МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2004

УДК 539.374

© 2004 г. Б.Г. МИРОНОВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

В настоящей работе методом малого параметра рассматривается приближенное аналитическое решение пространственных задач теории идеальной пластичности в цилиндрической системе координат. Используется условие статической определимости пространственного изотропного идеальнопластического состояния – условие полной пластичности. За исходное нулевое приближение принимается решение Прандтля о сжатии слоя жесткими параллельными плитами [1].

1. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат ρ, θ, z имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho} = 0\\
&\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} = 0\\
&\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0
\end{aligned}\tag{1.1}$$

Условие полной пластичности запишем в виде [1]:

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma_\rho-\sigma+\frac{2k}{3}\right)\left(\sigma_\theta-\sigma+\frac{2k}{3}\right) = \tau_{\rho\theta}^2\\
&\left(\sigma_\theta-\sigma+\frac{2k}{3}\right)\left(\sigma_z-\sigma+\frac{2k}{3}\right) = \tau_{\theta z}^2\\
&\left(\sigma_z-\sigma+\frac{2k}{3}\right)\left(\sigma_\rho-\sigma+\frac{2k}{3}\right) = \tau_{\rho z}^2
\end{aligned}\tag{1.2}$$

или

$$\begin{aligned}
&(\sigma_\rho-\sigma+2k/3)\tau_{\theta z} = \tau_{\rho\theta}\tau_{\rho z}\\
&(\sigma_\theta-\sigma+2k/3)\tau_{\rho z} = \tau_{\rho\theta}\tau_{\theta z}\\
&(\sigma_z-\sigma+2k/3)\tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho z}\tau_{\theta z}\\
&\sigma = 1/3(\sigma_\rho+\sigma_\theta+\sigma_z)
\end{aligned}\tag{1.3}$$

В дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжений будем считать отнесенными к величине предела текучести k, величины, имеющие равномерность длины – к некоторому характерному линейному размеру η.

Положим

$$\rho = R + r, \quad \delta = \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\delta}{1+\delta r}, \quad R - \mathrm{const} \tag{1.4}$$

где δ – малый параметр. В дальнейшем индекс "ρ" заменим на "r". Согласно (1.1), (1.4) получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\delta}{1+\delta r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\delta(\sigma_r - \sigma_\theta)}{1+\delta r} = 0 \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\delta}{1+\delta r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\delta \tau_{r\theta}}{1+\delta r} = 0 \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\delta}{1+\delta r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\delta \tau_{rz}}{1+\delta r} = 0
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta\sigma_{ij}' + \delta^2\sigma_{ij}'' + \ldots + \delta^n\sigma_{ij}^{(n)} + \ldots \tag{1.6}$$

при этом имея в виду, что

$$\frac{\delta}{1+\delta r} = \delta - \delta^2 r + \delta^3 r^2 - \delta^4 r^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\delta^n r^{n-1} + \ldots \tag{1.7}$$

Положим также

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0(r, z), \quad \tau_{r\theta}^0 = \tau_{\theta z}^0 = 0 \tag{1.8}$$

Согласно (1.2), (1.3), (1.5), (1.6), (1.7) в исходном нулевом состоянии имеем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_z^0}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z} = 0 \\
\sigma_\theta^0 = \frac{1}{2}(\sigma_r^0 + \sigma_z^0 - 2k) = \sigma^0 - 2k/3
\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$(\sigma_r^0 - \sigma_z^0)^2 + 2(\tau_{rz}^0)^2 = 2k^2 \tag{1.10}$$

В первом приближении из (1.2)–(1.7) следует

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_r'}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}'}{\partial z} + \sigma_r^0 - \sigma_\theta^0 = 0 \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}'}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}'}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} + \tau_{rz}^0 = 0
\end{gathered} \tag{1.11}$$

$$\sigma' = \sigma_\theta' = \frac{1}{2}(\sigma_r' + \sigma_z')$$

$$(\sigma_r^0 - \sigma_z^0)(\sigma_r' - \sigma_z') + 4\tau_{rz}^0\tau_{rz}' = 0 \tag{1.12}$$

$$(\sigma_z^0 - \sigma_\theta^0)\tau_{\theta z}' - \tau_{rz}^0\tau_{r\theta}' = 0$$

