

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ДВУМЯ НЕРАВНЫМИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Рассматривается напряженно-деформированное состояние в многоугольной пластинке с двумя прямолинейными разрезами различной длины. Разрезы расположены вдоль вещественной оси ox . Концевые точки разрезов обозначим соответственно a_1, b_1 и a_2, b_2 (фиг. 1). Причем как видно из фигуры $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$.

Пластинка подвержена всестороннему равномерно распределенному растяжению интенсивности p . Начало координат поместим между концевыми точками b_1 и a_2 .

Решение указанной задачи проводится двумя методами: линейного сопряжения и путем использования отображающих функций.

При использовании первого метода напряжения и деформации в упругом поле, можно представить в виде суммы двух полей: первое из которых соответствует сплошному телу под действием приложенных нагрузок, а второе поле напряжений или деформаций соответствует телу с разрезами под действием симметричных нагрузок приложенных на поверхности разрезов (к берегам трещин). Используя этот прием решение поставленной задачи получим путем суперпозиции (путем наложения) решений следующих двух частных задач:

(А) определение напряженно-деформированного состояния в сплошной многоугольной пластинке от действий растягивающих (равномерно распределенных по всему контуру) усилий интенсивности P ;

(В) определение напряженно-деформированного состояния в пластике с двумя прямолинейными разрезами различной длины, когда на берегах разрезов трещин действует нагрузка (напряжение), которая находится из первой задачи т.е. из задачи А (напряжение в точках сплошной пластики, соответствующих напряжению на местах линии разрезов).

1. Как известно решение первой задачи (т.е. задачи А) сводится к определению двух аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ удовлетворяющих граничным условиям [1–3; 5]:

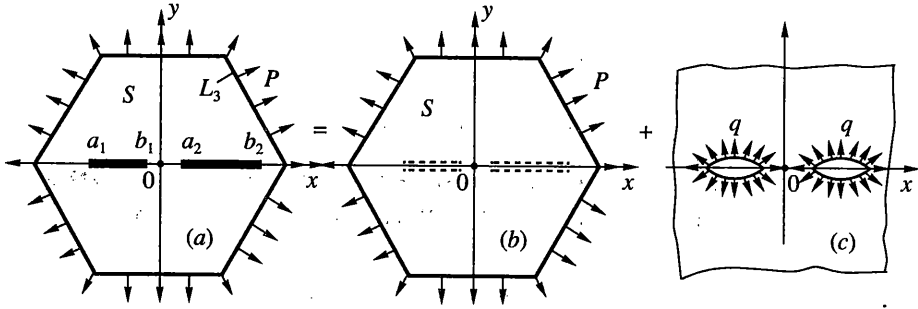
$$\varphi(t) + t \cdot \overline{\varphi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = -pt \quad \text{на } L_2 \quad (1.1)$$

где t – аффикс точек контура L_2 (многоугольника).

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярные всюду внутри наружного контура L_2 , для конечной односвязной области S , представим в виде [2; 5; 6]:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{z}{A}\right)^k, \quad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left(\frac{z}{A}\right)^k \quad (1.2)$$

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n a_{(n-k)/N}^{(k)}, \quad B_k = \sum_{n=k}^{\infty} \beta_n a_{(n-k)/N}^{(k)}$$



Фиг. 1

где звездочки над символом суммы означает, что индекс n при переходе к следующему слагаемому изменяется на N (число сторон многоугольника – число осей симметрии).

Все величины $a_n^{(k)}$ для каждого конкретного контура определяются согласно работы [2]. Внешность наружного контура L_2 отображается на внешность единичной окружности с помощью функции [3; 5]

$$z = A\zeta \sum_{n=0}^{\infty} m^n \zeta^{-n \cdot N}, \quad A = \frac{a+b}{2}, \quad m = \left| \frac{a-b}{a+b} \right| \quad (1.3)$$

здесь a и b радиусы окружностей соответственно описанной и вписанной в многоугольнике L_2 .

