МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2004

УДК 534.1

© 2004 г. В.А. ПРОУРЗИН

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ АМОРТИЗАЦИИ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ

Ставится и исследуется задача оптимальной амортизации упругих механических объектов. Механическая модель объекта представляется набором линейных осцилляторов, закрепленных на общей платформе. Требуется выбором усилия амортизатора минимизировать максимальное отклонение платформы при ограниченном спектре максимальных реакций линейных осцилляторов. Показано, что задача амортизации произвольного упругого объекта в случае поступательного движения может быть сведена к данной постановке. Построено решение для случая равномерно ограниченного спектра максимальных реакций.

В данной работе предложено обобщение задачи оптимальной амортизации твердого тела на случай упругих объектов. Известна следующая задача оптимальной защиты твердого тела от ударных нагрузок (см., например, [1–3]). Пусть x – отклонение защищаемого объекта от основания, $s(t)$ – ускорение основания (ударное воздействие), u – реакция амортизатора (управление). Для удобства величины s и u берутся с обратным знаком. Требуется выбором допустимого управления $u \in U$ минимизировать максимальное отклонение объекта:

$$J(u) = \max_t |x(t; u)| \to \min_{u \in U} \tag{1}$$

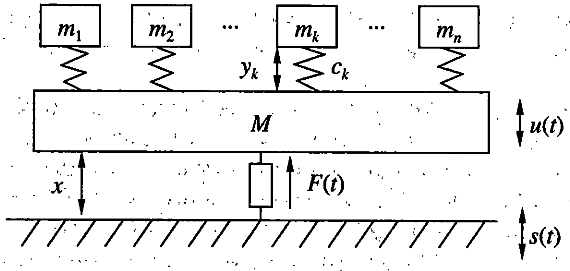
$$\ddot{x} + u(t) = s(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \tag{2}$$

$$U = \{u \colon |u(t)| \le \alpha\} \tag{3}$$

Показатель качества $J(u)$ имеет смысл максимального отклонения объекта от основания (или максимального хода амортизатора). Условие $|u(t)| \le \alpha$ задает критерий устойчивости объекта к ударному воздействию. Величина α называется допустимым ускорением. Данная задача достаточно полно исследована и получены ее решения при различных предположениях об ударных воздействиях и составе аргументов управляющего усилия.

В том случае, когда собственные упругие колебания объекта существенны, требуется новая постановка задачи, учитывающая динамические свойства объекта амортизации во всем диапазоне его собственных частот.

Рассматривается следующая "простейшая" механическая модель защищаемого упругого объекта (фиг. 1). Имеется жесткая платформа (корпус, рама и т.д.) массы М, к которой прикреплено n масс m_k с помощью линейных упругих связей с коэффициентами жесткости c_k. Платформа с помощью безынерционного амортизатора крепится к основанию, движущемуся поступательно с ударным ускорением $-s(t)$. Усилие, действующее со стороны амортизатора на платформу, обозначено через $F(t)$. Пусть x – от-



Фиг. 1

клонение платформы от основания, y_k – отклонение k-ой массы от платформы. Уравнения движения системы могут быть записаны в следующем виде:

$$\ddot{x} = \frac{1}{M}\left(F(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k\right) + s(t) \tag{4}$$

$$\ddot{y}_k + \frac{c_k}{m_k} y_k = -\frac{1}{M}\left(F(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

Вводятся следующие обозначения:

$$u(t) = -\frac{1}{M}\left(F(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k\right)$$

абсолютное ускорение платформы, $\omega_k = \sqrt{c_k/m_k}$ – частота k-го осциллятора. Теперь уравнения (4), (5) можно записать в более простом виде:

$$\ddot{x} + u(t) = s(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \tag{6}$$

$$\ddot{y}_k + \omega_k^2 y_k = u(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

Переход от ускорения $u(t)$ к силе $F(t)$ осуществляется с помощью выражения

$$F(t) = -Mu(t) - \sum_{k=1}^{n} m_k \omega_k^2 y_k(t)$$

где $y_k(t)$ – решения уравнений (7).

Пусть для каждого осциллятора задана величина предельно допустимого отклонения y_k^0. Неравенства

$$\max_t |y_k(t;\, u)| \le y_k^0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

определяют критерий ударостойкости системы.

