

**АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ
ДЛЯ СОСТАВНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА
С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ КРУГОВОГО СЕКТОРА**

Рассматривается кусочно-однородный цилиндр, составленный из двух разнородных пьезоэлектрических цилиндров, склеенных между собой по общей части боковых поверхностей тонким электропроводящим клеем. Исследуется электроупругое поле, возникающее при продольном сдвиге цилиндра по направлению образующих. Материалами составных частей являются пьезоэлектрики класса 6 mm гексагональной симметрии, имеющие различные материальные постоянные. Главные оси симметрии составных частей параллельны образующим цилиндра.

Построены решения для случая, когда центральные углы поперечных сечений составляющих цилиндров равны. По полученным формулам для компонентов вектора напряженности электростатического поля и компонентов тензора механических напряжений исследовано электроупругое поле около особой точки контура поперечного сечения цилиндра, когда линия раздела областей, соответствующих различным материалам, проходит через эту точку.

Поведение электроупругого поля в окрестности особых точек, возникающего в однородных и кусочно-однородных пьезоэлектрических телах при антиплоской деформации, исследовано в [1–6].

1. В цилиндрической системе координат r, θ, z боковые грани составляющих цилиндров ограничены координатными поверхностями $\theta = -\beta, \theta = 0, \theta = \alpha$ и $r = a$. При этом $0 < (\alpha, \beta) < 2\pi, 0 < \alpha + \beta \leq 2\pi, a > 0$. Ось z является образующей цилиндра.

Электроупругое поле не зависит от координаты z и для малых деформаций в рамках линейной теории электроупругости описывается уравнениями [2, 3]:

$$\Delta u_z^{(i)}(r, \theta) = 0, \quad \Delta \Phi^{(i)}(r, \theta) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

где Δ – оператор Лапласа, u_z – упругое смещение, Φ – потенциал электростатического поля, индекс $i = 1$ соответствует области $\theta \in [-\beta; 0]$, а индекс $i = 2 - \theta \in [0; \alpha]$. Здесь предполагается, что отсутствуют массовые силы и пренебрегаются упругие свойства соединяющего слоя клея.

Уравнения состояния имеют вид [2, 8]:

$$\begin{aligned} \tau_{zr}^{(i)} &= c_{44}^{(i)} \gamma_{zr}^{(i)} - e_{15}^{(i)} E_r^{(i)}, & \tau_{\theta z}^{(i)} &= c_{44}^{(i)} \gamma_{\theta z}^{(i)} - e_{15}^{(i)} E_\theta^{(i)} \quad (i = 1, 2) \\ D_r^{(i)} &= e_{15}^{(i)} \gamma_{zr}^{(i)} + \varepsilon_1^{(i)} E_r^{(i)}, & D_\theta^{(i)} &= e_{15}^{(i)} \gamma_{\theta z}^{(i)} + \varepsilon_1^{(i)} E_\theta^{(i)} \\ \gamma_{zr}^{(i)} &= \partial u_z^{(i)} / \partial r, & \gamma_{\theta z}^{(i)} &= \partial u_z^{(i)} / r \partial \theta, & E_r^{(i)} &= -\partial \Phi^{(i)} / \partial r, & E_\theta^{(i)} &= -\partial \Phi^{(i)} / r \partial \theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\tau_{zr}^{(i)}, \tau_{\theta z}^{(i)}$ – компоненты тензора механических напряжений, $\gamma_{zr}^{(i)}, \gamma_{\theta z}^{(i)}$ – компоненты деформации, $E_r^{(i)}, E_\theta^{(i)}$ – компоненты вектора напряженности электростатического

поля, $D_r^{(i)}$, $D_\theta^{(i)}$ – компоненты вектора электрического смещения, $c_{44}^{(i)}$, $e_{15}^{(i)}$, $\epsilon_1^{(i)}$ – соответственно, модуль упругости, пьезомодуль и абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Зададим граничные условия

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(1)}(r, -\beta) = 0, \quad D_\theta^{(1)}(r, -\beta) = 0 \\ \tau_{\theta z}^{(2)}(r, \alpha) = 0, \quad D_\theta^{(2)}(r, \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