Во втором приближении из (1.2)–(1.7) вытекает

$$\frac{\partial\sigma_r''}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}''}{\partial z}+\sigma_r'-\sigma_\theta'-(\sigma_r^0-\sigma_\theta^0) = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}''}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{\theta z}''}{\partial z}+2\tau_{r\theta}' = 0 \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}''}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z''}{\partial z}+\tau_{rz}'-\tau_{rz}^0 r = 0$$

$$(\sigma_r^0-\sigma_\theta^0)(\sigma_\theta''-\sigma'') = \tau_{r\theta}'^2,\quad \sigma'' = \frac{1}{3}(\sigma_r''+\sigma_\theta''+\sigma_z'')$$

$$(\sigma_z''-\sigma'')(\sigma_r^0-\sigma_\theta^0)+(\sigma_r'-\sigma')(\sigma_z'-\sigma')+(\sigma_r''-\sigma'')(\sigma_z^0-\sigma_\theta^0) = 2\tau_{rz}^0\tau_{rz}''+\tau_{rz}'^2, \tag{1.14}$$

$$(\sigma_r^0-\sigma_\theta^0)\tau_{\theta z}''+(\sigma_z'-\sigma')\tau_{\theta z}' = \tau_{rz}'\tau_{r\theta}'+\tau_{rz}^0\tau_{r\theta}''$$

В n-ом приближении из (1.2)–(1.7) получим

$$\frac{\partial\sigma_r^{(n)}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}^{(n)}}{\partial z}+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m(\sigma_r^{(n-m-1)}-\sigma_z^{(n-m-1)})r^m = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}^{(n)}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{\theta z}^{(n)}}{\partial z}+2\sum_{m=0}^{n-2}(-1)^m\tau_{r\theta}^{(n-m-1)}r^m = 0 \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}^{(n)}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z^{(n)}}{\partial z}+\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\tau_{rz}^{(n-m-1)}r^m = 0$$

$$(\sigma_r^0-\sigma_\theta^0)(\sigma_\theta^{(n)}-\sigma^{(n)})+\sum_{m=1}^{n-2}(\sigma_r^{(m)}-\sigma^{(m)})(\sigma_\theta^{(n-m)}-\sigma^{(n-m)}) = \sum_{m=1}^{n-1}\tau_{r\theta}^{(m)}\tau_{r\theta}^{(n-m)}$$

$$\sigma^{(n)} = \frac{1}{3}(\sigma_r^{(n)}+\sigma_\theta^{(n)}+\sigma_z^{(n)})$$

$$(\sigma_r^0-\sigma_\theta^0)(\sigma_z^{(n)}-\sigma^{(n)})+(\sigma_z^0-\sigma_\theta^0)(\sigma_r^{(n)}-\sigma^{(n)})+ \tag{1.16}$$

$$+\sum_{m=1}^{n-1}(\sigma_r^{(m)}-\sigma^{(m)})(\sigma_z^{(n-m)}-\sigma^{(n-m)}) = \sum_{m=0}^{n}\tau_{rz}^{(m)}\tau_{rz}^{(n-m)}$$

$$(\sigma_r^0-\sigma_\theta^0)\tau_{\theta z}^{(n)}+\sum_{m=0}^{n-1}(\sigma_r^{(m)}-\sigma^{(m)})\tau_{\theta z}^{(n-m)} = \sum_{m=0}^{n-1}\tau_{rz}^{(m)}\tau_{r\theta}^{(n-m)}$$

2. В исходном нулевом приближении, согласно Прандтлю [2], из уравнений (1.9) и (1.10) следует

$$\sigma_r^0 = r + b_0 + 2\sqrt{k^2 - z^2}, \quad \sigma_z^0 = r + b_0, \quad b_0 - \text{const} \tag{2.1}$$

$$\sigma_\theta^0 = r + b_0 + (\sqrt{k^2 - z^2} - k), \quad \tau_{rz}^0 = -z \tag{2.2}$$

