МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2004

УДК 534.31

© 2004 г. И.Е. ПОЛОСКОВ

О ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИССИПАТИВНОГО И СЛУЧАЙНЫХ МОМЕНТОВ

Рассматривается вращательное движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки под действием малого диссипативного, а также случайных аддитивного и мультипликативного моментов. Методом усреднения построена стационарная плотность распределения характеристик такого движения.

1. Введение. Запишем динамические уравнения Эйлера вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в следующем виде:

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\varepsilon \mathbf{D}\mathbf{x} + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{G}_1\boldsymbol{\xi} + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{G}_2\boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{f} = [-kx_2x_3, kx_3x_1, 0]^T, \quad k = (A-C)/B > 0 \\ \mathbf{G}_1 = \operatorname{diag}[g_{11}x_1, g_{12}x_2, g_{13}x_3], \quad \mathbf{G}_2 = \operatorname{diag}[g_{21}, g_{22}, g_{23}] \\ g_{ij} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ – вектор угловой скорости тела в связанной системе координат; $A = B$, C – главные центральные моменты инерции тела; ε – малый положительный параметр; $D = [d_{ij}]$ – 3×3-матрица с положительными элементами; $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T$ и $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]^T$ – независимые гауссовы векторные белые шумы с единичными интенсивностями; T – символ транспонирования.

О характере моментов в правой части системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) Стратоновича (1.1) можно сказать следующее: первый и второй члены определяют диссипативный момент сил сопротивления вращению тела и его возмущение, а третий характеризует чисто внешние флуктуации. Причинами появления случайных моментов являются [1]: турбулентные пульсации потока жидкости или газа; изменения характеристик сопротивляемости среды; тепловые, виброударные, гравитационные, магнитные и другие воздействия.

Полное вероятностное исследование системы (1.1) заключается в построении плотности вероятности вектора $\mathbf{x}$. К сожалению, в этой, как и во многих других задачах, найти аналитическое выражение этой плотности не удается. Но наличие в уравнениях (1.1) малого параметра ε позволяет воспользоваться одним из вариантов метода усреднения для стохастических систем [2] и получить в первом приближении совместную стационарную плотность распределения характеристик вращения тела.

2. Замена переменных. При $\varepsilon = 0$ общее решение порождающей системы имеет вид

$$\tilde{x}_1 = a\cos\psi, \quad \tilde{x}_2 = -a\sin\psi, \quad \tilde{x}_3 = \Omega/k, \quad \psi = \Omega t + \theta \tag{2.1}$$

где a, Ω, θ – произвольные постоянные. При $\varepsilon \neq 0$ характеристики вращения тела a, Ω, θ медленно изменяются. Для оценки этого изменения выполним соответствующую (2.1) замену переменных

$$x_1 = a(t)\cos\psi(t), \quad x_2 = -a(t)\sin\psi(t), \quad x_3 = \Omega(t)/k \tag{2.2}$$

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \operatorname{tg}\psi = -x_2/x_1, \quad \Omega = kx_3 \tag{2.3}$$

Чтобы построить систему СДУ Стратоновича [3] для переменных a, θ и Ω, продифференцируем по времени обе части равенств (2.3) и воспользуемся соотношениями (2.2)

$$\dot{a} = \dot{x}_1\cos\psi - \dot{x}_2\sin\psi, \quad \dot{\theta} = -\Omega - \frac{\dot{x}_1\sin\psi + \dot{x}_2\cos\psi}{a}, \quad \dot{\Omega} = k\dot{x}_3$$

Считаем, что $\psi = \Omega + \dot{\theta}$ с точностью до ε [4]. После подстановки вместо $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ правых частей уравнений (1.1) получим следующую систему СДУ:

$$\dot{a} = \upsilon_1 + \sum_{j=1}^{6} h_{1j}\zeta_j, \quad \dot{\theta} = \upsilon_2 + \sum_{j=1}^{6} h_{2j}\zeta_j, \quad \dot{\Omega} = \upsilon_3 + \sum_{j=1}^{6} h_{3j}\zeta_j$$

$$\boldsymbol{\upsilon} = [\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3]^T \equiv$$