Задачу оптимальной амортизации теперь можно сформулировать следующим образом. Найти управление $u^*(t)$ системой (6), (7) минимизирующее ход амортизатора $J(u)$ при ограничениях (8).

Используя понятие спектра максимальных реакций на ударное воздействие [4, 5], можно перейти к другой постановке данной задачи, более простой по форме и более общей по содержанию.

Рассматривается движение упругой линейной системы с одной степенью свободы (линейный осциллятор) с частотой ω при кинетиматическом воздействии со стороны основания. Ускорение основания есть интегрируемая на интервале $[0, \infty)$ функция времени $a(t)$, равная нулю при $t < 0$. Множество таких функций обозначается через Φ.

Спектром максимальных реакций $S(\omega; a)$ на воздействие $a(t) \in \Phi$ называется зависимость максимального значения модуля абсолютного ускорения осциллятора от его собственной частоты без учета демпфирования. Это зависимость называется также ударным спектром, спектром ускорений, а будучи отнесенной к максимуму абсолютной величины воздействия – коэффициентом динамичности. Ниже для краткости спектр максимальных реакций будет называться просто спектром.

Если $y(t, \omega; a)$ – смещение осциллятора с частотой ω относительно основания при воздействии $a(t)$, то спектр определяется выражением

$$S(\omega; a) = \max_{t>0}\left|\omega^2 y(t, \omega; a)\right| = \max_{t>0}\omega\left|\int_0^t a(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right| \tag{9}$$

Спектр для любой функции времени $a(t) \in \Phi$ является непрерывной неотрицательной функцией, определенной на всем множестве неотрицательных значений частоты. Выполняется следующее свойство преобразования масштабов. Пусть $a_1(t) = pa(q(t - t_0))$, где p, q, t_0 – вещественные числа, $q > 0$, $t_0 \geq 0$. Тогда

$$S(\omega; a_1) = |p|S(q^{-1}\omega; a) \tag{10}$$

Спектр дельта-функции $a(t) = \upsilon\delta(t)$ равен $S(\omega, a) = \upsilon\omega$. Спектр прямоугольного импульса $a(t)$ амплитуды a_0 и длительности T равен

$$S(\omega; a) = \begin{cases} 2a_0\sin\left(\dfrac{T}{2}\omega\right), & 0 \leq \omega \leq \dfrac{\pi}{T} \\ 2a_0, \quad \omega > \dfrac{\pi}{T} \end{cases} \tag{11}$$

На фиг. 2 приведен пример ударного воздействия, полученного на копровом стенде, и его спектр максимальных реакций (t[с]; f[Гц]).

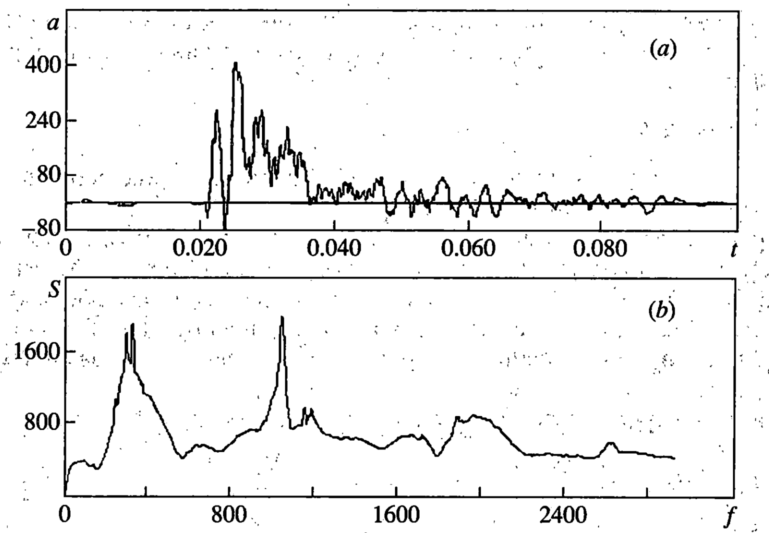
Заметим, что после умножения неравенств (8) на ω_k^2 они переходят в ограничения на значения спектра, вычисленного для $u(t)$ в точках ω_k. Если рассматривать спектр как оператор преобразования функции времени $a(t) \in \Phi$ в функцию частоты $S(\omega; a)$, то можно исключить из условия задачи уравнения (7) колебания осцилляторов. При этом возникает задача, аналогичная задаче (1)–(3), но с другими ограничениями на управляющее воздействие:

$$J(u) = \max_t|x(t; u)| \to \min_{u \in U} \tag{12}$$

$$\ddot{x} + u(t) = s(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \tag{13}$$

$$U = \{u \in \Phi: S(\omega; u) \leq \alpha(\omega), \omega \in \Omega\} \tag{14}$$

