

УДК 532.546;533.15

© 2004 г. Д. В. ШЕВЧЕНКО

## РЕОЛОГИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОРИСТЫХ СРЕД В СОСТОЯНИИ НЕПОЛНОГО НАСЫЩЕНИЯ

Проведен термодинамический вывод реологических соотношений для пористой среды, насыщенной двумя несмешивающимися жидкостями. В двухфазной зоне учтено изменение поверхностной энергии и действие капиллярных сил.

Запись первого закона термодинамики для всей системы “пористая среда + насыщающие ее фазы” и для каждой из фаз в отдельности позволяет из аддитивности внутренней энергии, с учетом поверхностной энергии, получить необходимые соотношения между деформациями, внешними нагрузками, напряжениями, объемными долями и другими макрохарактеристиками пористой среды.

Часто из экспериментальных работ удается определить свойства пористой среды в сухом состоянии, при полном насыщении или при какой-то конкретной насыщенности. При исследуемых процессах бывают известны внешние нагрузки, приложенные к среде в целом. Очевидно, эти нагрузки распределяются между пористой средой и насыщаемыми ее фазами, свойства которых обычно известны. Однако способ этого распределения (или те пропорции, в которых нагрузка будет восприниматься пористым скелетом и жидкостями и газами, находящимися в нем) из эксперимента определить как правило невозможно. Знание же способа распределения нагрузки между компонентами в пористой среде дает возможность прогнозировать ее свойства при изменении их количественного состава (сушка, пропитка и другие процессы).

Будем рассматривать пористый скелет, насыщенный двумя жидкостями. Менее смачивающую жидкость назовем условно газ, а более смачивающую – жидкость. Им в дальнейшем будут соответствовать индексы  $g$  и  $w$ , а пористой матрице и системе в целом – индексы  $m$  и  $o$  соответственно. Для возможности учета обмена молекулами между жидкостью и газом (испарение – конденсация) будем считать, что газ состоит из пара (индекс  $s$ ), молекулы которого могут переходить в жидкость и из нее, и воздуха (индекс  $a$ ), который инертен по отношению к жидкости.

Пусть, как и в [1],  $V^o$  – объем пористой среды, насыщенный жидкостью и газом, связанный с материальным объемом  $V^m$  твердой фазы. Такая система является проточной по газу и жидкости. Поверхность  $dV^m$  есть объединение внутренних поверхностей контакта пористого скелета с жидкостью  $S^{mw}$  и газом  $S^{ms}$  и внешней поверхности  $S_{ext}^m$ .

Среда полностью проявляет реологические свойства в безинерционных процессах при отсутствии массовых сил [1, 2]. В этих условиях первый закон термодинамики для пористой среды запишется в виде [3]:

$$dU^o = \delta Q_{ext}^o + \delta A^o + \mu^a dN_{ext}^a + \mu^s dN_{ext}^s + \mu^w dN_{ext}^w \quad (1)$$

где  $U$  – внутренняя энергия в объеме  $V^\circ$ ;  $\delta Q_{\text{ext}}^\circ$  – внешний приток тепла;  $\mu$  – химпотенциал;  $dN_{\text{ext}}$  – количество вещества, пришедшего в систему извне

$$\delta A^\circ = V^\circ \sigma_{ij}^\circ d\varepsilon_{ij} \quad (2)$$

работа внешних поверхностных сил над средой,  $\sigma_{ij}^\circ$  – тензор полных напряжений в среде,  $\varepsilon_{ij}$  – тензор макродеформаций пористой среды.

Именно компоненты тензора полных напряжений входят в уравнение равновесия

$$\partial \sigma_{ij}^\circ / \partial x_j + \rho f_i = 0$$

и граничные условия  $\sigma_{ij}^\circ n_j = \Gamma_i^*$  при рассмотрении насыщенной системы в целом как сплошной среды.

Приращение внутренней энергии среды складывается из приращения внутренней энергии каждой фазы и приращения энергии поверхностей межфазного взаимодействия  $dU^\Sigma$  [4]:

$$dU^\circ = dU^m + dU^w + dU^g + dU^\Sigma \quad (3)$$

Для пористой матрицы имеем

$$dU^m = \delta Q^m + \delta A^m \quad (4)$$

где работа внешних поверхностных сил над пористым скелетом может быть записана аналогично (2) в виде

$$\delta A^m = V^\circ \sigma_{ij}^f d\varepsilon_{ij} \quad (5)$$

Здесь  $\sigma_{ij}^f$  – тензор эффективных напряжений пористой матрицы.