Учитывая в граничном условии (1.1), выражения (1.2) и (1.3), после математических преобразований и рассуждений получим следующие две системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов α_k и β_k (перейдя к новой переменной τ и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ):

$$V_2(v) + H_2(n) + V_3(n+2) + V_4(n+2) + V_7(n+2) = -PA m^n \varepsilon_4 \quad (1.4)$$

$$V_1(k) + H_1(n) + V_3(0)\varepsilon_2 + V_3(1)\varepsilon_3 + V_4(0)\varepsilon_2 + V_4(1)\varepsilon_3 + V_5(n-2)\varepsilon_1 + V_6(n-2)\varepsilon_1 + V_7(0)\varepsilon_2 + V_7(1)\varepsilon_3 + V_8(n-2)\varepsilon_1 = -AP\varepsilon_3 \quad (1.5)$$

$$V_1(v) = \sum_{k=v}^{\infty} ** A_k C_k^{(k-v)/N} m^{(k-v)/N}, \quad V_2(v) = \sum_{n=v}^{\infty} ** A_k C_k^{(k+v)/N} m^{(k+v)/N}$$

$\varepsilon = 0$ при $v = 0$; $\varepsilon = 1$ при $v \neq 0$:

$$V_3(n) = \sum_{k=n-NE(n/N)}^{n} ** k V_2(k) W_3\left(\frac{n-k}{N}\right), \quad W_3(k) = \sum_{k=n}^n \chi_{n-k} m^n$$

$$\chi_n + \sum_{n_1=1}^n \chi_{n-n_1} \lambda_{n_1} = 0, \quad \lambda_k = (1-kn)m^k$$

$$V_4(n) = \sum_{k=n}^{n} k V_2(k) W_4\left(\frac{n-k}{N}\right), \quad W_4(k) = \sum_{k=n}^{\infty} m^n \chi_{n+k}$$

$$V_5(n) = \sum_{k=n-NE n/N}^{n} k V_2(k) W_4\left(\frac{n+k}{N}\right) \varepsilon, \quad V_6(n) = \sum_{k=n}^{n} (-k) V_3(k) W_4\left(\frac{k-n}{N}\right)$$

$$V_7(n) = \sum_{k=n-NE n/N}^{n} (-k) V_3(k) W_3\left(\frac{n+k}{N}\right) \varepsilon, \quad V_8(n) = \sum_{k=n-NE n/N}^{n} (-k) V_3(k) W_4\left(\frac{n+k}{N}\right)$$

$$H_1(v) = \sum_{k=v}^{\infty} B_n C_n^{(k-n)/N} m^{(k-n)/N} \quad H_2(v) = \sum_{k=v}^{\infty} B_k C_n^{(k+n)/N} m^{(k+n)/N}$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leq 2 \\ 1 & \text{при } n > 2 \end{cases}, \quad \varepsilon_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq 2 \\ 1 & \text{при } n = 2 \end{cases}$$

$$\varepsilon_3 = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq 1 \\ 1 & \text{при } n = 1 \end{cases}, \quad \varepsilon_4 = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq N-1, 2N-1 \\ 1 & \text{при } n = N-1, 2N-1 \end{cases}$$

Решая систему уравнений (1.4) и (1.5) совместно, можно найти коэффициенты α_k и β_k . Для заданных конкретных профилей и относительных размеров сечения пластинки, из систем уравнений (1.4) и (1.5) определяются неизвестные коэффициенты α_k и β_k , а затем по формулам (1.2) определяются комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

Найдя функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, можно в любой точке сплошной пластинки, найти напряженно-деформированное состояние. Напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ в сплошной пластинке определяются формулами [1–3]:

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \quad (1.6)$$

В полярной системе координат ρ и θ будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{k(k-3)}{A^k} A_k \rho^{k-1} \cos(k-1)\theta - \frac{kB_k}{A_k} \rho^{k-1} \cos(k+1)\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{k(k-1)}{A^k} A_k \rho^{k-1} \cos(k-1)\theta + \frac{kB_k}{A_k} \rho^{k-1} \cos(k+1)\theta \end{aligned} \quad (1.7)$$

Приняв в этих формулах $\rho = a_j$ или $\rho = b_j$, а также $\theta = 0$, получим напряжения σ_r и σ_θ в точках сплошной пластинки, соответствующих местам разрезов вдоль оси ox .