Зависимость $\alpha(\omega)$, заданная на некотором множестве Ω неотрицательных частот, имеет смысл допустимого спектра, задающего свойства ударостойкости рассматрива-



Фиг. 2

емого механического объекта. Для простейшей механической модели (4)–(8) множество $\Omega = \{\omega_k: k = 1, 2, \ldots, n\}$, $\alpha(\omega_k) = y_k^0\omega_k^2$.

В задаче (12)–(14) множество Ω может быть выбрано любым, как дискретным, так и содержащим интервалы частот или всю полуось $(0, \infty)$. Это связано в первую очередь с доступной информацией о точном наборе собственных частот оборудования, которая может либо быть неполна либо по каким-то причинам не приниматься в расчет. Использование непрерывного допустимого спектра обосновывается еще и тем, что основной экспериментальный метод приближенного построения допустимых спектров состоит в следующем.

Пусть собственные частоты и допустимый спектр $\alpha(\omega)$ объекта неизвестны. Пусть опытным путем установлено, что ударные воздействия $s_1(t)$, $s_2(t)$, ..., $s_m(t)$ являются допустимыми. Тогда непрерывная кривая $\tilde{\alpha}(\omega)$, полученная как огибающая сверху для спектров $S(\omega; s_1)$, $S(\omega; s_2)$, ..., $S(\omega; s_m)$ этих воздействий, может быть использована как оценка допустимого спектра. Очевидно, что условие $S(\omega; u) \le \tilde{\alpha}(\omega)$, $\omega \in (0, \infty)$ будет гарантировать сохранность объекта и его можно использовать вместо условия (14).

Задача оптимальной амортизации (12)–(14) сформулирована для простейшей механической схемы упругого объекта. Ниже показано, что задачу оптимальной амортизации для различных упругих объектов можно свести к данной постановке.

Рассматривается упругий объект, закрепленный на жесткой платформе, которая связана с основанием с помощью безынерционного устройства – амортизатора. Основание движется поступательно вдоль заданного направления с ускорением $-\ddot{s}(t)$. Платформа также движется поступательно вдоль направления ускорения основания. В качестве скалярного управления $u(t)$ выступает взятое с обратным знаком ускорение платформы. Ставится задача (12) минимизации максимального отклонения платформы от основания. Отклонение точек платформы от основания описывается кинематическим уравнением (13). Осталось показать, что условие ударостойкости объекта может быть представлено в виде (14).

Рассматривается случай, когда упругий объект описывается линейной многомассовой системой. Уравнения колебаний в координатах, связанных с платформой, имеют следующий вид:

$$M\ddot{\mathbf{z}} + C\mathbf{z} = M\mathbf{b}u(t) \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{z}$ – вектор обобщенных координат; M, C – симметрические положительно определенные матрицы; $\mathbf{b}$ – постоянный вектор.

В пространстве векторов $\mathbf{z}$ выделено множество Q_0 допустимых значений обобщенных координат. Выражение $\mathbf{z} \in Q_0$ задает условие ударостойкости объекта.

Пусть λ_k, $\mathbf{h}_k = (h_{k1}, h_{k2}, \ldots, h_{k,n})'$ – собственные числа и собственные векторы матрицы $M^{-1}C$. Здесь и далее штрих означает операцию транспонирования. Равенство $H'MH = E$, где $H = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$; E – единичная матрица, есть условие нормирования собственных векторов.

После замены переменных $\mathbf{z} = H\mathbf{y}$ система (15) перейдет в систему

$$\ddot{y}_k + \omega_k^2 y_k = \eta_k u(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

где $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$, коэффициенты $\eta_k = \mathbf{h}'_k M\mathbf{b}$. Вектор $\mathbf{h}_k$ определяет собственную форму колебаний конструкции с частотой ω_k, а переменная y_k – амплитуду ее колебаний. Коэффициент η_k определяет степень вовлечения k-ой собственной формы в колебания. Случай $\eta_k = 0$, означающий, что данная форма не вовлекается в колебания, исключается из рассмотрения.