Механический смысл такого тензора для случая полного насыщения проанализирован в [5, 6]. Там же предложено формальное обобщение этого понятия на случай неполного (двухфазного) насыщения. Здесь этот тензор определяется равенством (5) как объект, термодинамически сопряженный макродеформациям. При полном насыщении (как будет показано ниже) такой объект совпадает с определением [5], а в случае произвольного насыщения термодинамически обобщает его.

Для жидкости и газа положим [3]:

$$dU^m = \delta Q^w - p^w dV^w + \mu^w dN^w \quad (6)$$

$$dU^g = \delta Q^g - p^g dV^g + \mu^a dN^a + \mu^s dN^s$$

где  $p^{w,g}$  – давление,  $V^{w,g}$  – занимаемый фазой объем внутри  $V^\circ$ ,  $dN^{w,a,s}$  – количество вещества, пришедшего к данной фазе.

Зерна скелета для простоты будем считать несжимаемыми. Тогда изменение объема  $V^\circ$  происходит только за счет изменения объема пор

$$dV^\circ = d(mV^\circ) \quad (7)$$

где  $m$  – пористость.

Обозначим через  $s$  долю пор, занятых жидкостью (насыщенность):

$$s = V^w / (V^w + V^g)$$

величина  $(1 - s)$  характеризует количество газа в пористой среде. Тогда согласно (7) получим

$$dV^w = d(smV^\circ) = sdV^\circ + mV^\circ ds \quad (8)$$

$$dV^g = d((1 - s)mV^\circ) = (1 - s)dV^\circ - mV^\circ ds \quad (9)$$

Объемная деформация среды определяется формулой

$$\Theta = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ij} = \frac{V^{\circ} - \check{V}^{\circ}}{\check{V}^{\circ}}$$

где  $\check{V}^{\circ}$  – начальная величина объема  $V^{\circ}$ . Тогда будем иметь

$$d\Theta = (1 + \Theta) \frac{dV^{\circ}}{V^{\circ}} \quad (10)$$

и из (8), (9) следуют соотношения

$$\begin{aligned} dV^w &= \left( \frac{s}{1 + \Theta} d\Theta + m ds \right) V^{\circ} \\ dV^g &= \left( \frac{1-s}{1 + \Theta} d\Theta - m ds \right) V^{\circ} \end{aligned} \quad (11)$$

Кроме того, из (7) и (10) можно получить соотношение между изменением пористости и объемной деформацией:

$$\frac{dm}{1-m} = \frac{d\Theta}{1+\Theta} \quad (12)$$

Изменение внутренней энергии поверхностей межфазного взаимодействия, согласно [7], запишется в виде

$$dU^{\Sigma} = \delta Q^{\Sigma} + \gamma^{mw} dS^{mw} + \gamma^{mg} dS^{mg} + \gamma^{wg} dS^{wg} \quad (13)$$

где  $\gamma^{\alpha\beta}$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $S^{\alpha\beta}$  – площадь поверхности контакта между фазами  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha, \beta = m, w, g$ ),  $\delta Q^{\Sigma}$  – общий приток тепла к поверхности контакта внутри объема  $V^{\circ}$ .

Удельные межфазные площади зависят от насыщенности и объемной деформации среды. Обозначим удельную поверхностную энергию

$$\varphi(s, \Theta) = \frac{1}{V^{\circ}} (\gamma^{mw} S^{mw} + \gamma^{mg} S^{mg} + \gamma^{wg} S^{wg})$$

тогда с учетом (10) получим соотношение

$$\gamma^{mw} dS^{mw} + \gamma^{mg} dS^{mg} + \gamma^{wg} dS^{wg} = V^{\circ} \left( d\varphi + \frac{\varphi}{1+\Theta} d\Theta \right) \quad (14)$$

Вид функции  $\varphi(s, \Theta)$  зависит от микроструктуры среды.