Таким образом задача определения напряженно-деформированного состояния сплошной многоугольной пластинки решена.

Далее определим напряженно-деформированное состояние в пластинке с двумя неравными прямолинейными разрезами, расположенные вдоль оси ox , координаты концевых точек разрезов обозначим через a_1 , b_1 и $a_2 b_2$.

На берегах трещины приложены нагрузки (напряжения) найденные из предыдущей задачи А.

Задача решается методом приведения к задаче линейного сопряжения граничных значений. Как известно [3; 7–9] распределение напряжений в окрестности концов трещин, расположенные вдоль прямой, можно определить двумя функциями $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$:

$$\Phi(z) = \frac{P_n(z)}{X(z)} + \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{a_j}^{b_j} \frac{X(x)p(x)}{x-z} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{a_j}^{b_j} \frac{q(x)}{x-z} dx \quad (1.8)$$

$$\Omega(z) = \frac{P_n(z)}{X(x)} + \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{a_j}^{b_j} \frac{X(x)p(x)}{x-z} dx - \frac{1}{2\pi i} \int_{a_j}^{b_j} \frac{q(x)}{x-z} dx$$

$$P_n(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_n \quad (1.9)$$

Функция $P_n(z)$ есть полином степени не выше $n = 2$ (число разрезов). Для данной задачи $n = 2$, т.к. рассматривается случай двух прямолинейных трещин:

$$X(z) = \prod_{j=1}^n (z-a_j)^{1/2} (z-b_j)^{1/2} \quad (1.10)$$

В формулах (1.8) $p(x)$ и $q(x)$ заданные на разрезах $L_j = a_j b_j$ функции, удовлетворяющие на L_j условиями Гельдера и имеющие следующие значения:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1/2[\sigma_r^+ + \sigma_r^-] + 1/2[\tau_{r\theta}^+ + \tau_{r\theta}^-] \\ q(x) &= 1/2[\sigma_r^+ - \sigma_r^-] + 1/2[\tau_{r\theta}^+ - \tau_{r\theta}^-] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для рассматриваемой задачи (т.е. для двух трещин) из (1.9) и (1.10) получим:

$$\begin{aligned} P_n(z) &= C_0 z^2 + C_1 z + C_2 \\ X(z) &= \prod_{k=1}^2 (z-a_k)^{1/2} (z-b_k)^{1/2} = +\sqrt{(z-a_1)(z-b_1)(z-a_2)(z-b_2)} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь под функцией $X(z)$ подразумевается ветвь, для которой $\lim z^{-n} X(z) = 1$ при $z \rightarrow \infty$. При этом условии имеем

$$X(0) = (-1)^n \sqrt{a_k b_k} \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1.13)$$

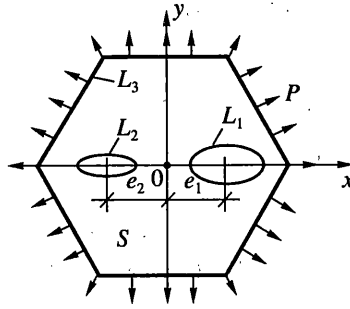
При больших $|z|$ функциях $X(z)$ имеем вид:

$$X(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots \quad (1.14)$$

Коэффициенты C_0, C_1, \dots, C_n полинома $P_n(z)$ определяются из условия однозначности перемещений при обходе замкнутых контуров охватывающих отрезки $L_j = a_j b_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

2. Приведем решение указанной задачи методом конформного отображения. Известно, что [2, 3, 10, 11] модель щели можно получить путем сохранения одно из полуосей эллипса постоянной, устремляя к нулю другую полуось. Поэтому рассмотрим напряженно-деформированное состояние многоугольной пластинки с двумя эллиптическими полостями. Контуры этих отверстий обозначим через L_1 и L_2 , а полуоси эллипса соответственно через a_1, b_1 и a_2, b_2 (фиг. 2).