и условия на плоскости (линии) раздела смежных областей $[-\beta; 0]$, $[0; \alpha]$ [7]:

$$\Phi^{(i)}(r, 0) = 0, \quad u_z^{(1)}(r, 0) = u_z^{(2)}(r, 0) \quad (1.4)$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\theta z}^{(2)}(r, 0) \quad (1.5)$$

Условия (1.3), (1.5) можно переписать в форме

$$\partial u_z^{(1)}(r, -\beta)/\partial \theta = 0, \quad \partial \Phi^{(1)}(r, -\beta)/\partial \theta = 0 \quad (1.6)$$

$$\partial u_z^{(2)}(r, \alpha)/\partial \theta = 0, \quad \partial \Phi^{(2)}(r, \alpha)/\partial \theta = 0$$

$$c_{44}^{(1)} \partial u_z^{(1)}(r, 0)/\partial \theta + e_{15}^{(1)} \partial \Phi^{(1)}(r, 0)/\partial \theta = c_{44}^{(2)} \partial u_z^{(2)}(r, 0)/\partial \theta + e_{15}^{(2)} \partial \Phi^{(2)}(r, 0)/\partial \theta \quad (1.7)$$

Из (1.4) и (1.6) ясно, что задача электрического поля, до удовлетворения граничным условиям на границе $r = a$, разделена от общей задачи. А если пренебречь пьезоэлектрическим эффектом ($e_{15}^{(i)} = 0$), то из (1.7) ясно, что задача (1.1)–(1.7) будет полностью распадаться на две независимые.

2. Методом разделения переменных для уравнений (1.1) находим [9, 10]:

$$u_z^{(i)} = r^\lambda u^{(i)}(\theta), \quad \Phi^{(i)} = r^\lambda \varphi^{(i)}(\theta) \quad (i = 1, 2) \quad (2.1)$$

где λ – параметр, определяемый из условия нетривиальности решений (2.1), удовлетворяющих условиям (1.4), (1.6) и (1.7),

$$u^{(1)}(\theta) = C_{11} \cos \lambda \theta + C_{12} \sin \lambda \theta, \quad u^{(2)}(\theta) = C_{21} \cos \lambda \theta + C_{22} \sin \lambda \theta \quad (2.2)$$

$$\varphi^{(1)}(\theta) = C_{31} \cos \lambda \theta + C_{32} \sin \lambda \theta, \quad \varphi^{(2)}(\theta) = C_{41} \cos \lambda \theta + C_{42} \sin \lambda \theta$$

Удовлетворяя условиям (1.4), (1.6) и (1.7), для определения постоянных C_{11}, \dots, C_{42} в (2.2) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений, ненулевое решение которого возможно лишь в следующих случаях:

$$(a) \mu \sin \lambda \alpha \cos \lambda \beta + \cos \lambda \alpha \sin \lambda \beta = 0, \quad \mu = c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(1)}$$

$$\text{причем } \cos \lambda \alpha \neq 0, \quad C_{32} = 0, \quad C_{42} = 0$$

$$(b) \cos \lambda \alpha = 0, \quad C_{32} = 0, \quad C_{42} = 0$$

$$(c) \mu \sin \lambda \alpha \cos \lambda \beta + \cos \lambda \alpha \sin \lambda \beta = 0$$

$$\text{причем } \sin \lambda \alpha \neq 0, \quad C_{32} = 0, \quad C_{42} = 0 \quad (2.3)$$

$$(d) \sin \lambda \alpha = 0, \quad C_{32} = 0, \quad C_{42} = 0$$

$$(e) \cos \lambda \alpha = 0, \quad \cos \lambda \beta \neq 0, \quad C_{32} = 0, \quad C_{42} \neq 0$$

$$(f) \cos \lambda \alpha \neq 0, \quad \cos \lambda \beta = 0, \quad C_{32} \neq 0, \quad C_{42} = 0$$

Значения параметра λ , определяемые из (2.3), дают собственные числа задачи.

Уравнение (2.3) (a), (b) получено и в [9]. Оно имеет только действительные корни, следовательно, в представлении (2.1) $\lambda > 0$.

Построим общее решение задачи в случае, когда $\alpha = \beta$. При этом достаточно рассматривать только случаи (2.3) (a), (b), (e) и (f), т.к. случаи (c) и (d) дают те же самые собственные числа, что (a) и (b).

