**МЕХАНИКА**
**ТВЕРДОГО ТЕЛА**
**№ 2 • 2004**

УДК 531.383

**© 2004 г. М.В. МИЛЮХИН**

# К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ГИРОСКОПОВ

Рассматриваются гироскопы с несимметричным ротором. Посредством уравнений Лагранжа устанавливается связь между параметрами вибрационных гироскопов и с помощью уравнений Эйлера устанавливается связь между параметрами гиротахометра, причем в число параметров включается измеряемая угловая скорость. Далее, в качестве заданного движения выбирается регулярная прецессия, а сам гироскоп полагается близким к симметричному. Выражения для моментов сил, обеспечивающих это движение, позволяет оценить влияние моментов с точки зрения порядка малости. Результаты могут быть использованы в проектировании и сборке гироскопических систем.

**1.** Несимметричные роторы гироскопов находят все большее применение в качестве элементов гироскопических приборов, например, гиротахометров. В известных и широко распространенных гироскопах ротор симметричен, это так называемый $P$-гироскоп, согласно терминологии известной монографии [1]; его практическое использование основано на возникновении гироскопического момента как следствия вынужденного вращения – хорошо изученного явления, вошедшего во все курсы механики. Вместе с тем, в [1] вводится в рассмотрение другой, так называемый $U$-гироскоп, ротор которого является несимметричным. Возможность его использования состоит в том, чтобы измерять амплитуду колебаний вокруг средней оси гироскопа, т.е. оси вращения внутренней рамки.

Другим важным примером, когда ротор несимметричен, является вибрационный гироскоп, и его принцип действия принципиально отличается тем, что гироскопический момент выполняет иную роль [2, 3, 4]. Именно, при вращении основания гироскопа, на котором установлен быстро вращающийся вал, несущий ротор, укрепленный с помощью торсионов, возникающая пара вызывает его поворот вокруг оси торсионов – их жесткость на кручение вызывает колебания ротора относительно указанной оси, которые имеют характер вибрации вследствие высокой угловой скорости вращения вала.

Пусть $O^*X^*Y^*Z^*$ – инерциальная система координат, а $Ox'y'z'$ – система, поступательно перемещающаяся со скоростью точки $O$, где пересекаются оси вала и торсионов; далее, $OXYZ$ – система с правой тройкой осей, в которой направление $Z$ совпадает с направлением $O^*O$, а ось $Y$ параллельна оси $Y^*$; наконец, система $Oxyz$ связана с ротором, причем ось $z$ является осью собственного вращения ротора. Заметим, что в отличие от распространенных гироскопов вращение вала здесь не является “собственным вращением”, тогда как таковым служит колебательное движение ротора вокруг оси торсионов, и при этом угол нутации прямой, так как торсионы перпендикулярны оси вала; тогда прецессией ротора является именно вращение вала. Подобное движение в углах Эйлера записывается в виде

$$\psi = \omega t, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0 \sin \nu t \tag{1.1}$$

что определяется как полурегулярная прецессия – известно, например, что такое движение при определенных начальных условиях совершает твердое тело в случае Гесса – Аппельрота [5] (равномерная прецессия с неравномерным собственным вращением).

Назначением гироскопа является определение угловой скорости $\Omega$ вращения основания, ортогональной оси вращения вала; здесь в качестве такой оси выступает ось $Y^*$, оси $Y$ и $y'$ совпадают, а ось $Z$ вращается с этой угловой скоростью относительно этих осей. Ставится задача о связи параметров $\varphi$, $\nu$ и $\Omega$, при этом в отличие от указанных выше исследований объектом изучения служит именно полурегулярная прецессия (1.1), а инструментом исследования являются уравнения Лагранжа в относительном движении в форме [6]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T'}{\partial q_i} = Q_i - m\mathbf{w}_O\frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial q_i} \tag{1.2}$$

где $T'$ – кинетическая энергия в системе $Ox'y'z'$; $\mathbf{w}_O$ – ускорение точки $O$; $\mathbf{r}_C$ – радиус-вектор центра масс ротора, начинающийся в этой точке; $m$ – масса ротора.

Пусть $\omega_0$ – относительная угловая скорость тела в системе $Oxyz$; $\mathbf{e}_Y \equiv \mathbf{e}$ – орт оси $Y$; $\mathcal{J}$ – тензор инерции. Тогда для кинетической энергии имеем выражение

$$T' = 1/2[\mathcal{J}(\omega_0+\Omega\mathbf{e})](\omega_0+\Omega\mathbf{e}) = 1/2T_0+\Omega\mathcal{J}\omega_0\mathbf{e}+1/2\Omega^2(\mathcal{J}\mathbf{e})\mathbf{e} \tag{1.3}$$

где $T_0$ – кинетическая энергия движения тела в системе $OXYZ$.