В первом приближении, согласно (1.11), (1.12) и (2.1), (2.2) имеем

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma'_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial z} + (\sqrt{k^2 - z^2} + k) = 0 \\ \frac{\partial \tau'_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau'_{\theta z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau'_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} - z = 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\sqrt{k^2 - z^2}(\sigma'_r - \sigma'_z) = 2z\tau'_{rz} \tag{2.4}$$

$$(\sqrt{k^2 - z^2} + k)\tau'_{\theta z} + z\tau'_{r\theta} = 0 \tag{2.5}$$

Следуя идеям Прандтля, положим

$$\tau'_{rz} = \tau'_{rz}(z), \quad \tau'_{\theta z} = \tau'_{\theta z}(z), \quad \partial\tau'_{rz}/\partial z + (\sqrt{k^2 - z^2} + k) = -a_1, \quad a_1 - \text{const}$$

Тогда из (2.3)–(2.5):

$$\tau'_{\theta z} = c_1, \quad c_1 - \text{const}, \quad \tau'_{r\theta} = -\frac{c_1}{z}(\sqrt{k^2 - z^2} + k) \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} \tau'_{rz} = -(a_1 + k)z + \frac{1}{2}\left(z\sqrt{k^2 - z^2} + k^2 \arcsin\frac{z}{k}\right) + d_1 \\ \sigma'_z = a_1 r + z^2/2 + b_1 \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\sigma'_r = a_1 r + b_1 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{2z}{\sqrt{k^2 - z^2}}\left(-(a_1 + k)z + d_1 + \frac{k^2}{2}\arcsin\frac{z}{k}\right) \tag{2.8}$$

$$\sigma'_\theta = a_1 r + b_1 + z^2 + \frac{z}{\sqrt{k^2 - z^2}}\left(-(a_1 + k)z + d_1 + \frac{k^2}{2}\arcsin\frac{z}{k}\right) \tag{2.9}$$

Из (2.6)–(2.9) видно, что в первом приближении компоненты напряжений σ'_r, σ'_z, σ'_θ линейно зависят от r, а τ'_{rz}, $\tau'_{r\theta}$, $\tau'_{\theta z}$ не зависят от r.

Во втором приближении из (1.13), (1.14), (2.1), (2.2), (2.6)–(2.9) следует

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma''_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau''_{rz}}{\partial z} + f_1(z) - f_0(z)r = 0 \\ \frac{\partial \tau''_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau''_{\theta z}}{\partial z} + 2\varphi_1(z) = 0 \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial\tau''_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma''_z}{\partial z}+\psi_1(z)+zr = 0$$
$$(\sqrt{k^2-z^2}+k)(\sigma''_\theta-\sigma'') = \varphi_1^2(z) \tag{2.11}$$

$$\sigma''_\theta = \frac{1}{2}(\sigma''_r+\sigma''_z)+\frac{3\varphi_1^2(z)}{2(\sqrt{k^2-z^2}+k)} \tag{2.12}$$

$$\sqrt{k^2-z^2}(\sigma''_r-\sigma''_z) = 2z\tau''_{rz}+\left(-f_1^2(z)+\frac{k\varphi_1^2(z)}{\sqrt{k^2-z^2}+k}-\psi_1^2(z)\right) \tag{2.13}$$

$$(\sqrt{k^2-z^2}+k)\tau''_{\theta z}+f_1(z)g(z) = -(z\tau''_{r\theta}-\varphi_1(z)\psi_1(z))$$
$$f_i(z) = \sigma_r^{(i)}-\sigma_\theta^{(i)},\quad g(z) = \tau'_{\theta z},\quad \psi_{(i)}(z) = \tau_{rz}^{(i)},\quad \varphi_{(i)}(z) = \tau_{r\theta}^{(i)} \tag{2.14}$$

Положим

$$\tau''_{\theta z}=\tau''_{\theta z}(z),\quad \frac{\partial\tau''_{rz}}{\partial z}+f_1(z)-f_0(z)r = -m_0(z)$$

