

**РАСПИРЕННАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ
МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ
ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ**

Вопросам определения механических характеристик материалов по экспериментальным данным об испытаниях конструкций, изготовленных из этих материалов, уделяется достаточно большое внимание [1–16]. По своей сути они относятся к классу обратных задач, которые могут оказаться некорректными, что приводит к необходимости использования регуляризирующих методов их решения. Этот подход особенно привлекателен для отыскания механических характеристик композитных материалов типа лент, жгутов, поскольку, при этом устраняются технические трудности определения этих характеристик в направлении, ортогональном армированию, и опосредованно учитываются технологические факторы изготовления конструкции.

В данной работе предлагается подход, позволяющий получать хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных путем расширения задачи идентификации. На примере обработки результатов реального эксперимента показано, что он по сравнению с традиционным позволяет в несколько раз уменьшить невязки между расчетными и экспериментальными параметрами.

1. Пусть известны механико-математические модели поведения материала и изготовленных из него конструкций. Обозначим через векторы $s(x)$ и $e(x)$ их статические и кинематические характеристики в точке x , через $a^0(x)$ – вектор механических характеристик, связывающих $s(x)$ и $e(x)$ на основе закона, который запишем в следующей операторной форме:

$$F(s, e, a^0) = 0 \quad (1.1)$$

Механические характеристики принадлежат заранее определенному пространству функций, причем, на них накладываются ограничения, вытекающие, например, из технических, термодинамических соображений. Запишем их в виде

$$B_1(a^0) = 0, \quad B_2(a^0) \geq 0 \quad (1.2)$$

Далее предполагается, что они должны выполняться строго.

Математическую модель поведения изделия, изготовленного из рассматриваемого материала, представим в виде следующей системы уравнений:

$$L(s, e, \kappa) = q(x), \quad x \in \omega \quad (1.3)$$

Здесь ω – область, занимаемая конструкцией, $\kappa(x)$ – вектор конструктивных параметров.

Пусть в области $\gamma^{\text{exp}} \subset \omega$ известны полученные в эксперименте отклики $e^{\text{exp}}(x)$ на воздействия $q^{\text{exp}}(x)$, т.е.

$$e(x) = e^{\text{exp}}(x), \quad x \in \gamma^{\text{exp}} \quad (1.4)$$

Здесь и далее индексом (exp) отмечаются параметры, полученные из эксперимента.

Задача идентификации механических характеристик состоит в отыскании удовлетворяющего (1.2) вектора $a^0(x)$, который позволяет при $q = q^{\text{exp}}$ найти из системы (1.1), (1.3) функцию $e(x)$, обеспечивающую выполнение соотношений (1.4). Поскольку, как правило, точно решить эту проблему не удастся, то она заменяется некоторой вариационной задачей с ограничениями.

Далее для простоты рассмотрим случай, когда соотношения (1.1) могут быть разрешены относительно

$$s = f(e, a^0)$$

Уравнение (1.3) перепишем в виде:

$$N(e, a^0, \kappa) = q \tag{1.5}$$

Для формулировки вариационной задачи вводятся мера близости ρ^2 между векторами u, v , а также мера близости ζ^2 между функциями. В большинстве случаев их принимают в виде:

$$\begin{aligned} \rho^2(u, v) &= (u - v)^T W (u - v) \\ \zeta^2 &= \int_{\gamma} \rho^2(u, v) d\gamma \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь W – симметрическая положительно определенная матрица весовых коэффициентов, γ – область сравнения функций u, v . В случае нестационарных задач (1.6) интегрируется по времени на интервале сравнения.

