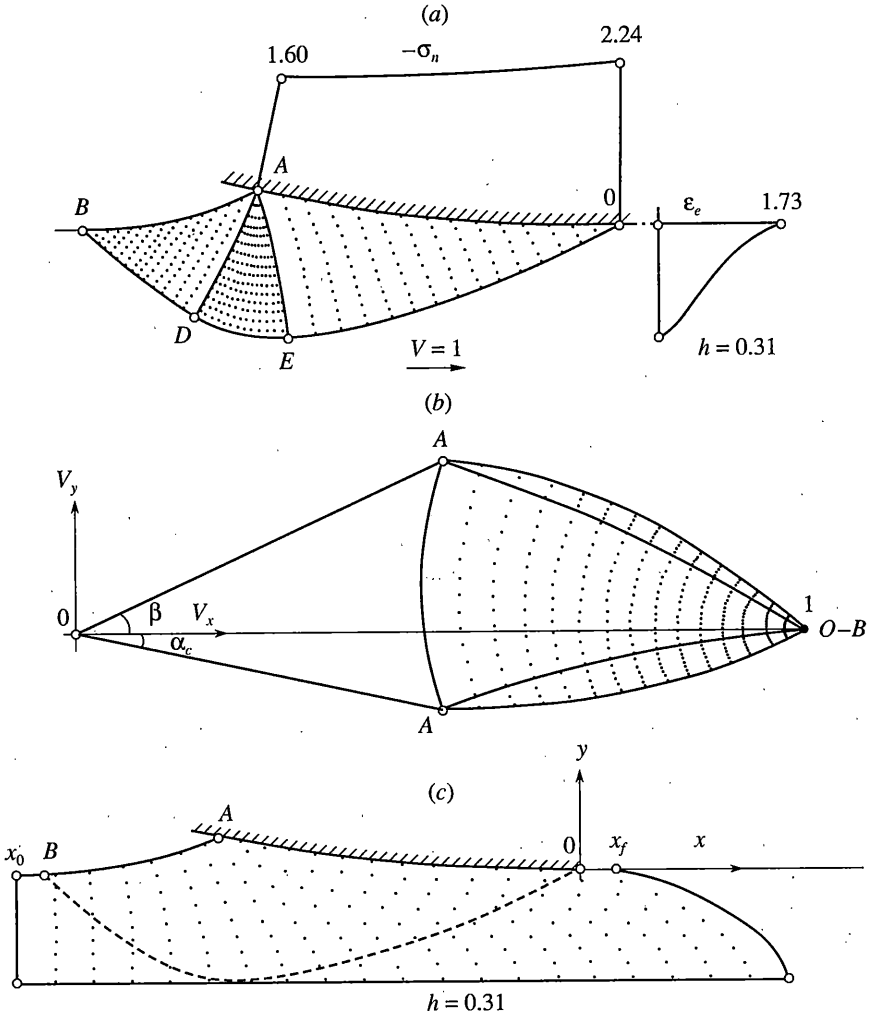
Контактное трение при переднем скольжении существенно снижает силу сопротивления качению F и неоднородность распределения деформаций по толщине пластического слоя по сравнению с качением гладкого цилиндра и создает момент сопротивления качению $M = (\tau_c)_A / (2\alpha_c)$. Предельные значения угла контакта α_c^* возрастают



Фиг. 4

с увеличением контактного трения от $\alpha_c^* \approx 0.52$ при $(\tau_c)_A = 0.1$ и $\alpha_c^* \approx 0.75$ при $(\tau_c)_A = 0.4$. При малых углах контакта горизонтальная сила F весьма мала и может принимать отрицательные значения. Это предельный случай прокатки толстых заготовок при малых обжатиях, когда пластическая деформация происходит только в тонком поверхностном слое и зависит от величины контактного трения τ_c .

5.3. Качение и заднее скольжение шероховатого цилиндра. На фиг. 5 показан пример расчета поля линий скольжения с распределениями контактного давления $-\sigma_n$ и деформации ϵ_e по толщине пластического слоя за цилиндром (а), годограф скоро-



Фиг. 5

стей (b) и деформированной сетки (c) при качении шероховатого цилиндра с задним скольжением ($0 \leq \omega R \leq 0.51$) для угла контакта $\alpha_c = 0.2$ и контактного трения $\tau_c = 0.25$, создающего момент $M = -1.25$, который меняет знак по сравнению с качением цилиндра с передним скольжением вследствие изменения направления контактного трения. При $\omega = 0$ получаем скольжение кругового штампа с образованием перед ним стационарной пластической области, зависящей от вертикальной силы Q и контактного трения τ_c . Эта задача описывает также процесс волочения толстой заготовки через круговые матрицы при пластическом деформировании только поверхностного слоя.

