МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2004

УДК 531.383

© 2004 г. Н.В. КАЛЕНОВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОВЕРХНОСТНОГО ДЕБАЛАНСА РЕЗОНАТОРА ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА ПО ЕГО РЕАКЦИИ НА УГЛОВУЮ ВИБРАЦИЮ ОСНОВАНИЯ

В [1] исследовано влияние на движение резонатора волнового твердотельного гироскопа аномалий в распределении масс (дебалансов) в предположении, что все аномалии сосредоточены на кромке резонатора с произвольным распределением вдоль нее. В частности, было показано, что все параметры рассматриваемого дебаланса могут быть определены по реакции волны, возбужденной в резонаторе, на линейнуаю вибрацию его основания. В [2] проанализировано влияние аномалий распределения масс по всей поверхности резонатора. Показано, что поверхностный дебаланс не может быть полностью скомпенсирован балансировкой кромки. Полная характеристика поверхностного дебаланса требует большего количества независимых параметров, чем дебаланс кромки. В публикуемой работе проводится анализ поведения резонатора при угловой вибрации основания в предположении произвольного распределения аномалий по всей поверхности резонатора. Показывается, что по реакции волны на угловую вибрацию основания могут быть определены все дополнительные параметры дебаланса, распределенного по поверхности резонатора.

Для тонкой полусферической оболочки вторая форма колебаний записывается в виде:

$$u = 1/2\sin\alpha \,\mathrm{tg}^2\alpha/2[A\cos2(\varphi-\varphi_0)\sin\omega(t-t_0)+B\sin2(\varphi-\varphi_0)\cos\omega(t-t_0)]$$

$$v = 1/2A\sin\alpha \,\mathrm{tg}^2\alpha/2[A\sin2(\varphi-\varphi_0)\sin\omega(t-t_0)+B\cos2(\varphi-\varphi_0)\cos\omega(t-t_0)]$$

$$w = 1/2(2+\cos\alpha)\mathrm{tg}^2\alpha/2[A\cos2(\varphi-\varphi_0)\sin\omega(t-t_0)+B\sin2(\varphi-\varphi_0)\cos\omega(t-t_0)]$$

Если использовать обобщенные координаты C, S:

$$C = A\cos2\varphi_0\sin\omega(t-t_0)-B\sin2\varphi_0\cos\omega(t-t_0)$$

$$S = B\cos2\varphi_0\cos\omega(t-t_0)-A\sin2\varphi_0\sin\omega(t-t_0)$$

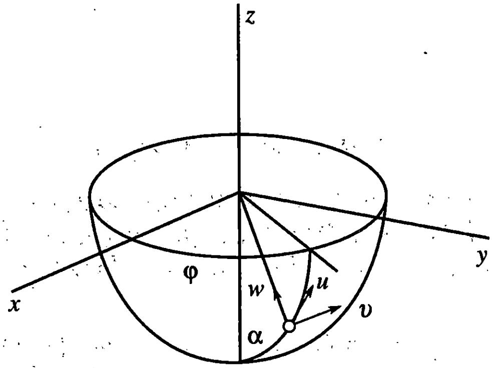
то эти же формулы можно записать в виде

$$u = 1/2\sin\alpha \,\mathrm{tg}^2\alpha/2[C\cos2\varphi+S\sin2\varphi]$$

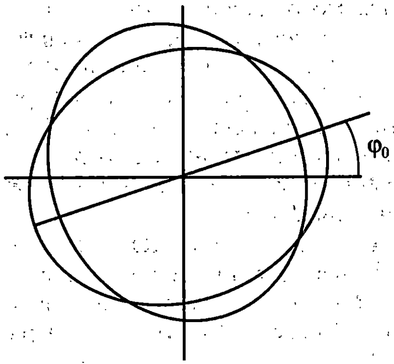
$$v = 1/2\sin\alpha \,\mathrm{tg}^2\alpha/2[C\sin2\varphi-S\cos2\varphi] \tag{1}$$

$$w = 1/2(2+\cos\alpha)\mathrm{tg}^2\alpha/2[C\cos2\varphi+S\sin2\varphi]$$

где A, φ_0, t_0 – произвольные постоянные, а смысл переменных u, v, w, α, φ объяснен на фиг. 1, 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