Представим решение уравнения (1.5) в виде

$$e = N^{-1}(a^0, \kappa)q \tag{1.7}$$

Для формулировки вариационной задачи идентификации механических характеристик $a^0(x)$ чаще всего используют меру близости расчетных значений функции $e(x)$, полученной из (1.7), с экспериментальной функцией $e^{\text{exp}}(x)$. С учетом (1.6), (1.7) и (1.2) ее можно представить в виде:

$$(\zeta_e^2)_{\min} = \min_{a^0(x)_{\gamma^{\text{exp}}}} \int \rho^2 [N^{-1}(a^0, \kappa^{\text{exp}})q^{\text{exp}}, e^{\text{exp}}] d\gamma \tag{1.8}$$

$$B_1(a^0) = 0, \quad B_2(a^0) \geq 0$$

Можно сформулировать альтернативный вариант, в котором минимизируется невязка между расчетными и экспериментальными значениями воздействий $q(x), q^{\text{exp}}(x)$:

$$(\zeta_q^2)_{\min} = \min_{a^0(x)_{\gamma^{\text{exp}}}} \int \rho^2 [N(e^{\text{exp}}, a^0, \kappa^{\text{exp}}), q^{\text{exp}}] d\gamma \tag{1.9}$$

$$B_1(a) = 0, \quad B_2(a) \geq 0$$

В первом случае предпочтение отдается уравнениям равновесия (1.3), поскольку они удовлетворяются точно, а во втором считается, что их можно удовлетворять приближенно, но обеспечивается равенство расчетных и экспериментальных значений кинематических характеристик.

В данной работе предлагается рассматривать расширенную задачу идентификации, считая искомыми функции e, q, κ, a , приближенно удовлетворяя следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} F(s, e, a) &= 0, \quad x \subset \omega; \quad L(s, e, \kappa) = q, \quad x \subset \omega \\ e - e^{\text{exp}} &= 0, \quad x \subset \gamma^{\text{exp}}; \quad q - q^{\text{exp}} = 0, \quad x \subset \gamma^{\text{exp}} \\ \kappa - \kappa^{\text{exp}} &= 0, \quad x \subset \gamma^{\text{exp}}; \quad a - a^0 = 0, \quad x \subset \omega \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь a^0 – вектор, принадлежащий предполагаемому классу функций, a – вектор из более широкого класса. Соотношения (1.2) будем считать удовлетворяющимися строго.

Введем следующие функции: $\delta e = e - e^{\text{exp}}, \delta q = q - q^{\text{exp}}, \delta \kappa = \kappa - \kappa^{\text{exp}}, \delta a = a - a^0$. На функции $\delta e, \delta q, \delta \kappa, \delta a$ наложим ограничения, потребовав их малость по сравнению с $e^{\text{exp}}, q^{\text{exp}}, \kappa^{\text{exp}}, a^0$

$$\begin{aligned} \|\delta e\| &\ll \|e^{\text{exp}}\|, \quad \|\delta q\| \ll \|q^{\text{exp}}\| \\ \|\delta \kappa\| &\ll \|\kappa^{\text{exp}}\|, \quad \|\delta a\| \ll \|a^0\| \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь $\|\cdot\|$ – норма вектора.

Вместо (1.7) получим: $e = N^{-1}(a^0 + \delta a, \kappa^{\text{exp}} + \delta \kappa)(q^{\text{exp}} + \delta q)$. Функционал ζ_e^2 будет теперь зависеть не только от a^0 , но и от $\delta a, \delta \kappa, \delta q$.

Вариационная задача типа (1.8) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\zeta_e^2)_{\min} &= \min_{a^0, \delta a, \delta \kappa, \delta q, \gamma^{\text{exp}}} \int \rho^2 [N^{-1}(a^0 + \delta a, \kappa^{\text{exp}} + \delta \kappa)(q^{\text{exp}} + \delta q), e^{\text{exp}}] d\gamma + \\ &+ \int_{\omega} \rho^2(\delta a, 0) d\omega + \int_{\omega} \rho^2(\delta q, 0) d\omega + \int_{\gamma^{\text{exp}}} \rho^2(\delta \kappa, 0) d\gamma \\ B_1(a^0) &= 0, \quad B_2(a^0) \geq 0, \quad B_1(a^0 + \delta a) = 0, \quad B_2(a^0 + \delta a) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\|\delta q\| \leq \beta_q \|q^{\text{exp}}\|, \quad \beta_q \ll 1, \quad \|\delta \kappa\| \leq \beta_{\kappa} \|\kappa^{\text{exp}}\|, \quad \beta_{\kappa} \ll 1$$