$$\equiv \varepsilon \begin{bmatrix} \frac{\Omega}{k}(-d_{13}\cos\psi + d_{23}\sin\psi) - a(d_{11}\cos^2\psi + d_{22}\sin^2\psi) + a\cos\psi\sin\psi(d_{12} + d_{21}) \\ \frac{\Omega}{ak}((d_{23}\cos\psi + d_{13}\sin\psi) + \cos\psi\sin\psi(d_{11} - d_{22}) + d_{21}\cos^2\psi - d_{12}\sin^2\psi) \\ -d_{33}\Omega - ak(-d_{31}\cos\psi + d_{32}\sin\psi) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{H} = [h_{ij}] \equiv \sqrt{\varepsilon} \begin{bmatrix} a\cos^2\psi & a\sin^2\psi & 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ -\cos\psi\sin\psi & \cos\psi\sin\psi & 0 & -\frac{1}{a}\sin\psi & -\frac{1}{a}\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & \Omega & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \mathbf{g}_*$$

$$\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1, \ldots, \zeta_6]^T \equiv [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3]^T, \quad \mathbf{g}_* = [g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{21}, g_{22}, g_{23}]^T$$

3. ФПК-уравнение и его решение. Система уравнений (2.4) описывает векторный марковский процесс $[a, \theta, \Omega]^T$, совместная плотность распределения которого $p(a, \theta, \Omega, t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК-уравнению):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(K_{ij}p) - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_i}(K_i p), \quad p(\mathbf{y}, 0) = p_0(\mathbf{y})$$
$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T \equiv [a, \theta, \Omega]^T, \quad K_i = \upsilon_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial h_{ik}}{\partial y_j}h_{jk}, \quad K_{ij} = \sum_{k=1}^{6} h_{ik}h_{jk} \tag{3.1}$$

где K_i, K_{ij} – коэффициенты сноса и диффузии.

Заметим, что ФПК-уравнение (3.1) имеет вид

$$\partial p/\partial t = \varepsilon \mathbf{L} p \tag{3.2}$$

Это позволяет применить результаты [5] и усреднить обе части уравнения (3.2) по явно входящему времени

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varepsilon\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\tilde{K}_{11}p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(\tilde{K}_{22}p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \Omega^2}(\tilde{K}_{33}p) - \frac{\partial}{\partial a}(\tilde{K}_1 p) - \frac{\partial}{\partial \theta}(\tilde{K}_2 p) - \frac{\partial}{\partial \Omega}(\tilde{K}_3 p)\right] \equiv \varepsilon\tilde{L}p$$

$$\tilde{K}_{11} = \frac{3}{8}a^2\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2, \quad \tilde{K}_{22} = \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{2a^2}\beta^2, \quad \tilde{K}_{33} = g_{13}^2\Omega^2 + g_{23}^2k^2$$

$$\tilde{K}_1 = -\frac{a}{2}\gamma^2 + \frac{5}{16}a\alpha^2 + \frac{1}{4a}\beta^2, \quad \tilde{K}_2 = \frac{1}{2}(-d_{12} + d_{21}), \quad \tilde{K}_3 = \left(-d_{33} + \frac{1}{2}g_{13}^2\right)\Omega$$

$$\alpha^2 = g_{11}^2 + g_{12}^2, \quad \beta^2 = g_{21}^2 + g_{22}^2, \quad \gamma^2 = d_{11} + d_{22}$$

Будем искать стационарную плотность $p_s(a, \theta, \Omega)$, удовлетворяющую уравнению

$$\tilde{L}p_s = 0 \tag{3.3}$$

Вследствие того, что коэффициенты уравнения (3.3) не зависят от фазы θ, а $\tilde{K}_{11} = \tilde{K}_{11}(a)$, $\tilde{K}_1 = \tilde{K}_1(a)$, $\tilde{K}_{33} = \tilde{K}_{33}(\Omega)$, $\tilde{K}_3 = \tilde{K}_3(\Omega)$, то можно заметить, что плотность p_s (если она существует) должна иметь вид

$$p_s(a, \theta, \Omega) = p_{s1}(a)p_{s2}(\theta)p_{s3}(\Omega)$$

причем фаза θ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$: $p_{s2}(\theta) = 1/2\pi$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Маргинальные же плотности $p_{s1}(a)$ и $p_{s3}(\Omega)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{2}(\tilde{K}_{11}p_{s1})''_{aa} - (\tilde{K}_1 p_{s1})'_a = 0, \quad \frac{1}{2}(\tilde{K}_{33}p_{s3})''_{\Omega\Omega} - (\tilde{K}_3 p_{s3})'_\Omega = 0$$