Большие полуоси эллипсов лежат на оси ox (т.е. на вещественной оси).



Фиг. 2

Нетрудно заметить, что при $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$ получаем многоугольную пластинку с двумя неравными прямолинейными разрезами расположенные вдоль оси ox , т.е. ту задачу что рассматривалась, методом линейного сопряжения.

На пластинку действует равномерно распределенная по всему наружному контуру L_3 растягивающее усилие интенсивности p . Край отверстий считаем свободными от нагрузки. Граничные условия, для определения аналитических функций $\phi(z)$ и $\Psi(z)$, комплексного переменного $z = x + iy$, имеют следующий вид [2, 3, 5, 6, 12]:

$$\phi(t) + t\overline{\phi'(t)} + \overline{\psi(t)} = pt \quad \text{на } L_3 \quad (2.1)$$

$$\phi(t) + t\overline{\phi'(t)} + \overline{\psi(t)} = 0 \quad \text{на } L_2 \quad (2.2)$$

$$\phi(t) + t\overline{\phi'(t)} + \overline{\psi(t)} = 0 \quad \text{на } L_1 \quad (2.3)$$

Функции $\phi(z)$ и $\Psi(z)$, регулярные в области S рассматриваемой многоугольной пластинки представим в виде [2, 3, 5]:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \zeta_2^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{z}{A_3}\right)^k \\ \psi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta_1^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta_2^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} D_k \left(\frac{z}{A_3}\right)^k \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$d_k = \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n^{**} a_n^{(k)}, \quad D_k = \sum_{n=k}^{\infty} \gamma_n^{**} a_n^{(k)}$$

Внешность эллипсов L_1 и L_2 отображаются на внешность единичной окружности соответственно с помощью функций [3, 5, 12]:

$$\begin{aligned} z - e_1 &= A_1 \left(\zeta_1 + \frac{m_1}{\zeta_1} \right), \quad A_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad m_1 = \left| \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} \right| \\ z + e_2 &= A_2 \left(\zeta_2 + \frac{m_2}{\zeta_2} \right), \quad A_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad m_2 = \left| \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2} \right| \end{aligned} \quad (2.5)$$

Внешность наружного контура L_3 (многоугольника) отображается на внешность

единичной окружности с помощью функций [2, 3, 5, 12]:

$$z = A_3 \left(\zeta_3 + \frac{m_3}{\zeta_3^{N-1}} \right) = A_3 \zeta_3 \sum_{n=0}^{\infty} m_3^n \zeta_3^{-nN} \quad (2.6)$$

$$A_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}, \quad m_3 = \left| \frac{a_3 - b_3}{a_3 + b_3} \right|$$

где a_3 и b_3 радиусы вписанной или описанной окружности вокруг многоугольника L_3 .

Функции $\zeta_j = \chi_j(t)$, обратные к отображающимся функциям (2.5) и (2.6) имеют вид [2; 5; 6]:

$$\zeta_1 = \frac{z - e_1}{A_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \left(\frac{A_1}{z - e_1} \right)^{2n} \quad (2.7)$$

$$\zeta_2 = \frac{z + e_2}{A_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \left(\frac{A_2}{z + e_2} \right)^{2n}, \quad \zeta_3 = \frac{z}{A_3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)} \left(\frac{A_3}{z} \right)^{nN}$$

Все величины $a_n^{(i)}$, определяются для каждого конкретного контура L_j ($j = 1; 2; 3$) в отдельности согласно работы [2] (см. табл. 2.1).

Для того, чтобы найти значения функций $\phi(z)$ и $\psi(z)$ на контуре L_1 (т.е. на эллипсе с полуосями a_1 и b_1) нужно в формулах (2.4) выразить ζ_2 и z через переменную ζ_1 .