В пространстве векторов $\mathbf{y}$ рассматривается множество $Q_1 = \{\mathbf{y}: \mathbf{y} = H^{-1}\mathbf{z}, \mathbf{z} \in Q_0\}$ и ударостойкость объекта задается условием $\mathbf{y} \in Q_1$. Можно выбрать положительные числа y_k^0 такие, что неравенства $|y_k| \le y_k^0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ описывают параллелепипед, вписанный в множество Q_1. Неравенства

$$\max_t |y_k(t)| \le y_k^0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \eta_k \ne 0$$

задают гарантированные условия ударостойкости объекта. Умножения каждого неравенства на ω_k^2 дает

$$S(\omega_k; \eta_k u) \le y_k^0 \omega_k^0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \eta_k \ne 0$$

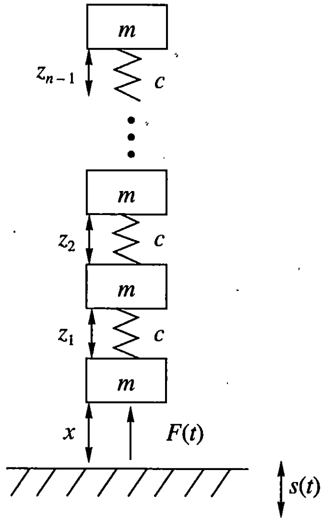
Используя свойство (10) и полагая $\alpha(\omega_k) = |\eta_k|^{-1} y_k^0 \omega_k^2$, получим условие ударостойкости в нужном виде

$$S(\omega; u) \le \alpha(\omega), \quad \omega \in \Omega = \{\omega_k: (k = 1, 2, \ldots, n), \eta_k \ne 0\}$$

Рассматривается упругий объект с распределенной массой. Известно, что колебания любой упругой конструкции могут быть разложены по собственным формам (модам) колебаний

$$w(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\mathbf{r}) y_k(t)$$

где w – смещение точки тела с вектором координат $\mathbf{r}$ относительно платформы в момент t вдоль заданного направления; $\varphi_k(\mathbf{r})$ – собственная форма колебаний на часто-



Фиг. 3

те ω_k: $y_k(t)$ – ее обобщенная координата удовлетворяющая уравнению линейного осциллятора (16).

Условия нормирования собственных форм и коэффициенты η_k вовлечения k-ой формы в колебания имеют вид

$$\int_G \rho(\mathbf{r})\varphi_j(\mathbf{r})\varphi_k(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \delta_{jk}, \quad \eta_k = \int_G \rho(\mathbf{r})\varphi_k(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

где G – множество точек тела, $\rho(\mathbf{r})$ – плотность, δ_{jk} – символ Кронекера.

Как и в предыдущем случае задаются ограничения на амплитуду колебаний каждой собственной формы, как условия ударостойкости объекта:

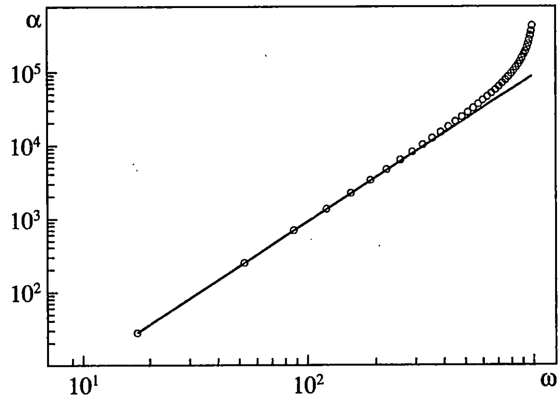
$$\max_t |y_k(t)| \le y_k^0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad \eta_k \ne 0$$

В результате получается условие ударостойкости вида (14) со счетным множеством частот Ω.

В качестве первого примера рассматривается конечномерная аппроксимация упругого стержня, имеющая вид цепочки из n одинаковых элементов массы m, соединенных между собой линейными упругими связями с жесткостью c (фиг. 3). Нижняя масса связана с основанием через амортизатор, развивающий усилие $F(t)$. Движение конструкции описывается системой уравнений (13), (15). Здесь x – отклонение нижней массы от основания, $z_k = Z_{k+1} - Z_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, Z_k – координата k-го элемента в абсолютной системе отсчета, $\mathbf{b} = (1, 0, \ldots, 0)'$, $M = E$, $C = cm^{-1}(A - B - B')$, диагональная матрица $A = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, 2)$, B – матрица, у которой все верхние наддиагональные элементы равны 1, а остальные равны нулю. Ускорение u и сила F связаны соотношением $F(t) = -mu(t) - cz_1(t)$.