$$\|\delta a\| \leq \beta_a \|a^0\|, \quad \beta_a \ll 1$$

Из (1.12) следует, что если экспериментальные замеры сделаны точно, без погрешностей, a^0 соответствует реальному закону, связывающему статические и кинематические характеристики материала, то ζ_e^2 достигает минимума при $\delta a = \delta \kappa = \delta q = 0$, причем $\zeta_{\min}^2 = 0$, т.е. $\delta e = 0$.

Функционал, аналогичный (1.9), примет вид:

$$\begin{aligned} (\zeta_q^2)_{\min} &= \min_{a^0, \delta a, \delta \kappa, \delta e, \gamma^{\text{exp}}} \int \rho^2 [N(e^{\text{exp}} + \delta e, a^0 + \delta a, \kappa^{\text{exp}} + \delta \kappa), q^{\text{exp}}] d\gamma + \\ &+ \int_{\omega} \rho^2(\delta a, 0) d\omega + \int_{\gamma^{\text{exp}}} \rho^2(\delta e, 0) d\gamma + \int_{\gamma^{\text{exp}}} \rho^2(\delta \kappa, 0) d\gamma \\ B_1(a^0) &= 0, \quad B_2(a^0) \geq 0, \quad B_1(a^0 + \delta a) = 0, \quad B_2(a^0 + \delta a) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\|\delta e\| \leq \beta_e \|e^{\text{exp}}\|, \quad \beta_e \ll 1; \quad \|\delta \kappa\| \leq \beta_{\kappa} \|\kappa^{\text{exp}}\|, \quad \beta_{\kappa} \ll 1$$

$$\|\delta a\| \leq \beta_a \|a^0\|, \quad \beta_a \ll 1$$

Как следует из постановки расширенной задачи идентификации, при проверке решений задачи на контрольных замерах q_* , e_* в области γ_* для изделия, занимающего объем ω_* , необходимо записать функционалы (1.12) или (1.13) и минимизировать при известных значениях q_* , e_* , κ_* , a^0 , варьируя в (1.12) параметры a^0 , δq , δa , $\delta \kappa$; а в (1.13) – a^0 , δa , δe , $\delta \kappa$. Если при этом меры близости ζ_e^2 и ζ_q^2 окажутся малыми величинами порядка той, которая получилась при минимизации (1.12) или (1.13), то можно считать, что найденный вектор механических характеристик $a^0(x)$ позволяет получать расчетные характеристики изделия (деформации, напряжения, перемещения), мало отличающиеся от экспериментальных.

В следующем разделе предложенный подход иллюстрируется на примере решения вариационной задачи (1.13).

2. Рассмотрим задачу расчета жесткостных характеристик органопластикового армированного материала типа ленты, из которого путем намотки под углом $\pm\phi$ к образующей изготовлены цилиндрические оболочки. В [17] приведены результаты их испытаний под действием внутреннего давления q и осевой силы P . Показано, что при растяжении и сжатии в пределах малых деформаций оболочки работают как обычные линейно-упругие тела с одинаковыми жесткостными характеристиками. Поэтому поведение ленты в осях ортотропии будем описывать соотношениями плоского напряженного состояния в виде

$$\begin{aligned} \sigma^{11} &= D_{11}\epsilon_{11} + D_{12}\epsilon_{22} \\ \sigma^{22} &= D_{12}\epsilon_{11} + D_{22}\epsilon_{22}, \quad \sigma^{21} = 2D_{33}\epsilon_{12} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Далее используем матрично-векторную символику. Введем обозначения

$$\{\sigma\} = \{\sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{12}\}^T, \quad \{\epsilon\} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, 2\epsilon_{12}\}^T \quad (2.2)$$