В декартовой системе координат положение точки со сферическими координатами α, φ, если α = 0 в нижней точке полусферы, задается радиусом-вектором

$$\mathbf{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sin\alpha\cos\varphi \\ \sin\alpha\sin\varphi \\ -\cos\alpha \end{Vmatrix}$$

и ее перемещения в этой системе координат можно выразить через перемещения u, υ, w соотношением

$$\Delta\mathbf{r} = \begin{Vmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha\cos\varphi & -\sin\varphi & -\sin\alpha\cos\varphi \\ \cos\alpha\sin\varphi & \cos\varphi & -\sin\alpha\sin\varphi \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u \\ \upsilon \\ w \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

Пусть основание вибрирует вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии резонатора и проходящей через центр полусферы.

Единичный вектор оси вибрации обозначим **e**, угловую амплитуду вибрации обозначим γ_0. К элементу массы dm с радиусом вектором **r** будет приложена сила инерции

$$\Delta\mathbf{F} = \gamma_0\omega^2\sin(\omega t)\mathbf{e}\times\mathbf{r}dm \qquad (3)$$

Суммарная работа сил инерции на перемещениях точек резонатора может быть выражена интегралом по поверхности полусферы

$$A = \int \Delta\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{F} = \gamma_0 \omega^2 \sin\omega t \int \Delta\mathbf{r} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) dm \tag{4}$$

С учетом выписанных выражений для $\mathbf{r}$ и $\Delta\mathbf{r}$, подынтегральное выражение приводится к виду

$$\Delta\mathbf{r} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) = 1/4R(1 + \cos\alpha)\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\alpha/2[C\sin(3\varphi - \varphi_e) - S\cos(3\varphi - \varphi_e)] -$$

$$- 1/4R(1 - \cos\alpha)\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\alpha/2[C\sin(\varphi + \varphi_e) - S\cos(\varphi + \varphi_e)]$$

где φ_e – угол ориентации оси вибрации.

Элемент массы можно выразить через поверхностную плотность дебаланса $dm = \rho(\varphi, \alpha)\sin\alpha d\alpha d\varphi$. Результат интегрирования по φ при фиксированном угле α удобно представить, используя обозначения, введенные в [2]:

$$\rho_{kc}(\alpha) = \int_\varphi \rho(\varphi, \alpha)\sin\alpha\cos k\varphi d\varphi, \quad \rho_{ks}(\alpha) = \int_\varphi \rho(\varphi, \alpha)\sin\alpha\sin k\varphi d\varphi$$

Интегрирование по φ проводится от 0 до 2π. Тогда можно записать

$$\int_\varphi \Delta\mathbf{r} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r})\rho(\varphi, \alpha)\sin\alpha d\varphi =$$

$$= 1/4R(1 + \cos\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha/2[C(\rho_{3s}\cos\varphi_e - \rho_{3c}\sin\varphi_e) - S(\rho_{3c}\cos\varphi_e + \rho_{3s}\sin\varphi_e)] - \tag{5}$$

$$- 1/4R(1 - \cos\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha/2[C(\rho_{1s}\cos\varphi_e + \rho_{1c}\sin\varphi_e) - S(\rho_{1c}\cos\varphi_e - \rho_{1s}\sin\varphi_e)]$$

Величины ρ с индексами, как сказано выше, функции угла α. Использование обозначений

$$d_{1c}^M = \int_\alpha \rho_{1c}(\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1 - \cos\alpha)d\alpha$$

$$d_{1s}^M = \int_\alpha \rho_{1s}(\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1 - \cos\alpha)d\alpha$$

$$d_{3c}^M = \int_\alpha \rho_{3c}(\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1 + \cos\alpha)d\alpha$$

$$d_{3s}^M = \int_\alpha \rho_{3s}(\alpha)\sin\alpha\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}(1 + \cos\alpha)d\alpha$$