Поскольку величины z_k являются аналогами деформаций, то естественно принять следующее условие ударопрочности:

$$\max_{k,t} |z_k(t)| \le z_0 \qquad (17)$$



Фиг. 4

где z_0 – предельно допустимая деформация. Условие (17) задает в пространстве векторов $\mathbf{z}$ множество допустимых значений Q_0, имеющее форму $(n-1)$-мерного куба.

После замены переменных $\mathbf{z} = H\mathbf{y}$ уравнения (15) примут вид (16), где $\eta_k = h_{k1}$. Вместо условий (17) рассматриваются следующие ограничения:

$$\max_{k,\,t}|y_k(t)| \le y_0 \tag{18}$$

В данном случае H – ортогональная матрица, $H'H = E$ и преобразование координат $\mathbf{z} = H\mathbf{y}$ является поворотом в пространстве R^{n-1}. Условие (18) задает $(n-1)$-мерный куб Q_1, со сторонами $2y_0$, повернутый относительно куба Q_0. Величина y_0 может быть найдена из того условия, что куб Q_1 вписан в куб Q_0. Пусть β есть максимальное значение модуля компонент вектора $H\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)'$. Тогда $y_0 = \beta^{-1}z_0$, $\alpha(\omega_k) = (|h_{k1}|\beta)^{-1}z_0\omega_k^2$.

На фиг. 4 приведен результат вычислений допустимого спектра (светлые точки) для рассматриваемой конечной аппроксимации стержня со следующими значениями параметров: $n = 40$, $m = 100$ кг, $c = 10^9$ Н/м, $y_0 = 0.005$ м. Расчеты показывают, что в данном примере, допустимый спектр может быть аппроксимирован параболой $\tilde{\alpha}(\omega) = \alpha(\omega_1)\omega_1^{-2}\omega^2$, которая на фиг. 4 нанесена сплошной линией.

В качестве второго примера рассматриваются продольные колебания призматического стержня, левый конец которого движется с заданным ускорением $u(t)$. Имеют место следующие выражения для частот собственных колебаний стержня, собственных форм и коэффициентов вовлечения [6]:

$$\omega_k = \frac{(2k-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{EF}{\rho}}, \quad \varphi_k(z) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}}\sin\frac{(2k-1)\pi z}{2L}, \quad \eta_k = \frac{2\sqrt{2\rho L}}{(2k-1)\pi}$$

где E, F, L, ρ – соответственно, модуль упругости, площадь сечения, длина и линейная плотность стержня; z – координата сечения стержня.

Для каждой моды колебаний можно записать следующую зависимость между максимальным по длине стержня напряжением $\sigma_k(t)$ и амплитудой $y_k(t)$ – решением уравнения (16):

$$\sigma_k(t) = \sqrt{\frac{2E}{FL}}\omega_k y_k(t)$$

Пусть задано предельно допустимое значение напряжения σ_0 такое, что неравенства $|\sigma_k(t)| \le \sigma_0$ есть условие ударной прочности стержня. Тогда можно записать ограничение на максимум амплитуды колебаний для каждой формы:

$$\max_t |y_k(t)| \le \frac{\sigma_0}{\omega_k}\sqrt{\frac{FL}{2E}}$$

После умножения этого выражения на квадрат частоты и очевидных преобразований, получается выражение для допустимого спектра

$$\alpha(\omega_k) = \frac{\sigma_0 L}{2}\sqrt{\frac{F}{E\rho}}\omega_k^2 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

которое хорошо согласуется с предыдущим примером.

Задача (12)–(14) есть обобщение задачи оптимальной амортизации твердого тела на случай упругих объектов. Условие корректности такого обобщения, очевидно, заключается в том, что задача (12)–(14) должна сводиться к задаче (1)–(3), если частоты, образующие множество Ω, достаточно велики. Следующее утверждение позволяет убедиться в выполнении этого условия.