Здесь индекс (T) означает операцию транспонирования. Соотношения (2.1) представим следующим образом:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (2.3)$$

Здесь и далее параметры напряженно-деформированного состояния записываются в осях ортотропии в виде (2.2), а в географических осях оболочки – с волной над параметрами. Тогда связь между ними можно представить в виде

$$\{\tilde{\sigma}\} = [S]\{\sigma\}, \quad \{\epsilon\} = [S]^T\{\tilde{\epsilon}\}; \quad (2.4)$$

$$[S] = \begin{vmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & -\sin 2\phi \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi/2 & -\sin 2\phi/2 & \cos 2\phi \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

Рассмотрим случай нагружения внутренним давлением q и осевой силой P . Считая напряженное состояние безмоментным, а деформирование оболочки осесимметричным получим следующие уравнения равновесия:

$$\tilde{\sigma}^{11} h = P/(2\pi R) \quad (2.6)$$

$$\tilde{\sigma}^{22} h = qR \quad (2.7)$$

Выразим $\{\tilde{\sigma}\}$ через $\{\tilde{\epsilon}\}$ и матрицы $[D]$ и $[S]$:

$$\{\tilde{\sigma}\} = [S]\{\sigma\} = [S][D]\{\epsilon\} = [S][D][S]^T\{\tilde{\epsilon}\} = [\tilde{D}]\{\tilde{\epsilon}\} \quad (2.8)$$

где обозначено $[\tilde{D}] = [S][D][S]^T$. Поскольку состояние безмоментное и осесимметричное, то $\tilde{\epsilon}_{12} = 0$. Из системы (2.6)–(2.8) получим уравнения для остальных двух компонент вектора $\{\tilde{\epsilon}\}$:

$$[\tilde{d}] \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{11} \\ \tilde{\epsilon}_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

$$[\tilde{d}] = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P/(2\pi R h) \\ qR/h \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

В дальнейшем ввиду линейности задачи будет рассматриваться нормированная система (2.9), полученная умножением ее на параметр θ , выбранный в виде:

$$\theta = 1/((P/2\pi R h)^2 + (qR/h)^2)^{1/2} \quad (2.11)$$

Обычный подход к задаче идентификации параметров D_{ij} можно представить следующим образом. Для n оболочек с различными углами намотки при действии q и (или) P записывается система $2n$ уравнений (2.10). Если известны экспериментальные значения $\{\tilde{\epsilon}\}^{\text{exp}}$, P^{exp} и q^{exp} для этих оболочек, то подстановка их в (2.9) дает линейную систему уравнений относительно искомым характеристикам D_{ij} . Запишем полученную систему в виде:

$$[C]\{a\} = \{b\} \quad (2.12)$$

$$a_1 = D_{11}, \quad a_2 = D_{22}, \quad a_3 = D_{33}, \quad a_4 = D_{12} \quad (2.13)$$

Как показано в [6], для того, чтобы ранг этой системы был равен четырем, необходимо иметь как минимум две оболочки с различными углами намотки, сумма которых не равна 90° . Если число оболочек $n > 2$, то решение системы (2.12) можно проводить методом минимизации ее квадратичной невязки:

$$\delta^2 = ([C]\{a\} - \{b\})^T ([C]\{a\} - \{b\}) \quad (2.14)$$

На неизвестные a_i накладываются вытекающие из условия устойчивости материала следующие ограничения:

$$a_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad a_1 a_2 - a_4^2 > 0 \quad (2.15)$$

Кроме того, a_i обычно ищутся в некоторых “разумных” пределах. Поэтому вместо условий (2.15) вводятся следующие:

$$D_{ii}^{\min} \leq a_i \leq D_{ii}^{\max} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.16)$$

$$0 < a_4/a_1 \leq v_{12}^{\max}, \quad 0 < a_4/a_2 \leq v_{21}^{\max}$$

Таким образом, проблема сводится к задаче математического программирования о минимизации (2.14) при ограничениях (2.15), (2.16). В рассматриваемом случае ввиду