Для этого сначала переменную ζ_2 заменяем на основе (2.7) разложением следующего вида:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \zeta_2^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left[\frac{z + e_2}{A_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(3)}(n) \left(\frac{A_2}{z + e_2} \right)^{2n} \right]^{-k} = \sum_{v=0}^{\infty} B_v \left(\frac{1}{z + e_2} \right)^v \quad (2.8)$$

$$B_v = \sum_{k=0}^v * \beta_k A_2^v L_{(v-k)/2}^{(2)}$$

Все величины $L_n^{(2)}$ находятся из рекуррентной формулы [2, 5, 6, 13]:

$$L_n^{(2)} + \sum_{n_1=1}^n L_{n-n_1}^{(2)} a_2^{(k)}(n_1) = 0, \quad a_2^{(k)}(n) = \sum_{n_1=0}^n a_2^{(k-1)}(n_1) a_2^{(1)}(n_1) \quad (2.9)$$

$$a_2^{(1)}(n) = a_2(n)$$

Далее выражения $(z + e_2)^{-n}$ в (2.8) заменяем выражением $(z - e_1)^n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \zeta_2^{-k} &= \sum_{v=0}^{\infty} B_v \left(\frac{1}{z + e_2} \right)^v = \sum_{v=0}^{\infty} B_v \left(\frac{1}{z - e_1 + e_1 + e_2} \right)^v = \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} B_v \left(\frac{1}{e_1 + e_2} \right)^v \left(1 + \frac{z - e_1}{e_1 + e_2} \right)^{-v} = \sum_{v=0}^{\infty} B_v \left(\frac{1}{e_1 + e_2} \right)^v \sum_{n=0}^{\infty} C_{-v}^n \left(\frac{z - e_1}{e_1 + e_2} \right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - e_1)^n \sum_{v=0}^{\infty} B_v C_{-v}^n (e_1 + e_2)^{-n-v} = \sum_{n=0}^{\infty} (z - e_1)^n T_1(n) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$T_1(n) = \sum_{v=0}^{\infty} B_v C_{-v}^n (e_1 + e_2)^{-n-v}$$

Далее учитывая в (2.10) отображающую функцию (2.5), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \zeta_2^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-e_1)^n T_1(n) = \sum_{n=0}^{\infty} T_1(n) \left[A_1 \left(\tau + \frac{m_1}{\tau} \right) \right]^n = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v V_1(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} V_2(v) \quad (2.11)$$

$$V_1(v) = \sum_{n=v}^{\infty} T_1(n) C_n^{(n-v)/2} m_1^{(n-v)/2} A_1^n, \quad V_2(v) = \sum_{n=0}^{\infty} T_1(n) C_n^{(n+v)/2} m_1^{(n+v)/2} A_1^n$$

Аналогичным образом можно выписать разложения входящие во вторую из формул (2.4):

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta_2^{-k} = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v V_3(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} V_4(v)$$

$$V_3(v) = \sum_{n=v}^{\infty} T_2(n) C_n^{(n-v)/2} m_1^{(n-v)/2} A_1^n, \quad V_4(v) = \sum_{n=0}^{\infty} T_2(n) C_n^{(n+v)/2} m_1^{(n+v)/2} A_1^n \quad (2.12)$$

$$T_2(n) = \sum_{v=0}^{\infty} C_n^v E_v (e_1 + e_2)^{-n-v}, \quad E_v = \sum_{k=0}^{\infty} b_k A_2^v L_{(v-k)/2}^{(2)}$$

Преобразуем последние слагаемые входящие в правую часть равенств (2.4) сначала переменную z заменяем новой переменной $z - e_1$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{z}{A_3} \right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{z-e_1+e_1}{A_3} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{z-e_1}{A_3} \right)^k \left(1 + \frac{e_1}{z-e_1} \right)^k = \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} T_3(v) (z-e_1)^v + \sum_{v=0}^{\infty} T_4(v) (z-e_1)^{-v} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$T_3(v) = \sum_{k=v}^{\infty} d_k A_3^{-k} C_v^{k-v} e_1^{k-v}, \quad T_4(v) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k A_3^{-k} C_v^{k+v} e_1^{k+v}$$