Утверждение 1. Пусть функция $u(t) \in \Phi$ непрерывна и кусочно-дифференцируема на интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда

$$\lim_{\omega \to \infty} S(\omega; u) = \max_t |u(t)| \tag{19}$$

Доказательство. Из непрерывности $u(t)$ следует, что $u(0) = 0$. Интеграл в выражении (9) берется по частям

$$S(\omega; u) = \max_{t>0}\left|u(t) - \cos\omega t\int_0^t \dot u(\tau)\cos\omega\tau d\tau - \sin\omega t\int_0^t \dot u(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right|$$

В силу условий утверждения производная $\dot u(t)$ существует почти всюду и является абсолютно интегрируемой функцией на любом интервале $[0, t]$. Поэтому из известной леммы Римана о том, что для любой абсолютно интегрируемой на интервале $[a, b)$ функции $f(t)$ выполнено

$$\lim_{\omega \to \infty}\int_a^b f(t)\sin\omega t dt = 0, \quad \lim_{\omega \to \infty}\int_a^b f(t)\cos\omega t dt = 0$$

следует справедливость выражения (19). Утверждение доказано.

Из (19) следует, что для любого кусочно-дифференцируемого ускорения $u(t) \in \Phi$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется достаточно большое значение частоты ω_ε такое, что можно записать неравенство

$$\left|S(\omega; u) - \max_t |u(t)|\right| \le \varepsilon \text{ для всех } \omega > \omega_\varepsilon$$

Пусть множество Ω содержащее собственные частоты объекта таково, что $\omega > \omega_\varepsilon$ для всех $\omega \in \Omega$. Тогда с точностью до ε условие (14) сводится к условию (3):

$$\max_t |u(t)| \le \alpha = \min_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)$$

Следует заметить, что требования непрерывности и кусочной гладкости в утверждении 1 существенны. Например, для прямоугольного импульса $a(t)$ амплитуды a_0 и длительности T, имеющего разрыв в нуле, из выражения (11) следует, что

$$\lim_{\omega \to \infty} S(\omega; a) = 2a_0$$

Ниже рассматривается другой случай, когда задача (12)–(14) и задача (1)–(3) в определенном смысле эквивалентны.

Пусть о собственных частотах защищаемого объекта ничего не известно. Известно лишь, что допустимые ускорения на каждой частоте не меньше, чем α_0. В результате условия ударостойкости сводятся к равномерному ограничению на спектр

$$S(\omega;\, u) \le \alpha_0, \quad \omega \in [0, \infty) \tag{20}$$

Рассматривается ударное воздействие $s(t) \in \Phi$, для которого определены T_s – момент времени его окончания ($s(t) = 0,\ t > T_s$):

$$\upsilon_s = \int\limits_0^{\infty} s(t)dt \text{ – импульс воздействия}$$

и момент времени $t_s = 2|\upsilon_s|\alpha_0^{-1}$.

Рассматривается следующее множество Σ ударных воздействий. Ударное ускорение $s(t)$ принадлежит множеству Σ, если $T_s \le t_s$ и $\left|\int_0^t s(\tau)d\tau\right| \ge 0.5\alpha_0 t$ при $t \le t_s$. Данное множество включает в себя дельта-функции любой интенсивности, прямоугольные импульсы с амплитудами большими, чем $0.5\alpha_0$ и многие другие однополярные и разнополярные импульсы. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Управление

$$u^*(t) = \begin{cases} 0.5\alpha_0 \operatorname{sign}\upsilon_s, & 0 \le t \le t_s \\ 0, & t > t_s \end{cases}$$

решает задачу (12), (13), (20) с воздействием $s(t) \in \Sigma$.

Доказательство. Не уменьшая общности можно предположить, что $\upsilon_s > 0$ и, соответственно, $x(t;\, u^*) \ge 0$. Допустимость управления $u^*(t)$ следует из выражения (11) для его спектра. При управлении $u^*(t)$ и воздействии $s(t) \in \Sigma$ отклонение $x(t\colon u^*)$ достигает своего максимума в момент t_s.