Определив собственные числа λ из (2.3), представим их в виде двух наборов:

$$\lambda_k = \frac{\pi}{2\alpha}(2k-1), \quad v_k = \frac{\pi k}{\alpha} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

которым соответствуют собственные функции

$$u_{1,k}^{(1)}(\lambda_k; \theta) = \left(\mu C_{22}^{(k)} + \frac{e_{15}^{(2)}}{c_{44}^{(1)}} C_{42}^{(k)} - \frac{e_{15}^{(1)}}{c_{44}^{(1)}} C_{32}^{(k)} \right) \sin \lambda_k \theta$$

$$u_{1,k}^{(2)}(\lambda_k; \theta) = C_{22}^{(k)} \sin \lambda_k \theta$$

$$\varphi_{1,k}^{(1)}(\lambda_k; \theta) = C_{32}^{(k)} \sin \lambda_k \theta, \quad \varphi_{1,k}^{(2)}(\lambda_k; \theta) = C_{42}^{(k)} \sin \lambda_k \theta$$

$$u_{2,k}^{(1)}(v_k; \theta) = C_{11}^{(k)} \cos v_k \theta, \quad u_{2,k}^{(2)}(v_k; \theta) = C_{11}^{(k)} \cos v_k \theta$$

$$\varphi_{2,k}^{(1)}(v_k; \theta) \equiv 0, \quad \varphi_{2,k}^{(2)}(v_k; \theta) \equiv 0$$

Просуммировав частные решения, соответствующие λ_k и v_k , согласно (2.1) получим общее решение задачи (1.1)–(1.7):

$$u_z^{(i)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} [r^{\lambda_k} u_{1,k}^{(i)}(\lambda_k; \theta) + r^{v_k} u_{2,k}^{(i)}(v_k; \theta)] \quad (2.4)$$

$$\Phi^{(i)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{\lambda_k} \varphi_{1,k}^{(i)}(\lambda_k; \theta) \quad (i = 1, 2) \quad (2.5)$$

3. Зададим на границе $r = a$ следующие условия:

$$\Phi^{(i)}(a, \theta) = \varphi^* f_1^{(i)}(\theta), \quad \tau_{zr}^{(i)}(a, \theta) = \tau f_2^{(i)}(\theta) \quad (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

где φ^* – постоянная, имеющая размерность потенциала электрического поля, $\tau = (c_{44}^{(1)} + c_{44}^{(2)})/2$, $f_1^{(i)}(\theta)$, $f_2^{(i)}(\theta)$ – произвольные функции. При этом функции $f_2^{(i)}(\theta)$ должны удовлетворять условию

$$\int_{-\alpha}^0 f_2^{(1)}(\theta) d\theta + \int_0^{\alpha} f_2^{(2)}(\theta) d\theta = 0 \quad (3.2)$$

выражающему равенству нулю суммы проекций действующих на цилиндрической поверхности бруса $r = a$ внешних касательных усилий на ось z .

Согласно (2.4), (2.5) и (3.1) будем иметь разложения

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(i)} \sin \lambda_k \theta = \varphi^* f_1^{(i)}(\theta) \quad (3.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin \lambda_k \theta + B_k \cos \nu_k \theta) = \tau f_2^{(1)}(\theta), \quad \theta \in [-\alpha; 0]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin \lambda_k \theta + \mu B_k \cos \nu_k \theta) = \tau f_2^{(2)}(\theta), \quad \theta \in [0; \alpha]$$

$$C_k^{(1)} = C_{32}^{(k)} a^{\lambda_k}, \quad C_k^{(2)} = C_{42}^{(k)} a^{\lambda_k}, \quad B_k = \pi c_{44}^{(1)} k C_{11}^{(k)} a^{\nu_k - 1} / \alpha$$

(3.4)

$$A_k = \pi(2k - 1)(c_{44}^{(2)} C_{22}^{(k)} + e_{15}^{(2)} C_{42}^{(k)}) a^{\lambda_k - 1} / 2\alpha$$