Лагранжевы уравнения линейны относительно кинетической энергии; для функции $T_0$ они имеют вид [6], где левые части с учетом (1.1), а также равенств $\ddot{\psi} = \ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = -\varphi_0\nu^2\sin\nu t$, $\dot{\varphi} = \varphi_0\nu\cos\nu t$ записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}
e\varphi_0\nu^2\sin\nu t+2b\omega\varphi_0\nu t+d\varphi_0^2\nu^2\cos^2\nu t-d\varphi_0\nu^2\sin\nu t+(f+C)\omega\varphi_0\nu\cos\nu t+\\
+e\varphi_0^2\nu^2\cos^2\nu t-e\omega^2-C\varphi_0\nu^2\sin\nu t-b\omega^2\\
b = 1/2(A-B)\sin2\varphi-F\cos2\varphi,\quad e = E\sin\varphi+D\cos\varphi,\quad d = D\sin\varphi-E\cos\varphi,\\
f = 2F\sin2\varphi+(A-B)\cos2\varphi,\quad \varphi = \varphi(t)\equiv\varphi_0\sin\nu t
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Согласно (1.3) в эти выражения должны войти члены, обусловленные отличием $T'$ от $T_0$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}(\Omega\mathcal{J}\omega_0\mathbf{e}) = \Omega\mathbf{e}\frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathcal{J}\omega_0)}{\partial\dot{q}_i} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{1}{2}\Omega^2(\mathcal{J}\mathbf{e})\mathbf{e}+\Omega(\mathcal{J}\omega_0)\mathbf{e}\right] =\\
= -\frac{1}{2}\Omega^2\left[\frac{\partial}{\partial q_i}(\mathcal{J}\mathbf{e})\mathbf{e}+(\mathcal{J}\mathbf{e})\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial q_i}\right]-\Omega\left[\frac{\partial}{\partial q_i}(\mathcal{J}\omega_0)\mathbf{e}+(\mathcal{J}\omega_0)\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial q_i}\right]
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Не выписывая самих уравнений, укажем их структурные элементы при значениях (1.1) и выражениях для $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$, указанных выше ($^T$ означает транспонирование):

$$d/dt\omega'_{0\dot{\psi}} = (\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t), -\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t), 0)^T$$

$$d/dt\omega'_{0\dot{\theta}} = (-\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t), -\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t), 0)^T$$

$$d/dt\omega'_{0\varphi} = (0, 0, 0)^T$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\omega\cos\omega t\cos\varphi(t) - \dot{\varphi}(t)\sin\omega t\sin\varphi(t),$$

$$-\omega\cos\omega t\sin\varphi(t) - \dot{\varphi}(t)\sin\omega t\cos\varphi(t), \quad \omega\sin\omega t)^T$$

$$\omega'_{0\dot{\psi}} = (\sin\varphi(t), \cos\varphi(t), 0)^T, \quad \omega'_{0\dot{\theta}} = (\cos\varphi(t), -\sin\varphi(t), 0)^T$$

$$\omega'_{0\dot{\varphi}} = (0, 0, 1)^T, \quad \omega'_{0\psi} = (0, 0, 0)^T$$

$$\omega'_{0\theta} = (0, 0, -\omega)^T, \quad \omega'_{0\varphi} = (\omega\cos\varphi(t), -\omega\sin\varphi(t), 0)^T$$

$$\mathbf{e}'_{\psi} = (\cos\omega t\cos\varphi(t), -\cos\omega t\sin\varphi(t), \sin\omega t)^T$$

$$\mathbf{e}'_{\theta} = (-\cos\omega t\sin\varphi(t), -\cos\omega t\cos\varphi(t), 0)^T$$

$$\mathbf{e}'_{\varphi} = (-\sin\omega t\sin\varphi(t), -\sin\omega t\sin\varphi(t), 0)^T$$

Далее, обозначим через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ орты осей $x$, $y$, $z$ связанной системы координат, тогда $\mathbf{r}_C = x_C\mathbf{i} + y_C\mathbf{j} + z_C\mathbf{k}$.