Таблица 1

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
φ	25°	25°	35°	35°	45°	45°	55°	55°	65°	65°
\bar{P}	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
\tilde{q}	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$\tilde{\epsilon}_{11} \times 100$	5.9	-3.9	11	-6.6	27	-10	33	-11	35	-7
$\tilde{\epsilon}_{22} \times 100$	-7.2	16	-15.4	13	-18	12	-17	7.2	-11	2.8

не очень большой сложности этих ограничений можно ввести замены переменных и получить задачу на безусловный экстремум. В данной работе использованы параметры p_i , которые связаны с a_i соотношениями

$$a_i = D_{ii}^{\min} \cos^2(p_i) + D_{ii}^{\max} \sin^2(p_i) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.17}$$

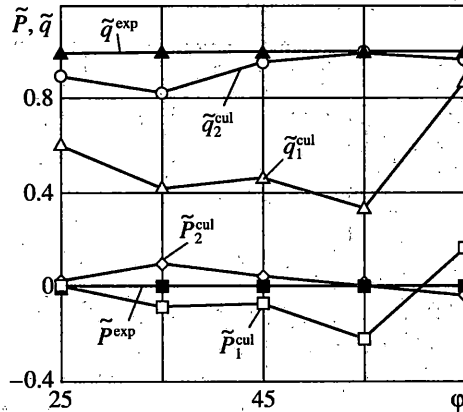
$$a_4 = (a_1 a_2 \sin^2(p_4) \sqrt{v_{12}^{\max} v_{21}^{\max}})^{1/2}$$

Для получения экспериментальных данных $\{\tilde{\epsilon}\}^{\text{exp}}$, \tilde{P}^{exp} и \tilde{q}^{exp} используем результаты, приведенные для органопластиковых цилиндрических оболочек в работе [17]. После нормировки умножением на параметр θ по формуле (2.11) они представлены в табл. 1 (n – номер серии экспериментов).

Результаты решения задачи идентификации жесткостных характеристик обычным способом, т.е. решением задачи минимизации (2.14) при замене переменных (2.17) дает следующие результаты $D_{11} = 30.8$ ГПа, $D_{22} = 4.5$ ГПа, $D_{33} = 1.2$ ГПа, $D_{12} = 1.3$ ГПа,

($E_1 = 30.4$ ГПа; $E_2 = 4.45$ ГПа). Принималось, что $\sqrt{v_{12}^{\max} v_{21}^{\max}} = 1/9$, а остальные величины в (2.16) выбраны таким образом, чтобы D_{ij} оказывались внутри выбранных интервалов. Следует отметить, что полученные значения жесткостных характеристик достаточно сильно отличаются от приводимых в справочниках и монографиях по композитным материалам (например, в [18] приводятся значения $E_1 = 72$ ГПа, $E_2 = 4.9$ ГПа, $G_{12} = 2$ ГПа). Далее, расчетные и экспериментальные значения внешних нагрузок отличаются достаточно сильно, что видно например, из фиг. 1, на которой для случая нагружения оболочек внутренним давлением ($\tilde{P}^{\text{exp}} = 0$, $\tilde{q}^{\text{exp}} = 1$) темные квадраты соответствуют экспериментальным значениям \tilde{P}_1^{exp} , а светлые – расчетным \tilde{P}_1^{cul} ; темные треугольники соответствуют значениям \tilde{q}^{exp} , а светлые – расчетным \tilde{q}_1^{cul} . Аналогичная картина имеет место для случая растяжения.