Приток тепла к каждой фазе  $\alpha$  ( $\delta Q^{\alpha}$ ) складывается из потока тепла от других фаз  $\beta$  в объеме  $V^{\circ}$  ( $\delta Q_{\beta}^{\alpha}$ ), притока от поверхности контакта с другими фазами в объеме  $V^{\circ}$  ( $\delta Q_{\Sigma}^{\alpha}$ )

и притока через границу  $V^{\circ}$  ( $\delta Q_{\text{ext}}^{\alpha}$ ):

$$\delta Q^{\alpha} = \sum_{\beta \neq \alpha} \delta Q_{\beta}^{\alpha} + \delta Q_{\Sigma}^{\alpha} + \delta Q_{\text{ext}}^{\alpha} \quad (\alpha, \beta = w, g, m)$$

Причем очевидно  $\delta Q_{\beta}^{\alpha} = -\delta Q_{\alpha}^{\beta}$ ,  $\sum_{\alpha} \delta Q_{\Sigma}^{\alpha} = -\delta Q^{\Sigma}$ . Тогда

$$\sum_{\alpha} \delta Q^{\alpha} + \delta Q^{\Sigma} = \sum_{\alpha} \delta Q_{\text{ext}}^{\alpha} = \delta Q_{\text{ext}}^{\circ} \quad (15)$$

Такие же соотношения можно записать и для обмена молекулами между жидкостью и газом. Приток количества вещества к жидкости ( $dN^w$ ) складывается из внешнего притока ( $dN_{\text{ext}}^w$ ) и конденсации пара ( $dN_s^w$ ). Аналогично, приток количества вещества к газу ( $dN^a + dN^g$ ) и складывается из внешнего притока пара и воздуха ( $dN_{\text{ext}}^s + dN_{\text{ext}}^a$ ) и испарения жидкости ( $dN_w^s$ ).

Так как при испарении  $\mu^s = \mu^g$ , а перетоки вещества за счет испарения и конденсации равны по величине и обратны по знаку  $dN_w^s = -dN_s^w$ , то получим

$$\mu^w dN^w + \mu^a dN^a + \mu^s dN^s = dN_{\text{ext}}^w + dN_{\text{ext}}^a + dN_{\text{ext}}^s \quad (16)$$

Подставляя (4), (6), (13) в (3) с учетом (5), (11), (14) – (16) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dU^o}{V_0} &= \frac{1}{V_0} (\delta Q_{\text{ext}}^o + dN_{\text{ext}}^w + dN_{\text{ext}}^s + dN_{\text{ext}}^a) + \sigma_{ij}^f d\varepsilon_{ij} - \\ &- p^w \left[ \frac{s d\Theta}{1 + \Theta} + m ds \right] - p^g \left[ \frac{(1-s)d\Theta}{1 + \Theta} - m ds \right] + \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} + \frac{\Phi}{1 + \Theta} \right) d\Theta \end{aligned} \quad (17)$$

Выберем за независимые переменные  $\varepsilon_{ij}$ ,  $s$ . Так как  $dU^o$  – полный дифференциал, то из (1), (2), (17) получим важные соотношения:

$$p^w - p^g = p_c = \frac{1}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (18)$$

$$\sigma_{ij}^o = \sigma_{ij}^f - (p^w s + p^g (1-s)) \frac{1}{1 + \Theta} \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} + \frac{\Phi}{1 + \Theta} \right) \delta_{ij} \quad (19)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронеккера. Так как давление в смачивающей жидкости ниже, чем в газе, то  $p_c \leq 0$ .

Для случая малых деформаций формула (19) переписывается в виде:

$$\sigma_{ij}^o = \sigma_{ij}^f - (p^w s + p^g (1-s)) \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} + \Phi \right) \delta_{ij} \quad (20)$$

Соотношение (18) связывает функцию удельной поверхностной энергии  $\Phi(s, \Theta)$  с капиллярным давлением  $p_c(s, \Theta)$ , а (19) – эффективные напряжения и функцию  $\Phi(s, \Theta)$  с полными напряжениями, что позволяет включить  $\sigma_{ij}^f$  и  $\Phi$  в уравнения равновесия и граничные условия.

При полном насыщении среды какой-либо из жидкостей, поверхностная энергия в объеме  $V_0$  равна только энергии поверхности этой жидкости и пористого скелета и не меняется при деформации (при недеформируемых зернах скелета). Тогда из (14) получим

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} + \frac{\Phi}{1 + \Theta} \right) = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \quad s = 1 \quad (21)$$

и как частный случай формулы (19), получаем известное для состояния полного насыщения соотношение [5]:

$$\sigma_{ij}^o = \sigma_{ij}^f - p\delta_{ij} \quad (22)$$

Для случая малых деформаций из (18) и (21) при непрерывности функции  $p_c(s, \Theta)$  следует

$$\frac{\partial \varphi(s, \Theta)}{\partial \Theta} + \varphi(s, \Theta) = \int_0^s \left( m(\Theta)p_c(x, \Theta) + \frac{\partial m p_c(x, \Theta)}{\partial \Theta} \right) dx$$