Далее с учетом отображающей функции (2.5) будем иметь:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{z}{A_3} \right)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} T_3(v) (z-e_1)^v + \sum_{k=0}^{\infty} T_4(v) (z-e_1)^{-v} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} T_3(v) \left[A_1 \left(\tau + \frac{m_1}{\tau} \right) \right]^v + \sum_{v=1}^{\infty} T_4(v) \left[A_1 \left(\tau + \frac{m_1}{\tau} \right) \right]^{-v} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k V_5(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} V_6(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-v} V_7(k) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$V_5(k) = \sum_{v=k}^{\infty} T_3(v) C_v^{(v-k)/2} m_1^{(v-k)/2} A_1^v, \quad V_6(k) = \sum_{v=0}^{\infty} T_3(v) C_v^{(v+k)/2} m_1^{(v+k)/2} A_1^v$$

$$V_7(k) = \sum_{v=1}^k T_4(v) A_1^{-v} C_n^{(k-v)/2} m_1^{(k-v)/2}$$

Аналогично можно выписать и следующие разложения:

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k \left(\frac{z}{A_3} \right)^k = \sum_{v=0}^{\infty} T_5(v) (z - e_1)^v + \sum_{v=0}^{\infty} T_5(v) (z - e_1)^{-v} \quad (2.15)$$

$$T_5(v) = \sum_{k=v}^{\infty} D_k A_3^{-k} C_k^{k-v} e_1^{k-v}, \quad T_6(v) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k A_3^{-k} C_v^{k+v} e_1^{k+v}$$

С учетом (2.5) из (2.15) получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k \left(\frac{z}{A_3} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k V_8(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} V_9(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} V_{10}(k)$$

$$V_8(k) = \sum_{v=k}^{\infty} {}^* T_5(v) C_v^{(v-k)/2} m_1^{(v-k)/2} A_1^v, \quad V_9(k) = \sum_{v=k}^{\infty} {}^* T_5(v) C_v^{(v+k)/2} m_1^{(v+k)/2} A_1^v \quad (2.16)$$

$$V_{10}(k) = \sum_{v=1}^k {}^* T_6(v) A_1^{-v} C_n^{(k-v)/2} m_1^{(k-v)/2}$$

Таким образом функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на контуре L_1 (т.е. на эллипсе с полуосями a_1 и b_1) имеют следующие выражения:

$$\varphi(t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \tau^{-k} + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v V_1(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} V_2(v) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k V_5(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} V_6(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} V_7(k) \quad (2.17)$$

$$\psi(t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^{-k} + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v V_3(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} V_4(v) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k V_8(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} V_9(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} V_{10}(k) \quad (2.18)$$

Далее определим значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на контуре L_2 (т.е. на эллипсе с полуосями a_2 и b_2). Для того необходимо в формулах (2.4) выразить ζ_1 и z через переменную ζ_2 . Сначала переменные выразить ζ_1 и z нужно выразить через $z + e_2$, а затем используя отображающую функцию (2.5) после некоторых математических преобразований получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta_1^{-k} = \sum_{v=0}^{\infty} (z - e_1)^{-v} M_1(v) = \sum_{n=0}^{\infty} (z + e_2)^n M_2(n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} M_2(n) \left[A_2 \left(\tau + \frac{m_2}{\tau} \right) \right]^n = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k M_3(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_4(k) \quad (2.19)$$

$$M_1(v) = \sum_{k=0}^v \alpha_k A_1^v L_{(v-k)/2}^{(1)}, \quad M_2(n) = \sum_{v=0}^{\infty} (e_1 + e_2)^{-v-n} (-1)^{n+v} M_1(v) C_{-v}^n$$

$$M_3(k) = \sum_{n=k}^{\infty} M_2(n) A_2^n C_n^{(n-k)/2} m_2^{(n-k)/2}, \quad M_4(k) = \sum_{n=0}^{\infty} M_2(n) A_2^n C_n^{(n+k)/2} m_2^{(n+k)/2}$$

Аналогичным образом найдем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta_1^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k M_7(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_8(k)$$

$$M_5(v) = \sum_{k=0}^v a_k A_1^v L_{(v-k)/2}^{(1)}, \quad M_6(n) = \sum_{v=0}^{\infty} (e_1 + e_2)^{-v-n} (-1)^{n+v} M_1(v) C_{-v}^n \quad (2.20)$$

$$M_7(k) = \sum_{n=k}^{\infty} M_6(n) A_2^n C_n^{(n-k)/2} m_2^{(n-k)/2}, \quad M_8(k) = \sum_{n=k}^{\infty} M_6(n) A_2^n C_n^{(n+k)/2} m_2^{(n+k)/2}$$

Далее получим следующие разложения (выражая z через $z + e_2$, а затем $z + e_2$ через ζ_2).