Вектор ускорения $\mathbf{w}_0$ предполагается направленным вдоль оси $Z$ и имеющим величину $\Omega^2 l$, где $l = O^*O$; таким образом, он имеет постоянную ориентацию в системе $OXYZ$. Вместе с тем, ориентация вектора $\mathbf{r}_C$ и его производных по эйлеровым углам в той же системе зависит лишь от $\psi$, $\theta$, $\varphi$ и не зависит от положения осей $XYZ$ относительно системы $Ox'y'z'$. Таким образом, скалярное произведение указанных векторов можно проводить, используя составляющие не в этой системе (где составляются лагранжевы уравнения), а в системе $OXYZ$.

Компоненты векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ по оси $Z$ равны, соответственно, $\sin\theta\sin\varphi$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\cos\theta$, так что для (1.1) имеем $(\mathbf{i}'_{\psi})_Z = (\mathbf{j}'_{\psi})_Z = (\mathbf{k}'_{\psi})_Z = (\mathbf{i}'_{\theta})_Z = (\mathbf{j}'_{\theta})_Z = (\mathbf{k}'_{\varphi})_Z = 0$, $(\mathbf{i}'_{\varphi})_Z = \cos\varphi(t)$, $(\mathbf{j}'_{\varphi})_Z = -\sin\varphi(t)$, $(\mathbf{k}'_{\theta})_Z = -1$.

Следовательно, к обобщенным силам $Q_{\psi}$, $Q_{\theta}$, $Q_{\varphi}$, играющим здесь роль функций управления, согласно (1.2), добавляются слагаемые

$$0, \quad m\Omega^2 l z_C, \quad m\Omega^2 l(y_C\sin\varphi(t) - x_C\cos\varphi(t)) \tag{1.7}$$

**2.** Использование гироскопов с несимметричным ротором возможно и в том случае, когда последний находится в кардановом подвесе; особенности его применения и уравнения движения изложены в [1], где он назван поворотным $U$-гироскопом.

Дополняя это исследование, рассмотрим задачу определения обобщенных сил и моментов, при которых ротор совершает колебания вокруг средней оси. Решение будет проводиться в углах Эйлера, так что карданов угол $\gamma$ – это эйлеров угол $\varphi$, и угловая скорость собственного вращения $\omega_r$ будет обозначаться $\omega'$; далее, указанная средняя ось – линия узлов; наконец, угловая скорость прецессии $\omega_e$ будет обозначаться $\Omega$, причем здесь она считается переменной, т.е. $\Omega = \Omega(t)$.

Оси инерции гироскопа полагаются главными, и пусть $A$, $B$, $C$ – соответствующие моменты инерции; тогда движение описывается уравнениями Эйлера. В отличие от п. 1 здесь изменения углов носят иной характер, вызванный конструктивными отличиями гироскопов: угол собственного вращения изменяется по закону $\varphi = \omega' t$, а угол нутации –

по исследуемому колебательному закону $\theta = \sigma \sin \nu t$, так что интегральное многообразие записывается в виде

$$\theta = \sigma \sin(\lambda\varphi) \quad (\lambda = \nu\omega'^{-1}), \quad \Omega = s(\omega'^{-1}\varphi) \tag{2.1}$$

Здесь, однако, не участвуют компоненты абсолютной угловой скорости $\omega$ в главных осях, тогда как имеется явная зависимость через $t$ эйлеровых углов их производных

$$\dot{\psi} = \Omega, \quad \dot{\theta} = \sigma\nu\cos\nu t, \quad \dot{\varphi} = \omega' \tag{2.2}$$

После подстановки в кинематические уравнения Эйлера получаем

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \Omega\sin(\sigma\sin\nu t)\sin\omega' t + \sigma\nu\cos\nu t\cos\omega' t \\ \omega_2 &= \Omega\sin(\sigma\sin\nu t)\cos\omega' t - \sigma\nu\cos\nu t\sin\omega' t \\ \omega_3 &= \Omega\cos(\sigma\sin\nu t) + \omega' \end{aligned} \tag{2.3}$$

Компонента гироскопического момента относительно средней оси равна $M^G = M_1^G \sin\varphi + M_2^G \cos\varphi$, где моменты относительно первых двух главных осей находятся из динамических уравнений Эйлера

$$M_1^G = (B - C)\omega_2\omega_3 - A\dot{\omega}_1, \quad M_2^G = (C - A)\omega_3\omega_1 - B\dot{\omega}_2 \tag{2.4}$$