Тогда из (2.10)–(2.14) получим

$$\tau''_{\theta z} = -2\Phi_1(z),\quad \tau''_{r\theta} = \frac{1}{z}(2\Phi_1(z)(\sqrt{k^2-z^2}+k)-f_1(z)g(z)+\varphi_1(z)\psi_1(z)) \tag{2.15}$$

$$\tau''_{rz} = -F_1(z)+F_0(z)r-M_0(z) \tag{2.16}$$

$$\sigma''_z = (a_2-z^2/2)r-\Psi_1(z)-\int F_0(z)dz,\quad a_2-\mathrm{const} \tag{2.17}$$

$$\sigma''_r = \sigma''_z+(m_0(z)+z^2/2-a_2)r+n_0(z) \tag{2.18}$$

$$\sigma''_\theta = \sigma''_z+\frac{1}{2}\left(\left(m_0(z)+\frac{z^2}{2}-a_2\right)r+n_0(z)\right)+\frac{3\varphi_1^2(z)}{2(\sqrt{k^2-z^2}+k)} \tag{2.19}$$

где здесь и далее для любой функции $f(z)$ $F(z)=\int f(z)dz$. Функция $m_0(z)$ и $n_0(z)$ определяется из уравнений

$$\sqrt{k^2-z^2}(m_0(z)+z^2/2-a_2) = 2zF_0(z) \tag{2.20}$$

$$\sqrt{k^2-z^2}n_0(z) = -2z(F_1(z)+M_0(z))+\left(-f_1^2(z)-\varphi_1^2(z)+\frac{3\varphi_1^2(z)}{\sqrt{k^2-z^2}+k}\right) \tag{2.21}$$

Итак, во втором приближении компоненты напряжений σ''_r, σ''_z, σ''_θ, τ''_{rz} линейно зависят от r, а $\tau''_{r\theta}$, $\tau''_{\theta z}$ не зависят от r.

$$4(\sqrt{k^2-z^2}+k)\Phi_1(z) = -2zl_1(z)+g_0(z)$$

$$-2(\sqrt{k^2-z^2}+k)(2\Phi_2(z)-L_1(z)) = -2zs_0(z)+g_1(z)$$

Отметим, что в третьем приближении компоненты напряжений σ_r''', σ_θ''', σ_z''', τ_{rz}''' имеют квадратичную зависимость от r, а $\tau_{r\theta}'''$, $\tau_{\theta z}'''$ – линейную зависимость от r.

В n-ом приближении имеем

$$\frac{\partial\sigma_r^{(n)}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}^{(n)}}{\partial z}+f_{n-1}(z)+f_{n-2}(z)r+\ldots+f_0(z)r^{n-1} = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}^{(n)}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{\theta z}^{(n)}}{\partial z}+r(\varphi_{n-1}(z)+\varphi_{n-2}(z)r+\ldots+\varphi_1(z)r^{n-2}) = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}^{(n)}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z^{(n)}}{\partial z}+\psi_{n-1}(z)+\psi_{n-2}(z)r+\ldots+\psi_0(z)r^{n-1} = 0 \tag{2.22}$$

$$\sigma_\theta^{(n)} = \sigma^{(n)}+p_{n-3}(z)+p_{n-4}(z)r+\ldots+p_0(z)r^{n-3} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_r^{(n)}+\sigma_z^{(n)}+p_{n-3}(z)+p_{n-4}(z)r+\ldots+p_0(z)r^{n-3})$$

$$\begin{gathered}2\sqrt{k^2-z^2}(\sigma_r^{(n)}-\sigma_z^{(n)}) = 4z\tau_{rz}^{(n)}+q_{n-2}(z)+\ldots+q_0(z)r^{n-2}\\ 2(\sqrt{k^2-z^2}+k)\tau_{\theta z}^{(n)} = -2z\tau_{r\theta}^{(n)}+g_{n-2}(z)+\ldots+g_0(z)r^{n-2}\end{gathered} \tag{2.23}$$

где $f_i(z)$, $\varphi_i(z)$, $\psi_i(z)$, $p_i(z)$, $q_i(z)$, $g_i(z)$ – известные функции.