Коэффициентами Фурье разложений (3.3) будут

$$C_k^{(1)} = \frac{2\Phi^*}{\alpha} \int_{-\alpha}^0 f_1^{(1)}(\alpha) \sin \lambda_k \theta d\theta, \quad C_k^{(2)} = \frac{2\Phi^*}{\alpha} \int_0^{\alpha} f_1^{(2)}(\theta) \sin \lambda_k \theta d\theta$$

Умножим обе части равенства (3.4) на $\sin \lambda_n \theta$ ($n = 1, 2, \dots$) и проинтегрируем первое из них почленно в промежутке $[-\alpha; 0]$, а второе в промежутке $[0; \alpha]$. Складывая полученные равенства будем иметь

$$A_k = \frac{g_k}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n b_{nk}$$

$$g_k = \tau \int_{-\alpha}^0 f_2^{(1)}(\theta) \sin \lambda_k \theta d\theta + \tau \int_0^{\alpha} f_2^{(2)}(\theta) \sin \lambda_k \theta d\theta, \quad b_{nk} = \frac{2(1 - \mu)(2k - 1)}{\pi[4n^2 - (2k - 1)^2]}$$

Умножив обе части равенства (3.4) на $\cos \nu_n \theta$ ($n = 1, 2, \dots$) и повторив ту же процедуру, определим коэффициенты $B_k = 2q_k / \alpha(\mu + 1)$, где

$$q_k = \tau \int_{-\alpha}^0 f_2^{(1)}(\theta) \cos \nu_k \theta d\theta + \tau \int_0^{\alpha} f_2^{(2)}(\theta) \cos \nu_k \theta d\theta$$

Согласно (1.2), (2.4) и (2.5), в частности, для $E_{\theta}^{(i)}$ и $\tau_{\theta z}^{(i)}$ будем иметь формулы

$$E_{\theta}^{(i)}(r, \theta) = -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(i)} \lambda_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k - 1} \cos \lambda_k \theta \quad (i = 1, 2)$$

(3.5)

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k - 1} \cos \lambda_k \theta - B_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu_k - 1} \sin \nu_k \theta \right]$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_k - 1} \cos \lambda_k \theta - \mu B_k \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu_k - 1} \sin \nu_k \theta \right]$$

(3.6)

Подобные выражения получаются и для $E_r^{(i)}$, $\tau_{zr}^{(i)}$. Компоненты вектора напряженности и тензора механических напряжений при $\alpha > \pi/2$ в полюсе $r = 0$ обладают особен-

ностью вида $(r/a)^{\lambda_1 - 1}$. При этом показатель степени не зависит от электромеханических постоянных материалов. Коэффициенты особенностей (при степенях) у компонентов вектора напряженности электрического поля не зависят от электромеханических констант материалов, а у компонентов тензора механических напряжений зависят от $c_{44}^{(i)}$ и $e_{15}^{(i)}$.

4. Если на цилиндрической поверхности $r = a$ задавать граничные условия

$$D_r^{(i)}(a, \theta) = 0, \quad u_z^{(i)}(a, \theta) = u_0 f^{(i)}(\theta) \quad (i = 1, 2) \quad (4.1)$$

где u_0 – постоянная, имеющая размерность перемещения, $f^{(i)}(\theta)$ – произвольные функции, то согласно (4.1), (1.2), (2.4) и (2.5), получим разложения, неизвестными коэффициентами которых будут $A_k^* = C_{22}^{(k)} a^{\lambda_k - 1}$, $B_k^* = C_{11}^{(k)} a^{\nu_k - 1}$, $C_k^* = C_{32}^{(k)} a^{\lambda_k - 1}$, $D_k^* = C_{42}^{(k)} a^{\lambda_k - 1}$. Эти коэффициенты находим аналогично, как и в п. 3 при определении коэффициентов A_k и B_k в разложениях (3.4). Умножив обе части первых двух равенств (4.1) на $\sin \lambda_n \theta$ ($n = 1, 2, \dots$), проинтегрируем первое из них почленно в промежутке $[-\alpha; 0]$, а второе – $[0; \alpha]$ и сложим полученные равенства. Умножив затем эти же равенства (4.1) на $\cos \nu_n \theta$, повторим ту же процедуру. Осуществляя эти выкладки для последних двух уравнений (4.1), для определения коэффициентов A_k^*, \dots, D_k^* получаем систему четырех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, которую запишем символически в следующем виде [11]:

$$A_{kn} \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_n, \quad A_{kn} = \|a_{ij(kn)}\| \quad (i, j = 1, 2, 3, 4; k, n = 1, 2, \dots) \quad (4.2)$$