В результате подстановки соответствующих формул определяется выражение для искомого момента

$$M^G = a_s(t)\sin 2\omega' t + a_c(t)\cos 2\omega' t + a_0(t) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} a_s(t) &= 1/4(B - A)[\Omega^2\sin(2\sigma\sin\nu t) + 4\Omega\omega'\sin(\sigma\sin nut) - 2\sigma\nu^2\sin nut] \\ a_c(t) &= (B - A)\sigma\nu\omega'\cos nut \\ a_0(t) &= -[(A + B + C)\Omega\sigma\nu\cos(\sigma\sin\nu t) + C\sigma\nu\omega']\cos\nu t \end{aligned} \tag{2.6}$$

Из этих выражений видно, что управляющий момент, требуемый для создания необходимых колебаний, имеет более сложный вид, чем тот, что указан в [1] – в предположении, что рамка неподвижна, т.е. если $\theta = \text{const}$, то $M^G = H\Omega[1 - (A - B)C^{-1}]\cos 2\omega' t$ ($H$ – кинетический момент).

Предполагая малыми величинами угловую скорость прецессии $\Omega$ и даже величину $\nu^2$, можно считать, что

$$\begin{aligned} &a_s \approx (B - A)\Omega\omega'\sin(\sigma\sin\nu t), \quad a_c \approx (B - A)\sigma\nu\omega'\cos\nu t \\ &a_0 \approx -C\sigma\nu\omega'\cos\nu t \end{aligned} \tag{2.7}$$

Теперь "выход" гироскопа состоит в определении величины $\Omega$ через измеренные амплитуду $\sigma$ и частоту $\nu$ колебаний угла нутации.

**3.** Рассмотрим, далее, другую задачу, возникающую при условии, что угол $\theta$ постоянен. Соответствующее движение называется тогда безнутационным, или обобщенной прецессией; если вдобавок ротор вращается с постоянной угловой скоростью, и что является естественным для ряда гироскопических приборов, а при этом предполагается (как в [1]), что измеряемая угловая скорость $\Omega$ постоянна, то прецессия называется регулярной. Это движение характерно для симметричных тел, но может совершаться и несимметричными телами, а выражения для необходимых обобщенных скоростей получены в [7] в наиболее общих предположениях, когда оси произвольные и не обязательно – главные.

Там же, в [7], приведены и уравнения движения тела в эйлеровых углах, которые выступают в роли обобщенных координат. Здесь аналогичные уравнения выводятся в применении к ситуации, возникающей при изготовлении приборов, а именно, ротор гироскопа мало отличается от симметричного и оси являются смещенными относительно главных. Тогда они оказываются произвольными, а соответствующие моменты инерции мало отличаются от моментов симметричного тела: $B = A + \xi$, где малыми величинами являются и центробежные моменты $D \equiv \delta$, $E \equiv \varepsilon$, $F \equiv \phi$. Кроме того, более распространенными в теории гироскопов являются кардановы углы [8], поэтому естественным представляется вывести лагранжевы уравнения движения в углах $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ [1], принимая ось внешней рамки за ось $Z$ неподвижной системы координат, тогда ось внутренней рамки будет линией узлов.

Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
&a_{11}\ddot\alpha + a_{12}\ddot\beta + a_{13}\ddot\gamma + b_{12}\dot\alpha\dot\beta + b_{13}\dot\alpha\dot\gamma + b_{22}\dot\beta^2 + b_{23}\dot\beta\dot\gamma + b_{33}\dot\gamma^2 = Q_\alpha \\
&a_{12}\ddot\alpha + a_{22}\ddot\beta + a_{23}\ddot\gamma + c_{11}\dot\alpha^2 + c_{13}\dot\alpha\dot\gamma + c_{23}\dot\beta\dot\gamma + c_{33}\gamma^2 = Q_\beta \\
&a_{13}\ddot\alpha + a_{23}\ddot\beta + a_{33}\ddot\gamma + d_{11}\dot\alpha^2 + d_{12}\dot\alpha\dot\beta + d_{22}\dot\beta^2 = Q_\gamma
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
&a = 1/2\xi\cos 2\gamma - \phi\sin 2\gamma + 1/2\xi + A - C \\
&b = -1/2\xi\sin 2\gamma - \phi\cos 2\gamma \\
&d = \delta\sin\gamma - \varepsilon\cos\gamma, \quad e = \varepsilon\sin\gamma + \delta\cos\gamma \\
&f = 2F\sin 2\gamma - \xi\cos 2\gamma, \quad a_{11} = e\sin^2\beta - a\sin 2\beta + C \\
&a_{12} = b\cos\beta - d\sin\beta, \quad a_{13} = -C\sin\beta - e\cos\beta \\
&a_{22} = 2A - C - a + \xi, \quad a_{23} = d, \quad a_{33} = C \\
&b_{12} = -2c_{11} = -a\sin 2\beta - 2e\cos 2\beta, \quad b_{13} = -2d_{11} = 2b\cos^2\beta - d\sin 2\beta \\
&b_{22} = -b\sin\beta - d\cos\beta, \quad b_{23} = (f - C)\cos\beta, \quad b_{33} = d\cos\beta \\
&c_{13} = -d_{12} = (f + C)\cos\beta - 2e\sin\beta, \quad c_{23} = -2d_{22} = -2b, \quad c_{33} = e
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $Q_\alpha$, $Q_\beta$, $Q_\gamma$ – обобщенные силы.