Угловая скорость цилиндра при заднем скольжении должна удовлетворять неравенству $0 \leq \omega R \leq V_A$, где V_A – скорость пластического течения в точке A на границе контакта с цилиндром. Скорость скольжения цилиндра относительно полупространства в точке O равна $1 - \omega R$. При малых углах α_c критическая скорость $V_A \approx 0.8-0.9$ и

заднее скольжение возникает при сравнительно небольшом проскальзывании цилиндра по полупространству. Но при $\alpha_c \rightarrow \alpha_c^*$ значения V_A быстро снижаются.

Увеличение контактного трения приводит к уменьшению угла ψ , предельного угла контакта α_c^* и нормального давления на цилиндр с более равномерным его распределением по сравнению с гладким и шероховатым цилиндром с передним скольжением. Толщина пластического слоя h существенно ниже, а деформации ϵ_c на границе полупространства существенно больше соответствующих значений для гладкого и шероховатого цилиндра с передним скольжением. Предельный угол контакта α_c^* снижается с увеличением контактного трения от $\alpha_c^* \approx 0.38$ при $\tau_c = 0.1$ до $\alpha_c^* \approx 0.1$ при $\tau_c = 0.4$.

При $\tau_c \rightarrow 0.5$ получаем $\alpha_c^* \rightarrow 0$. Пластическая область $ABDE$ вырождается в точку A , а область OAE – в линию сдвига с равномерным давлением $-\sigma_n = 0.5 + \pi/4$ на линии контакта OA . Это случай скольжения абсолютно шероховатого плоского штампа по границе пластического полупространства без проникания пластических деформаций в глубину материала.

6. Заключение. Получено численное решение задач о стационарном плоском пластическом течении жесткопластического полупространства при качении и скольжении по его границе жесткого гладкого и шероховатого цилиндра для двух противоположных по направлению напряжений контактного трения. Показано, что задача сводится к определению неизвестной свободной пластической границы перед цилиндром из кинематических и статических граничных условий из решения нелинейного векторного уравнения. Написаны процедуры вычисления линий тока и искривления первоначально ортогональной сетки при движении материальных частиц вдоль линий тока, определяющие деформированное состояние материала при перемещении цилиндра по полупространству. Найдены предельные значения углов контакта цилиндра с пластической областью, при которых возникает стационарное пластическое течение поверхностного слоя, в зависимости от величины и направления контактного трения. Из решения задачи как предельные случаи следуют скольжение гладкого плоского штампа Прандтля и абсолютно шероховатого плоского штампа без проникновения пластических деформаций в полупространство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А.Ю. Трение качения // ПММ. 1938. Т. 2. Вып. 2. С. 245–260; Прикладные задачи механики. Т. 1. М.: Наука, 1986. С. 176–190.
2. Ишлинский А.Ю. О проскальзывании в области контакта при трении качения // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. № 6. С. 3–15; Прикладные задачи механики. Т. 2. М.: Наука, 1986. С. 182–199.
3. Marshall E.A. Rolling contact with plastic deformation // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. № 4. P. 243–254.
4. Collins I.F. A simplified analysis of the rolling of a cylinder on a rigid/perfectly plastic half-space // Intern. J. Mech. Sci. 1972. V. 14. № 1. P. 1–14.
5. Howell M., Hahn G.T., Rubin C.A., McDowell D.L. Finite element analysis of rolling contact for nonlinear kinematic hardening bearing steel // Trans. ASME. J. Tribol. 1995. V. 117. № 4. P. 729–736.
6. Shiratori M., Ito M., Hashimoto M. Elastic-plastic analysis of rolling contact for surface hardened steel // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A. 1995. V. 61. № 585. P. 1064–1069.
7. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
8. Целиков А.И. Основы теории прокатки. М.: Металлургия, 1965. 247 с.
9. Друянов Б.А., Непершин Р.И. Теория технологической пластичности. М.: Машиностроение, 1990. 272 с.

10. *Druyanov B.A., Nepershin R.I.* Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 425 p.
11. *Broyden C.G.* A class methods for solving nonlinear simultaneous equations // *Math. Comput.* 1965. V. 19. № 92. P. 577–593.
12. *Dennis J.E., Shnabel R.B.* Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983. 378 p.
13. *Непершин Р.И.* Кинематически определяемые задачи плоского пластического течения жесткопластического тела // Проблемы механики неупругих деформаций (к 70-летию Д.Д. Ивлева). М.: Физматлит, 2001. С. 245–259.

Москва

Поступила в редакцию
6.02.2002