где $\mathbf{x}_k (A_k^*, B_k^*, C_k^*, D_k^*)$, $\mathbf{b}_n (b_{1n}, b_{2n}, b_{3n}, b_{4n})$ – векторы, A_{kn} – матрица. Здесь в каждом одночлене суммирование проводится по дважды повторяющемуся индексу k . Причем

$$b_{1n} = b_{2n} = 0$$

$$b_{3n} = \frac{u_0}{a} \int_{-\alpha}^0 f^{(1)}(\theta) \sin \lambda_n \theta d\theta + \frac{u_0}{a} \int_0^{\alpha} f^{(2)}(\theta) \sin \lambda_n \theta d\theta$$

$$b_{4n} = \frac{u_0}{a} \int_{-\alpha}^0 f^{(1)}(\theta) \cos \nu_n \theta d\theta + \frac{u_0}{a} \int_0^{\alpha} f^{(2)}(\theta) \cos \nu_n \theta d\theta$$

а, например

$$a_{11(kn)} = \begin{cases} (2n-1)(\mu e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})\alpha/2 & \text{при } k = n \\ 0 & \text{при } k \neq n \end{cases}$$

$$a_{12(kn)} = \frac{4k(2n-1)(e_{15}^{(2)} - e_{15}^{(1)})\alpha}{\pi[(2n-1)^2 - 4k^2]}$$

Ограничиваясь в разложениях (4.2) только членами с индексами $k, n = 1$, в первом приближении, для определения коэффициентов A_1^*, B_1^*, C_1^* и D_1^* будем иметь систему четырех уравнений.

Согласно (1.2), (2.4) и (2.5), в частности, для $E_\theta^{(i)}$ и $\tau_{\theta z}^{(i)}$ получим формулы:

$$E_\theta^{(1)}(r, \theta) \approx -\frac{\pi}{2\alpha} C_1^* \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_1-1} \cos \lambda_1 \theta, \quad E_\theta^{(2)}(r, \theta) \approx -\frac{\pi}{2\alpha} D_1^* \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_1-1} \cos \lambda_1 \theta \quad (4.3)$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) \approx \frac{\pi}{2\alpha} (c_{44}^{(2)} A_1^* + e_{15}^{(2)} D_1^*) \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda_1-1} \cos \lambda_1 \theta - \frac{\pi}{\alpha} c_{44}^{(i)} B_1^* \left(\frac{r}{a}\right)^{\nu_1-1} \sin \nu_1 \theta \quad (4.4)$$

$$C_1^* = \frac{h_7}{h_5} D_1^* + \frac{c_{44}^{(1)} h_6}{2\alpha h_5}, \quad D_1^* = \frac{c_{44}^{(1)} h_1 (2h_4 h_5 - h_2 h_6)}{2\alpha h_2 h_3} \quad (4.5)$$

$$A_1^* = \frac{1}{(\mu+1)c_{44}^{(1)}} (r_{15}^{(1)} C_1^* - e_{15}^{(2)} D_1^*) + \frac{2b_{31}}{(\mu+1)\alpha}$$

$$B_1^* = \frac{4}{3\pi(\mu+1)c_{44}^{(1)}} (e_{15}^{(1)} C_1^* - e_{15}^{(2)} D_1^*) - \frac{4(\mu-1)b_{31}}{3\pi\alpha(\mu+1)} + \frac{b_{41}}{\alpha}$$

$$h_j = (32 - 9\pi^2)(e_{15}^{(j)2} - e_{15}^{(1)} e_{15}^{(2)}) - 9\pi^2(\mu+1)c_{44}^{(1)} \varepsilon_1^{(1)} \quad (j = 1, 2)$$