Тогда из (20) с учетом (7), (10), (12) и (18) получим

$$\sigma_{ij}^o = \sigma_{ij}^f - (p_c s + p^s)\delta_{ij} + \int_0^s \left( p_c(x, \Theta) + m \frac{\partial p_c(x, \Theta)}{\partial \Theta} \right) dx \delta_{ij} \quad (23)$$

С одной стороны, стягивающее капиллярное давление при всех значениях насыщенности меньше нуля. С другой стороны, при сжатии среды уменьшаются расстояния между частицами пористой среды и капиллярное давление увеличивается по абсолютной величине, следовательно производная  $\partial p_c / \partial \Theta$  больше нуля. Согласно (21):

$$\int_0^1 \left( p_c + m \frac{\partial p_c}{\partial \Theta} \right) dx = 0$$

О значении интеграла при насыщенности внутри промежутка  $s \in (0, 1)$  заранее сказать ничего нельзя. Определить его можно либо задаваясь конкретной моделью микроструктуры среды, либо определив из эксперимента функцию  $p_c(s, \Theta)$ . Для этого надо при различной объемной деформации пористой среды определить  $p_c$  (например через измерение давления пара в пористой среде [8]), меняя (за счет сушки или пропитки) насыщенность образца.

Остановимся особо на тензоре эффективных напряжений. Можно убедиться, что для данного образца пористой среды эти напряжения так же зависят от деформаций, как и в полностью насыщенном состоянии.

Действительно, согласно (5) эффективные напряжения обусловлены только макродеформациями пористой матрицы независимо от степени насыщения ее жидкостью, при условии, однако, что реологическое поведение матрицы не меняется. Реологическое поведение определяется в основном свойствами контактов между зернами матрицы и свойствами самих зерен. Свойства зерен пористого скелета, очевидно, не зависят от окружающих их компонент. Про контакты можно сделать следующее замечание. Жидкость смачивает пористый скелет и занимает места, максимизирующие площадь контакта “жидкость – зерна матрицы”. В окрестности контактов между частицами, как в самых узких местах, жидкость будет сохраняться почти до состояния полного высыхания. Т.е. при всех  $s$  от единицы до близких к нулю, свойства контактов между частицами пористого скелета не зависят от насыщенности. В этом диапазоне  $s$  зависимость напряжений  $\sigma_{ij}^f$  от макродеформаций  $\epsilon_{ij}$  та же, что и при  $s = 1$ .

В итоге, согласно (22) получаем

$$\sigma_{ij}^f(\epsilon_{ij}, s) = \sigma_{ij}^f(\epsilon_{ij}, s = 1) = \sigma_{ij}^o(\epsilon_{ij}, s = 1) + p^w \delta_{ij}$$

Т.е. для определения зависимости эффективных напряжений от деформаций при любой насыщенности, достаточно в состоянии полного насыщения определить зависи-

мость необходимой внешней нагрузки и порового давления для заданного деформированного состояния среды [9, 10].

Таким образом, при известной зависимости капиллярного давления от насыщенности и объемной деформации данной пористой среды, а также реологическом поведении матрицы (определенном в состоянии полного насыщения), равенство (23) задает связь деформаций и внешней нагрузки для среды в целом в состоянии неполного насыщения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-01-00155).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Костерин А.В.* Построение моделей изотермической фильтрации в деформируемой пористой среде // Исследования по подземной гидромеханике. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. Вып. 8. С. 47–57.
2. *Костерин А.В., Березинский Д.А.* Насыщенно-ненасыщенные состояния деформируемых пористых сред // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 3. С. 343–345.
3. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
4. *Леонтович М.А.* Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука, 1983. 416 с.
5. *Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А.* Механика насыщенных пористых сред М.: Недра, 1970. 339 с.
6. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
7. *Ландау Д.Л., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
8. *Хейфец Л.И., Неймарк А.В.* Многофазные процессы в пористых средах. М.: Химия, 1982. 320 с.
9. *Белл Дж.Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1. М.: Наука, 1984, 596 с.
10. *Сухарев И.П.* Экспериментальные методы исследования деформации и прочности. М.: Машиностроение, 1987. 21 с.

Казань

Поступила в редакцию  
2.11.2001