Решим эту же задачу с использованием подхода, изложенного в п. 1. Введем новую целевую функцию, сконструированную так, чтобы в результате ее минимизации выполнялись следующие соотношения: $\tilde{P}_k \approx \tilde{P}_k^{\text{exp}}$, $\tilde{q}_k \approx \tilde{q}_k^{\text{exp}}$, $\{\tilde{\epsilon}\}_k \approx \{\tilde{\epsilon}\}_k^{\text{exp}}$, $\varphi_k \approx \varphi_k^{\text{exp}}$, $\{a\}_k \approx \{a\}_k^0$ ($k = 1, \dots, n$). Здесь k – номер эксперимента, n – число экспериментов, a_i^0 – искомые жесткостные характеристики ленты. Согласно изложенному выше считаем, что деформации измеряются с некоторыми погрешностями, которые будем считать искомыми. Хотя максимальная погрешность по абсолютной величине может считать-



Фиг. 1

ся известной в соответствии с конструкцией измерительных приборов, в данной работе ввиду рассмотрения нормированной системы (2.19) искомыми являлись относительные невязки между $\{\tilde{\epsilon}\}_k$ и $\{\tilde{\epsilon}\}_k^{exp}$:

$$\Delta_{1k} = ((\tilde{\epsilon}_{11})_k - (\tilde{\epsilon}_{11})_k^{exp}) / (|(\tilde{\epsilon}_{11})_k^{exp}| + |(\tilde{\epsilon}_{22})_k^{exp}|)$$

$$\Delta_{2k} = ((\tilde{\epsilon}_{22})_k - (\tilde{\epsilon}_{22})_k^{exp}) / (|(\tilde{\epsilon}_{11})_k^{exp}| + |(\tilde{\epsilon}_{22})_k^{exp}|), \quad |\Delta_{1k}|, |\Delta_{2k}| \leq 0.19$$

Относительно же угла намотки ϕ принималось, что $\phi_k = \phi_k^{exp} + \Delta\phi_k$, $|\Delta\phi_k| \leq 1^\circ$. Параметры $\Delta\phi_k$ также считаются искомыми для каждого эксперимента.

Относительно жесткостных характеристик a_i делается предположение о том, что в результате влияния технологических факторов они в составе оболочек с разными углами намотки могут отличаться от искомым исходных значений a_i^0 также на $\pm 19\%$. Таким образом, кроме a_i^0 вводятся идентифицируемые параметры Δa_{ik} :

$$\{a\}_k = \{a\}^0 + \Delta a_k, \quad \{\Delta a\}_k = \{\Delta a_{1k}, \Delta a_{2k}, \Delta a_{3k}, \Delta a_{4k}\}^T, \quad \Delta a_{ik} \leq 0.19 a_{ik}^0$$

где $\{a\}^0$ – вектор осредненных жесткостных характеристик ленты, $\{a\}_k$ – вектор ее жесткостных характеристик в оболочке с номером k .

В качестве целевой рассматривалась функция

$$\Phi^2 = \delta^2 + \delta_\epsilon^2 + \delta_\phi^2 + \delta_a^2$$

$$\delta_\epsilon^2 = \Delta_{11}^2 w_1 + \Delta_{12}^2 w_2 + \dots + \Delta_{2n}^2 w_{2n} \tag{2.18}$$

$$\delta_\phi^2 = \Delta\phi_1^2 w_{2n+1} + \dots + \Delta\phi_n^2 w_{3n}, \quad \delta_a^2 = \Delta a_{11}^2 w_{3n+1} + \dots + \Delta a_{4n}^2 w_{7n}$$

Здесь невязка δ^2 вычислялись по формуле (2.14), w_i – весовые коэффициенты. Они выбирались экспериментально из условия $\delta^2 \sim \delta_\epsilon^2 \sim \delta_\phi^2 \sim \delta_a^2$. Было принято $w_i = 0.01$ для δ_ϵ^2 , $w_i = 0.001$ для δ_ϕ^2 , $w_i = 0.0001$ для δ_a^2 .