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{z}{A_3}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (z + e_2)^v M_9(v) + \sum_{d=1}^{\infty} (z + e_2)^v M_{10}(v) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k M_{11}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_{12}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_{13}(k)$$

$$M_9(v) = \sum_{k=v}^{\infty} d_k A_3^{-k} (-1)^{k-v} C_n^{k-v} e_2^{k-v}, \quad M_{10}(v) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k A_3^{-k} (-1)^{k+v} C_n^{k+v} e_2^{k+v} \quad (2.21)$$

$$M_{11}(v) = \sum_{v=k}^{\infty} M_9(v) A_2^v C_v^{(v-k)/2} m_v^{(v-k)/2}, \quad M_{12}(v) = \sum_{v=0}^{\infty} M_9(v) A_2^v C_v^{(v+k)/2} m_v^{(v+k)/2}$$

$$M_{13}(v) = \sum_{v=1}^k M_{10}(v) A_2^{-v} C_v^{(k-v)/2} m_v^{(k-v)/2}$$

Аналогичным образом найдем следующие разложения:

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k \left(\frac{z}{A_3}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (z + e_2)^v M_{14}(v) + \sum_{v=1}^{\infty} (z + e_2)^{-v} M_{15}(v) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k M_{16}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_{17}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_{18}(k)$$

$$M_{14}(v) = \sum_{v=k}^{\infty} D_k A_3^{-k} (-1)^{k-v} C_k^{k-v} e_2^{k-v} \quad (2.22)$$

$$M_{15}(v) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k A_3^{-k} (-1)^{k+v} C_k^{k+v} e_2^{k+v}, \quad M_{16}(k) = \sum_{v=k}^{\infty} M_{14}(v) A_2^v C_v^{(v+k)/2} m_2^{(v+k)/2}$$

$$M_{17}(k) = \sum_{v=0}^{\infty} M_{14}(v) A_2^v C_v^{(v+k)/2} m_2^{(v+k)/2}, \quad M_{18}(k) = \sum_{v=1}^k M_{15}(v) A_2^v C_v^{(v-k)/2} m_2^{(v-k)/2}$$

Таким образом функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на внутреннем контуре L_2 (т.е. на эллипсе с полуосями a_2 и b_2) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi(t_2) = & \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k M_3(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_4(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \tau^{-k} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k M_{11}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_{12}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_{13}(k) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \psi(t_2) = & \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k M_7(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_8(k) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tau^k + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k M_{16}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_{17}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-k} M_{18}(k) \end{aligned} \quad (2.24)$$