Положим

$$\tau_{rz}^{(n)} = -F_{n-1}(z)-\ldots-F_0(z)r^{n-1}-M_{n-2}(z)-\ldots-M_0(z)r^{n-2} \tag{2.24}$$

$$\tau_{\theta z}^{(n)} = -(\Phi_{n-1}(z)+\Phi_1(z)r^{n-2})-L_{n-2}(z)-\ldots-L_1(z)r^{n-3} \tag{2.25}$$

тогда из (2.22) и (2.23) получим

$$\sigma_r^{(n)} = n(z)+m_{n-2}(z)r+\ldots+\frac{m_1(z)}{n-1}r^{n-1} \tag{2.26}$$

$$\tau_{r\theta}^{(n)} = s(z)+l_{n-2}(z)r+\ldots+\frac{l_1(z)}{n-2}r^{n-2} \tag{2.27}$$

$$\begin{gathered}\sigma_z^{(n)} = \Psi_{n-1}(z)+\Psi_{n-2}(z)r+\ldots+\Psi_0(z)r^{n-2}+\\ +\int(F_{n-2}(z)+(n-1)F_0(z)r^{n-2}+M_{n-3}(z)+\ldots+(n-2)M_0(z)r^{n-3})dz.\end{gathered} \tag{2.28}$$

$$\begin{gathered}\sigma_\theta^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{t=0}^{n-2}(m_{n-2-t}+\Psi_{n-2-t}+\int(F_{n-3-t}+M_{n-4-t})dz+p_{n-4-t})+\right.\\ \left.+n(z)+\Psi_{n-1}(z)+\int(F_{n-2}+M_{n-3})dz+p_{n-3}\right)\end{gathered} \tag{2.29}$$

Согласно (2.23) для определения $m_i(z)$, $n(z)$, $l_i(z)$ и $s(z)$ имеем соотношения

$$\sqrt{k^2-z^2}\left(\frac{m_0(z)}{n-1}-\Psi_0(z)\right) = -2zF_0(z)$$

$$2\sqrt{k^2-z^2}\left(\frac{m_1(z)}{n-2}-\Psi_1(z)-(n-1)\int F_0(z)dz\right) = -4z(F_1(z)+M_0(z))+q_0(z)$$

$$2\sqrt{k^2-z^2}\left(\frac{m_2(z)}{n-3}-\Psi_2(z)-(n-2)\int (F_1(z)+M_0(z))dz\right) = -4z(F_2(z)+M_1(z))+q_1(z)$$

....

$$2\sqrt{k^2-z^2}(m_{n-2}-\Psi_{n-2}(z)-2\int (F_{n-3}(z)+M_{n-4}(z))dz) = -4z(F_{n-2}(z)+M_{n-3}(z))+q_{n-3}(z)$$

$$2\sqrt{k^2-z^2}(n(z)-\Psi_{n-1}(z)-\int (F_{n-2}(z)+M_{n-3}(z))dz) = -4z(F_{n-1}(z)+M_{n-2}(z))+q_{n-2}(z)$$

$$-4(\sqrt{k^2-z^2}+k)\Phi_1(z) = -\frac{2z}{n-2}l_1(z)+g_0(z)$$

$$-4(\sqrt{k^2-z^2}+k)(\Phi_2(z)+L_1(z)) = -\frac{2z}{n-3}l_2(z)+g_1(z)$$

....

$$-4(\sqrt{k^2-z^2}+k)(\Phi_{n-1}(z)+L_{n-2}(z)) = -2zs(z)+g_{n-2}(z)$$

Согласно (2.24)–(2.29) компоненты напряжений $\sigma_r^{(n)}$, $\sigma_\theta^{(n)}$, $\sigma_z^{(n)}$, $\tau_{rz}^{(n)}$ представляют собой полиномы (n–1)-й степени по переменной r с переменными коэффициентами, зависящими от переменной z, а компоненты напряжений $\tau_{r\theta}^{(n)}$, $\tau_{\theta z}^{(n)}$ – полиномы (n–2)-й степени от r.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
2. *Прандтль Л.* Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел // Теория пластичности. М.: ИЛ, 1948. С. 102–113.
3. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
4. *Ивлев Д.Д.* О пространственном течении идеальнопластического материала, сжатого шероховатыми плитами // Изв. АН. МТТ. 1998. № 1. С. 5–12.
5. *Григорьев И.П., Ивлев Д.Д.* О сдавливании круглого в плане идеально пластического слоя шероховатости плитами // Изв. АН. МТТ. 2000. № 1. С. 129–140.

Поступила в редакцию
5.03.2003