Таблица 2

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δφ (град)	0.9	-0.4	0.4	0.7	0.9	0.7	-0.7	0.5	-1	0.9
Δ <i>a</i> ₁ (ГПа)	-11.4	-10.5	-5.0	9.1	-11.3	10.6	11.1	11.3	-11.3	11.4
Δ <i>a</i> ₂ (ГПа)	-0.12	1.81	-0.83	0.92	-0.84	0.10	-0.82	-0.81	-0.82	-0.82
Δ <i>a</i> ₃ (ГПа)	-0.30	0.31	-0.30	0.31	-0.30	0.31	-0.30	0.10	-0.30	0.30
Δ <i>a</i> ₄ (ГПа)	0.11	-0.35	0.01	0.69	-0.58	0.19	0.29	-0.26	-0.06	-0.36

Минимизация (2.18) при числе серий испытаний *n* = 10 дает следующие значения жесткостных характеристик:

$$\begin{aligned}
 a_1^0 = D_{11}^0 = 59.9 \text{ ГПа}, \quad a_2^0 = D_{22}^0 = 4.36 \text{ ГПа} \\
 a_3^0 = D_{33}^0 = 1.62 \text{ ГПа}, \quad a_4^0 = D_{12}^0 = 1.8 \text{ ГПа}
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

Полученные при внутреннем давлении расчетные значения \bar{P}_2^{cul} и \bar{q}_2^{cul} отмечены на фиг. 1 светлыми ромбами и точками, а углы намотки и жесткостные характеристики отличались от приведенных в табл. 1 и в (2.19) на значения, которые приведены в табл. 2.

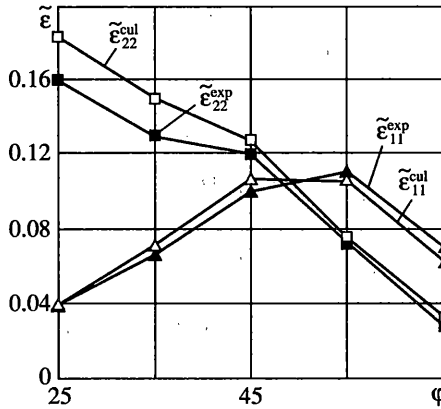
На фиг. 2 приведены экспериментальные и расчетные значения деформаций при внутреннем давлении. Темные треугольники – это экспериментальные значения $\bar{\epsilon}_{11}^{\text{exp}}$, темные квадраты – $\bar{\epsilon}_{22}^{\text{exp}}$, светлые маркеры соответствуют расчетным значениям деформаций.

Как видно из фиг. 1, 2 предложенный подход позволил определить жесткостные характеристики материала, приводящие к гораздо меньшему рассогласованию экспериментальных и расчетных параметров.

С целью проверки устойчивости рассматриваемой задачи к вариациям исходных данных были проведены численные эксперименты с возмущениями $\{\bar{\epsilon}\}_k^{\text{exp}}$ на величины до 20%. Расчеты показали, что результаты решения также мало отличаются от приведенных в (2.19). Кроме того, эта же задача была решена для случая, в котором число серий экспериментов принималось равным девяти, а результаты испытаний оболочек в оставшейся серии принимались за контрольные. Например, для случая, в котором за контрольную принималась серия *n* = 7, в процессе обработки девяти серий были получены следующие жесткостные характеристики (в скобках – отличия от (2.19) в процентах):

$$\begin{aligned}
 D_{11}^0 = 60.7 \text{ ГПа}(1.3\%), \quad D_{22}^0 = 4.36 \text{ ГПа}(0\%), \\
 D_{33}^0 = 1.68 \text{ ГПа}(4\%), \quad D_{12}^0 = 1.81 \text{ ГПа}(0.6\%).
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Видно, что результаты (2.19) и (2.20) отличаются мало, что также говорит о достаточной устойчивости рассматриваемой задачи к изменениям исходных данных.