$$h_3 = (32 - 9\pi^2)(e_{15}^{(2)2} - e_{15}^{(1)} e_{15}^{(2)}) [(e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})^2 - (\mu+1)c_{44}^{(1)}(\varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_1^{(2)})] + \\ + 9\pi^2(\mu+1)c_{44}^{(1)} [2(\mu+1)c_{44}^{(1)} \varepsilon_1^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} - e_{15}^{(1)} e_{15}^{(2)} (\varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_1^{(2)}) - \varepsilon_1^{(1)} e_{15}^{(2)2} - \varepsilon_1^{(2)} e_{15}^{(1)2}]$$

$$h_4 = 32(\mu-1)(e_{15}^{(1)} - e_{15}^{(2)})b_{31} - 18\pi^2(\mu e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})b_{31} - 24\pi(\mu+1)(e_{15}^{(1)} - e_{15}^{(2)})b_{41}$$

$$h_5 = e_{15}^{(1)2} + e_{15}^{(1)} e_{15}^{(2)} - (\mu+1)c_{44}^{(1)} \varepsilon_1^{(1)}$$

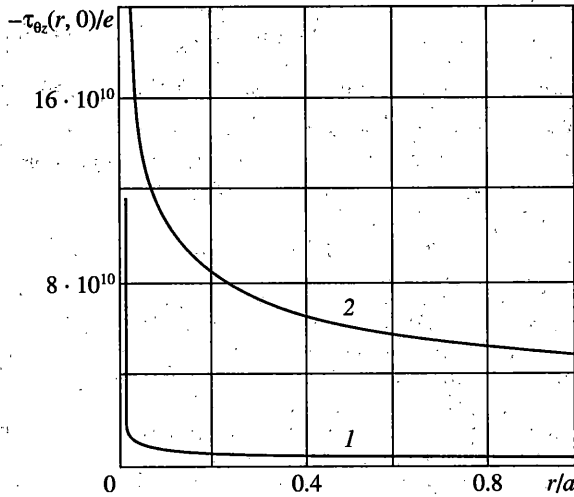
$$h_6 = 4(\mu e_{15}^{(1)} - e_{15}^{(2)})b_{31} + 8(\mu e_{15}^{(2)} - e_{15}^{(1)})b_{31} - 3\pi(\mu+1)(e_{15}^{(1)} + e_{15}^{(2)})b_{41}$$

$$h_7 = e_{15}^{(2)2} + e_{15}^{(1)} e_{15}^{(2)} - (\mu+1)c_{44}^{(1)} \varepsilon_1^{(2)}$$

В отличие от составляющих напряженности (3.5), приведенных в п. 3, коэффициенты особенностей составляющих напряженности (4.3) зависят от электромеханических постоянных материалов $c_{44}^{(i)}$, $e_{15}^{(i)}$ и $\varepsilon_1^{(i)}$, от геометрических параметров α , a и имеют сложную структуру.

Показатели степеней $(r/a)^{\lambda_1-1}$ в (4.4) и (4.5) те же самые, что и в (3.5) и (3.6).

5. На основе формул (3.6) построены графики изменений $\tau_{\theta z}(r, 0)$ на линии раздела двух материалов $\theta = 0$ (фигура). Кривая 1 соответствует случаю, когда составные части цилиндра изготовлены из пьезоэлектрических материалов, а кривая 2 - случаю, когда в этих материалах пренебрегаются пьезоэлектрические эффекты ($e_{15}^{(i)} = 0$). При этом было принято $\alpha = 3\pi/4$, $a = 0.04$ м, $\varphi^* = 10^8$ eB, где $e > 0$ - постоянная. Принято, также, что внешние касательные усилия на боковой поверхности цилиндра $r = a$ составляют уравновешенную систему сил. При этом принято, что напряжения $\tau_{r\theta}(a, \theta)$ симметричны относительно оси симметрии поперечного сечения цилиндра. Это значит,



Фигура

что если перейти к прямоугольным декартовым координатам x, y, z , совместив ось y с осью симметрии поперечного сечения, то $\tau_{rz}(a, \theta)$ будет четной функцией по x . При принятых ограничениях кроме условия (3.2) следует удовлетворить условию

$$\int_{-\alpha}^0 f_2^{(1)}(\theta) \cos \theta d\theta + \int_0^{\alpha} f_2^{(2)}(\theta) \cos \theta d\theta \quad (5.1)$$

выражающему равенство нулю суммы моментов внешних касательных усилий, действующих на боковой поверхности цилиндра $r = a$, относительно оси x .