соответственно, откуда эти плотности вычисляются по формулам

$$p_{s1}(a) = 8C_1 a\Delta_1^{\kappa_1}, \quad a \ge 0 \tag{3.4}$$

$$p_{s3}(\Omega) = C_2\Delta_2^{\kappa_2}$$

$$\Delta_1 = 3\alpha^2a^2 + 4\beta^2, \quad \kappa_1 = -4\gamma^2/3\alpha^2 - 2/3 \tag{3.5}$$

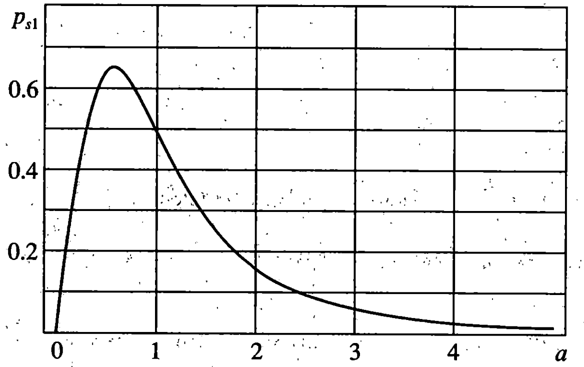
$$\Delta_2 = g_{13}^2\Omega^2 + g_{23}^2k^2, \quad \kappa_2 = -d_{33}/g_{13}^2 - 1/2$$

где C_1, C_2 – константы нормировки.

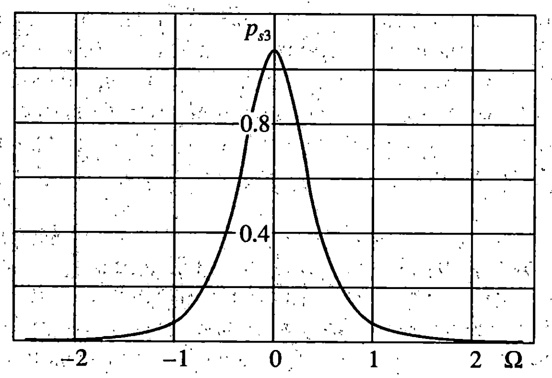
4. Анализ полученных результатов. Рассматривая вид плотностей p_{s1} и p_{s3}, можно заметить, что в первом приближении на значения этих плотностей влияют величины только диагональных элементов матрицы D, а существуют они только при $4\gamma^2 > \alpha^2$ и $d_{33} > 0$ соответственно (последнее предполагалось в постановке задачи). Начальные же моменты амплитуды a и частоты Ω порядка $m = 1, 2,\ldots$ конечны, если $8\gamma^2 > \alpha^2(2 + 3m)$ и $3d_{33} > mg_{13}^2$. При этом у плотности (3.5) все нечетные моменты равны нулю.

Оба распределения одномодальны, а их моды располагаются в точках

$$\alpha_* = 2\sqrt{\frac{\beta^2}{8\gamma^2 + \alpha^2}}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

и $\Omega_* = 0$, которые отвечают наиболее вероятным значениям соответствующих случайных величин.

Для наглядности приведем вид стационарных плотностей p_{s1} (a) (фиг.1) и p_{s3} (Ω) (фиг. 2) при $d_{11} = d_{22} = 0.5$, $d_{33} = 1.5$, $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 0.75$, $g_{13}^2 = g_{23}^2 = 1$ $(C_1 = 2.25, C_2 = 54/125\pi)$. Эти графики построены средствами системы аналитических вычислений Mathematica [6], с помощью которой были выполнены и все громоздкие аналитические выкладки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тертычный В.Ю.* Стохастическая стабилизация управляемого вращательного движения твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 9–14.
2. *Митропольский Ю.А., Коломиец В.Г.* Усреднение в стохастических системах // Укр. мат. ж. 1971. Т. 23. № 3. С. 318–345.
3. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
4. *Куряков В.А.* Об эволюции вращения динамически симметричного тела под действием постоянных и диссипативных моментов // Прикл. механика. 1993. Т. 29. № 3. С. 82–85.
5. *Хасьминский Р.З.* О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8. № 1. С. 3–25.
6. *Wolfram S.* The Mathematica Book. Cambridge: Univ. Press, 1999. 1470 p.

Пермь

Поступила в редакцию
26.11.2001