где интегрирование по α проводится от 0 до $\pi/2$, позволяет результат полного интегрирования по поверхности полусферы записать в виде

$$\begin{aligned}\int \Delta\mathbf{r} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r})dm &= 1/4R[(d_{3s}^M\cos\varphi_e - d_{3c}^M\sin\varphi_e) - (d_{1s}^M\cos\varphi_e + d_{1c}^M\sin\varphi_e)]C - \\ &- 1/4R[(d_{3c}^M\cos\varphi_e + d_{3s}^M\sin\varphi_e) - (d_{1c}^M\cos\varphi_e - d_{1s}^M\sin\varphi_e)]S\end{aligned} \tag{6}$$

Выражение для элементарной работы δA на виртуальных перемещениях δC, δS может быть теперь представлено в форме

$$\begin{aligned}\delta A &= \gamma_0\omega^2\sin(\omega t)1/4R[(d_{3s}^M\cos\varphi_e - d_{3c}^M\sin\varphi_e) - (d_{1s}^M\cos\varphi_e + d_{1c}^M\sin\varphi_e)]\delta C - \\ &- \gamma_0\omega^2\sin(\omega t)1/4R[(d_{3c}^M\cos\varphi_e + d_{3s}^M\sin\varphi_e) - (d_{1c}^M\cos\varphi_e - d_{1s}^M\sin\varphi_e)]\delta S\end{aligned} \tag{7}$$

что соответствует следующим значениям обобщенных сил:

$$\begin{aligned}Q_c &= \gamma_0\omega^2\sin(\omega t)1/4R[(d_{3s}^M - d_{1s}^M)\cos\varphi_e - (d_{3c}^M + d_{1c}^M)\sin\varphi_e] \\ Q_s &= -\gamma_0\omega^2\sin(\omega t)1/4R[(d_{3c}^M - d_{1c}^M)\cos\varphi_e + (d_{3s}^M + d_{1s}^M)\sin\varphi_e]\end{aligned} \tag{8}$$

При дальнейшем анализе удобно использовать обобщенные силы, отнесенные к произведению приведенной массы на квадрат собственной частоты резонатора:

$$\begin{aligned}q_{\nu c} &= \frac{4Q_c}{3M_e\omega^2}, \quad q_{\nu s} = \frac{4Q_s}{3M_e\omega^2} \\ q_{\nu c} &= \frac{R\gamma_0}{3M_e}[(d_{1c}^M\sin\varphi_в - d_{1s}^M\cos\varphi_в) + (d_{3c}^M\sin\varphi_в + d_{3s}^M\cos\varphi_в)]\end{aligned} \tag{9}$$

$$q_{\nu s} = \frac{R\gamma_0}{3M_e}[(d_{1c}^M\cos\varphi_в + d_{1s}^M\sin\varphi_в) + (-d_{3c}^M\cos\varphi_в + d_{3s}^M\sin\varphi_в)] \tag{10}$$

Отнесем дебалансы к массе, приведенной к экватору: $d_{k\alpha}^{Me} = d_{k\alpha}^M/Me(k = 1.3;\ \alpha = c, s)$. Тогда

$$\begin{aligned}q_{\nu c} &= 1/3R\gamma_0[(d_{1c}^{Me}\sin\varphi_в - d_{1s}^{Me}\cos\varphi_в) + (d_{3c}^{Me}\sin\varphi_в + d_{3s}^{Me}\cos\varphi_в)] \\ q_{\nu s} &= 1/3R\gamma_0[(d_{1c}^{Me}\cos\varphi_в + d_{1s}^{Me}\sin\varphi_в) + (-d_{3c}^{Me}\cos\varphi_в + d_{3s}^{Me}\cos\varphi_в)]\end{aligned} \tag{11}$$