Пусть

$$f_2^{(1)}(\theta) = \begin{cases} c_1, & -3\pi/4 \leq \theta \leq -\pi/2 \\ c_2, & -\pi/2 < \theta \leq -\pi/4 \\ -e, & -\pi/4 < \theta \leq 0 \end{cases}, \quad f_2^{(2)}(\theta) = \begin{cases} -e, & 0 < \theta \leq \pi/4 \\ c_2, & \pi/4 < \theta \leq \pi/2 \\ c_1, & \pi/2 < \theta \leq 3\pi/4 \end{cases} \quad (5.2)$$

где c_1, c_2 – постоянные.

Подставив выражения $f_2^{(i)}(\theta)$ из (5.2) в (3.2) и (5.1) и произведя интегрирование, будем иметь $c_1 = -\sqrt{2} e/2, c_2 = (1 + \sqrt{2}/2)e$.

Области $[-3\pi/4; 0]$ соответствует пьезокристалл сульфида кадмия (CdS), для которого $c_{44}^{(1)} = 1.49 \cdot 10^{10}$ Па, $e_{15}^{(1)} = -0.21$ Кл/м², а области $[0; 3\pi/4]$ – пьезокристалл титаната бария (BaTiO₃), для которого $c_{44}^{(2)} = 5.43 \cdot 10^{10}$ Па, $e_{15}^{(2)} = 21.3$ Кл/м².

При таких условиях, пренебрежение пьезоэффектом приводит к увеличению $|\tau_{\theta z}(r, 0)|$ на 93%.

Обозначим коэффициент для $\tau_{\theta z}(r, \theta)$ через $K(\theta) = A_1 \cos(\pi\theta/2\alpha)$. Он зависит от координаты θ и, следовательно, при приближении к полюсу $r = 0$ напряжение $\tau_{\theta z}$ стремится к бесконечности по-разному. Наибольшего по модулю значения $K(\theta)$ достигает при $\theta = 0$.

Заметим также, что если по формулам (3.6) перейти к однородному цилиндру ($c_{44}^{(1)} = c_{44}^{(2)}$), то, в силу симметрично расположенной нагрузки $\tau_{zr}(a, \theta)$, особенность в напряжениях τ_{zr} и $\tau_{\theta z}$ исчезнет. При этом $\tau_{\theta z}(r, 0) = 0$.

Автор выражает благодарность М. В. Белубекяну за внимание к работе и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галпчян П.В. Определение связанных электромеханических полей в цилиндрическом секторе из пьезокристалла // Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т. 43. № 5. С. 21–25.
2. Белубекян М.В., Галпчян П.В. Определение особенности связанного электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического тела в виде двугранного угла при продольном сдвиге // Изв. АН. МГТ. 1994. № 3. С. 102–108.
3. Galpchian P.V. Electroelastic field behavior in the vicinity of the edge of a piezoelectric body // Intern. J. Appl. Electromagn. and Mech. 1997. V. 8. P. 243–258.
4. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Об одной антиплоской задаче электроупругости для составного тела // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т. 48. № 4. С. 49–56.
5. Саргсян А.М., Хачикян А.С. Об особенностях напряжений в двух задачах электроупругости для кусочно-однородного тела // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. № 1. С. 40–45.
6. Фильштинский Л.А. Антиплоская деформация составного пьезоэлектрического пространства, ослабленного туннельными трещинами // Изв. РАН. МГТ. 1998. № 2. С. 59–68.
7. Галпчян П.В. Поведение электроупругого поля в окрестности ребра составного двугранного угла, возникающего при продольном сдвиге // 4-е междунар. совещание-семинар “Инженерно-физические проблемы новой техники”: Тез. докл. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1996. С. 134–135.
8. Партон В.Э., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
9. Чобанян К.С. Напряжение в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 339 с.
10. Галпчян П.В. Граничные задачи антиплоской деформации для цилиндра, составленного из различных материалов // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. № 1. С. 22–27.
11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука. Т. 3. Ч. 1. 1997. 323 с.

Ереван

Поступила в редакцию
16.07.2001