Фиг. 2

Затем была решена задача отыскания $\{\Delta\epsilon_7\}$, $\Delta\phi_7$, $\{\Delta\alpha\}_7$ и были получены следующие результаты (в скобках – отличие от данных, приведенных в табл. 1 и в (2.20)):

$$\tilde{\epsilon}_x = 0.29(12\%), \quad \tilde{\epsilon}_y = -0.15(12\%), \quad \Delta\phi_7 = -1^\circ$$

$$\tilde{P} = 1.12(12\%), \quad \tilde{q} = -0.083(8.3\%), \quad (D_{11})_7 = 67.7 \text{ ГПа}(11.5\%)$$

$$(D_{22})_7 = 3.83 \text{ ГПа}(12\%), \quad (D_{33})_7 = 1.48 \text{ ГПа}(12\%), \quad (D_{12})_7 = 2.0 \text{ ГПа}(10\%)$$

Сравнение с (2.20) и данными табл. 1 показывает, что разница между расчетными и экспериментальными результатами, а также между D_{ij}^0 и $(D_{ij})_7$ имеет тот же порядок, что и при решении задачи идентификации для случая, в котором число серий испытаний $n = 9$. Следовательно, жесткости (2.20) или (2.19) можно считать осредненными характеристиками ленты с погрешностью порядка 20%.

Таким образом, в данном примере предложенный подход в сравнении с традиционным позволил уменьшить максимальные невязки между экспериментальными и расчетными значениями силы \tilde{P} в 2.5 раза, а по внутреннему давлению \tilde{q} в 3.5 раза.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00762) и АН Татарстана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Таирова Л.П. Идентификация упругих характеристик однонаправленных материалов по результатам испытаний многослойных композитов // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Вып. 30. С. 16–31.
2. Суворова Ю.В., Добрынина В.С., Статников И.Н., Барт Ю.Я. Определение свойств композита в конструкции методом параметрической идентификации // Механика композит. материалов. 1989. № 1. С. 150–157.
3. Терегулов И.Г. Асимптотический анализ и классификация определяющих соотношений для волокнистых композитов и анизотропных оболочек при конечных и неупругих деформациях // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 6. С. 1333–1336.
4. Каюмов Р.А. Пластическое течение волокнистых материалов и разрушение конструкций из них // Механика композит. материалов. 1993. Т. 29. № 1. С. 77–83.

5. Каюмов Р.А. Связанная задача расчета механических характеристик материалов и конструкций из них // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 6. С. 118–127.
6. Терезулов И.Г., Каюмов Р.А., Бутенко Ю.И., Сафиуллин Д.Х. Определение механических характеристик композитов по результатам испытаний многослойных образцов. // Механика композит. материалов. 1995. Т. 31. № 5. С. 607–615.
7. Воронцов Г.В., Плющев Б.И., Резниченко А.И. Определение приведенных упругих характеристик армированных композитных материалов методами обратных задач тензометрирования // Механика композит. материалов. 1998. Т. 34. № 1. С. 3–16.
8. Рикардс Р., Чате А. Идентификация механических свойств композитных материалов на основе планирования экспериментов // Механика композит. материалов. 1998. Т. 34. N 1. С. 3–16.
9. Frederiksen P.S. Experimental procedure and results for the identification of elastic constants of thick orthotropic plates // J. Composite Mater. 1997. V. 31. № 4. P. 360–382.
10. Кравчук А.С. Алгоритмы томографии в теории упругости // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 509–512.
11. Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г. Роль иерархического адаптивного подхода в механике гетерогенных сред // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 6. С. 95–117.
12. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Определение материальных функций нелинейной теории термовязкоупругости с использованием ее иерархической структуры // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 189–205.
13. Матвеев В.П., Юрлова Н.А. Идентификация эффективных упругопостоянных композитных оболочек на основе статических и динамических экспериментов // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 3. С. 12–20.
14. Леонова Э.А. О некорректных задачах статики теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 71–77.
15. Цвелодуб И.Ю. К определению прочностных характеристик физически нелинейного включения в линейно-упругой среде // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 4. С. 178–184.
16. Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990. 303 с.
17. Алексеев К.П., Каюмов Р.А., Терезулов И.Г., Фахрутдинов И.Х. Механические характеристики органо- и углепластиковых труб, изготовленных методом перекрестной намотки // Механика композиционных материалов и конструкций. 1998. Т. 4. № 4. С. 3–20.
18. Васильев В.В. [1]. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.

Казань

Поступила в редакцию
25.06.2001