В обобщенных координатах C, S траектория движения резонатора имеет вид эллипса [1]. Аналитическая запись соответствующей траектории будет

$$\begin{aligned}C &= A\cos\theta\sin(\tau+\psi) - K\sin2\theta\cos(\tau+\psi) \\ S &= A\sin2\theta\sin(\tau+\psi) + K\cos2\theta\cos(\tau+\psi)\end{aligned}$$

Изменение во времени четырех параметров волны будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\dot A &= 1/2(q_{\nu c}\cos2\theta + q_{\nu s}\sin2\theta)\cos\tau_0 \\ \dot K &= 1/2(q_{\nu s}\cos2\theta - q_{\nu c}\sin2\theta)\sin\tau_0 \\ \dot\theta &= \frac{1}{2A}(-q_{\nu c}\sin2\theta + q_{\nu s}\cos2\theta)\cos\tau_0 \\ \dot\psi &= \frac{1}{2A}(q_{\nu c}\cos2\theta + q_{\nu s}\sin2\theta)\sin\tau_0 \\ \tau_0 &= \omega t_0\end{aligned}$$

Если вибрация сфазирована с $\dot C$ и $\dot S$, т.е. $\tau_0 = 0$, то эволюция волны имеет вид:

$$\dot A = 1/2(q_{\nu c}^x\cos2\theta + q_{\nu s}^x\sin2\theta), \quad \dot\theta = (-q_{\nu c}^x\sin2\theta + q_{\nu s}^x\cos2\theta)/(2A)$$

Если вибрация сфазирована с C и S, т.е. при $\tau_0 = \pi/2$, то эволюция волны имеет вид:

$$\dot\psi = (q^x_{vc}\cos 2\theta + q^x_{vs}\sin 2\theta)/(2A), \quad \dot K = 1/2(-q^x_{vc}\sin 2\theta + q^x_{vs}\cos 2\theta)$$

Наблюдая эволюцию волны при двух различных ее ориентациях, например при $\theta = 0$ и при $\theta = \pi/4$, можно определить амплитуды обобщенных сил q^x_{vc}, q^x_{vs} по измерениям эволюции любого из четырех параметров волны. Вибрация вокруг оси x создает силы ($\varphi_в = 0$):

$$q^x_{vc} = 1/3\gamma_0 R(d^{Me}_{3s} - d^{Me}_{1s}), \quad q^x_{vs} = 1/3\alpha_0 R(d^{Me}_{1c} - d^{Me}_{3c}) \tag{12}$$

Аналогично для вибрации вокруг оси y ($\varphi_в = \pi/2$):

$$q^y_{vs} = 1/3\gamma_0 R(d^{Me}_{3s} + d^{Me}_{1s}), \quad q^y_{vc} = 1/3\alpha_0 R(d^{Me}_{1c} + d^{Me}_{3c}) \tag{13}$$

Аналогичный анализ влияния вибрации вокруг оси z дает:

$$\begin{aligned} q^z_{vc} &= 2/3R\gamma_0(d^{Me}_{2s}\cos 2\varphi_в - d^{Me}_{2c}\sin 2\varphi_в) \\ q^z_{vs} &= 2/3R\gamma_0(d^{Me}_{2c}\cos 2\varphi_в + d^{Me}_{2s}\sin 2\varphi_в) \end{aligned} \tag{14}$$

Полученные выражения для обобщенных сил позволяют выполнить анализ влияния угловой вибрации точно так же, как это сделано для линейной вибрации в [1]. По эволюции волны при двух различных углах вибрации можно определить все четыре параметра дебаланса, вошедшие в выражения для обобщенных сил.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф.* О балансировке волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 4–17.
2. *Жбанов Ю.К., Каленова Н.В.* Поверхностный дебаланс волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 3. С. 11–18.

Москва

Поступила в редакцию
25.11.2003