Рассмотрим управление $u^{**}(t) = u^*(t) + \tilde{u}(t)$, где $\tilde{u}(t)$ – произвольная интегрируемая функция. Условие (20) допустимости управления $u^{**}(t)$ можно записать в виде:

$$\left|\omega\int\limits_0^t u^{**}(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right| \le \alpha_0 \tag{21}$$

для всех $t \in [0, \infty)$, $\omega \in [0, \infty)$. Рассматривая неравенство (21) значений времени из промежутка $(0, t_s]$, получим

$$\left|0.5\alpha_0(1-\cos\omega t) + \omega\sin\omega t\int\limits_0^t \tilde{u}(\tau)\cos\omega\tau d\tau - \omega\cos\omega t\int\limits_0^t \tilde{u}(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right| \le \alpha_0 \tag{22}$$

для всех $t \in (0, t_s]$, $\omega \in [0, \infty)$. В частности, неравенство (22) должно выполняться для всех значений $t \in (0, t_s]$ и $\omega \ge 0$, таких, что $\omega t = (2k-1)\pi$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). В этом случае неравенство (22) принимает вид

$$\left|\alpha_0 + \frac{(2k-1)\pi}{t}\int\limits_0^t \tilde{u}(\tau)\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{t}\tau\right)d\tau\right| \le \alpha_0$$

для всех $t \in (0, t_s]$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Отсюда вытекает условие

$$\int_0^t \tilde{u}(\tau)\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{t}\tau\right)d\tau \le 0 \tag{23}$$

для всех $t \in (0, t_s]$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Домножив каждое неравенство (23) на множитель $4/(2k-1)\pi$ и просуммировав их по всем $k = 1, 2, 3, \ldots$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\int_0^t \tilde{u}(\tau)\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{t}\tau\right)d\tau = \int_0^t \tilde{u}(\tau)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{t}\tau\right)\right]d\tau \le 0,$$

$$t \in (0, t_s]$$

Выражение, заключенное в квадратные скобки, есть разложение в ряд Фурье функции $\operatorname{sign}\tau$ на интервале $(-t, t)$. Отсюда следует выполнение условий

$$\int_0^t \tilde{u}(\tau)d\tau \le 0 \text{ и } \int_0^t\int_0^\tau \tilde{u}(\xi)d\xi d\tau \le 0$$

для всех $t \in (0, t_s]$. Теперь можно выписать следующую цепочку неравенств:

$$\max_{t\ge 0}|x(t;\, u^{**})| \ge x(t_s;\, u^{**}) = x(t_s;\, u^*) - \int_0^{t_s}\int_0^\tau \tilde{u}(\xi)d\xi d\tau =$$

$$= \max_{t\ge 0}|x(t;\, u^*)| - \int_0^{t_s}\int_0^\tau \tilde{u}(\xi)d\xi d\tau \ge \max_{t\ge 0}|x(t;\, u^*)|$$

Утверждение доказано.

В связи с данным утверждением можно сделать следующие замечания. Из доказательства следует, что утверждение 2 будет верно и для ограничений $S(\omega;\, u) \le \alpha_0$, $\omega \in [\pi/t_s, \infty)$. Видно, что функция $f(x, \dot{x}) = 0.5\alpha_0 \operatorname{sign}\dot{x}$ есть синтез оптимального управления для задачи (12), (13), (20) на множестве воздействий Σ.

Управление $u^*(t)$ есть решение задачи (1)–(3) для воздействий из множества Σ с допустимым ускорением $\alpha = 0.5\alpha_0$. Тем самым, используя утверждение 2 для воздействий из класса Σ, можно получить приближенное решение любой задачи вида (12–14), переходя к задаче (1)–(3) с допустимым ускорением $\alpha = 0.5\min\{\alpha(\omega)\colon \omega \in \Omega\}$.

Автор благодарит Н.Н. Болотника за плодотворное обсуждение данной работы и ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН 17 "Математическое моделирование интеллектуальные системы и управление механическими системами" (проект 3.1.4) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00171).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурецкий В.В.* Об одной задаче оптимального управления. Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 159–162.
2. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.

3. *Balandin D.V., Bolotnik N.N.* and Pilkey W.D. Optimal protection from impact, shock and vibration. Amsterdam: Gordon and Breach, 2001. 436 p.
4. *Харрис С.М., Крид Ч.И.* Справочник по ударным нагрузкам: Л.: Судостроение, 1980. 359 с.
5. Вибрация в технике: Справочник. М.: Машиностроение, 1981. Т. 5. 496 с.; Т. 6. 456 с.
6. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
18.06.2001