Заданное движение гироскопа является регулярной прецессией, т.е. описывается равенствами

$$\alpha = \Omega t, \quad \beta = \beta_0, \quad \gamma = \omega' t \tag{3.3}$$

Решение задачи аналогично [7] приводит к выражениям для обобщенных сил, которые произвольны всюду в фазовом пространстве переменных за исключением соответствующего интегрального многообразия, где они имеют вид

$$Q_\alpha = -\Omega\omega'\cos^2\beta_0(\xi\sin 2\gamma + 2\phi\cos 2\gamma) + \omega'(-2\Omega\sin\beta_0 + \omega')\cos\beta_0(\delta\sin\gamma - \varepsilon\cos\gamma)$$

$$Q_\beta = \Omega(-\Omega\sin\beta_0 + 2\omega')\cos\beta_0(\phi\sin2\gamma - (\xi/2)\cos2\gamma) +$$

$$+ (\Omega^2\cos2\beta_0 - 2\Omega\omega'\sin\beta_0 + \omega'^2)(\varepsilon\sin\gamma + \delta\cos\gamma) - C\Omega\cos\beta_0(-\Omega\sin\beta_0 + \omega') - \quad (3.4)$$

$$- 1/4(2A + \xi) - \Omega^2\sin2\beta_0$$

$$Q_\gamma = \Omega^2\cos^2\beta_0((\xi/2)\sin2\gamma + \phi\cos2\gamma) + (\Omega^2/2)\sin2\beta_0(\delta\sin\gamma - \varepsilon\sin\gamma)$$

Эти формулы дают возможность проанализировать влияние малых погрешностей в изготовлении "почти симметричного" ротора на моменты сил, под действием которых гироскоп совершает регулярную прецессию. Так, момент относительно оси собственного вращения равен, как известно, выражению $Q_\gamma$ и при значениях $\xi$, $\phi$, $\delta$, $\varepsilon$, малых одинакового порядка $k$ (а также $\Omega^2$), практически не влияет на движение. В то же время, момент относительно средней оси гироскопа, вычисляемый аналогично п. 2, имеет вид $(Q_\alpha + Q_\gamma\sin\beta)/\cos\beta$, а согласно формулам (3.4), представляет величину порядка $\omega'k$, что существенно при больших величинах $\omega'$; его влияние необходимо учитывать при проектировании гироскопических систем [9].

Автор благодарен И.А. Галиуллину и А.И. Черноморскому за консультации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
2. *Репников А.В., Сачков Г.П., Черноморский А.И.* Гироскопические системы. М.: Машиностроение, 1983. 319 с.
3. *Власов Ю.Б.* Гироскопы на новых физических принципах. Л.: Изд-во ЛЭТИ, 1976. 129 с.
4. *Брозгуль Л.И., Смирнов Е.Л.* Вибрационные гироскопы. М.: Машиностроение, 1970. 215 с.
5. *Аппельрот Г.Г.* Задача о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Университет. типогр., 1893. 112 с.
6. *Лунц Я.Л.* Введение в теорию гироскопов. М.: Наука, 1972. 296 с.
7. *Галиуллин И.А.* Регулярные прецессии твердого тела с одной закрепленной точкой // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 6–18.
8. *Ишлинский А.Ю., Борзов В.И., Степаненко Н.П.* Лекции по теории гироскопов. М.: Изд-во МГУ, 1983. 248 с.
9. *Коновалов С.Ф., Никитин Е.А., Селиванова Л.М.* Гироскопические системы. Проектирование гироскопических систем. Ч.3 / Под ред. Д.С. Пельпора. М.: Высш. шк., 1980. 128 с.


Москва

Поступила в редакцию
3.04.2003