И наконец, можем написать разложения для функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на внешнем контуре L_3 (т.е. на многоугольнике). Для этого необходимо переменные ζ_1 и ζ_2 в равенствах (2.4) выразить через переменную z , а затем использовать отображающую функцию (2.16). Таким образом будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta_1^{-k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left[\frac{z-e_1}{A_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \left(\frac{A_1}{z-e_1} \right)^{2n-k} \right] = \sum_{v=0}^{\infty} (z-e_1)^{-v} W_1(v) = \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} W_1(v) z^{-v} \left(1 - \frac{e_1}{z} \right)^{-v} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-v} W_2(k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} W_2(k) \left[A_3 \left(\tau + \frac{m_3}{\tau^{N-1}} \right) \right]^{-k} = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} W_3(v), \quad W_1(v) = \sum_{k=0}^v \alpha_k A_1^v L_{(v-k)/2}^{(1)} \\ W_2(k) &= \sum_{v=0}^k W_1(v) (-1)^{k-v} C_{-v}^{k-v} e_1^{k-v}, \quad W_3(v) = \sum_{k=0}^v \alpha_k A_1^v L_{(v-k)/2}^{(1)} m_3^{(v-k)/N} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Аналогично можно записать следующее разложение:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta_1^{-k} &= \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} W_6(v), \quad W_6(v) = \sum_{k=0}^v \alpha_k A_1^v L_{(v-k)/2}^{(1)} m_3^{(v-k)/N} \\ W_5(k) &= \sum_{v=0}^k W_4(v) (-1)^{k-v} C_{-v}^{k-v} e_1^{k-v}, \quad W_4(v) = \sum_{k=0}^v a_k A_1^v L_{(v-k)/2}^{(1)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Далее выпишем следующие разложения:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \zeta_2^{-k} &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left[\frac{z+e_2}{A_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} \left(\frac{A_2}{z+e_2} \right)^{2n-k} \right] = \sum_{v=0}^{\infty} (z+e_2)^{-v} B_v = \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} B_v z^{-v} \left(1 + \frac{e_2}{z} \right)^{-v} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} W_7(k) = \sum_{k=0}^{\infty} W_7(k) \left[A_3 \left(\tau + \frac{m_3}{\tau^{N-1}} \right) \right]^{-k} = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} W_8(v) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$W_8(v) = \sum_{k=0}^v W_7(k) A_3^{-k} C_{-k}^{(v-k)/N} m_3^{(v-k)/N}, \quad W_7(k) = \sum_{v=0}^k B_v C_{-v}^{k-v} e_2^{k-v}$$

Аналогично будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta_2^{-k} = \sum_{v=0}^{\infty} (z + e_2)^{-v} E_v = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} W_9(k) = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} W_{10}(v)$$

$$E_v = \sum_{k=0}^v b_k A_2^v L_{(v-k)/2}^{(2)}, \quad W_9(k) = \sum_{v=0}^k E_v C_{-v}^{k-v} e_2^{k-v} \quad (2.28)$$

$$W_{10}(v) = \sum_{k=0}^v b_k^{**} W_9(k) A_3^{-k} C_{-k}^{(v-k)/N} m_3^{(v-k)/N}$$

И наконец последние слагаемые в формулах (2.4) преобразуется к виду (с учетом отображающей функции):

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{z}{A_3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\tau + \frac{m_3}{\tau^{N-1}}\right)^k = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v W_{11}(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} W_{12}(v) \quad (2.29)$$

$$W_{11}(v) = \sum_{k=v}^{\infty} b_k^{**} d_k C_k^{(k-v)/N} m_3^{(k-v)/N}, \quad W_{12}(v) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k C_k^{(k+v)/N} m_3^{(k-v)/N}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k \left(\frac{z}{A_3}\right)^k = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v W_{13}(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} W_{14}(v) \quad (2.30)$$

$$W_{13}(v) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{**} D_k C_k^{(k-v)/N} m_3^{(k-v)/N}, \quad W_{14}(v) = \sum_{k=v}^{\infty} D_k C_k^{(k+v)/N} m_3^{(k+v)/N}$$

И так функции $\phi(z)$ и $\psi(z)$ на контуре L_2 (т.е. на многоугольнике) имеют следующие разложения:

$$\phi(t_3) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} W_3(k) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} W_8(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v W_{11}(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} W_{12}(v) \quad (2.31)$$

$$\psi(t_3) = \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} W_6(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} W_{10}(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v W_{13}(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} W_{14}(v) \quad (2.32)$$

Теперь перейдем к определению выражений $t\overline{\phi'(t)}$ на каждом из контуров L_j ($j = 1, 2, 3$). Для этого выпишем значения функции $\phi(t)$ на каждом из контуров L_j (в плоскости $z = x + iy$).

На контуре L_1 функция $\phi(t_1)$ имеет вид

$$\phi(t_1) = \sum_{v=0}^{\infty} (z - e_1)^{-v} M_1(v) + \sum_{n=0}^{\infty} (z - e_1)^n T_1(n) +$$

$$+ \sum_{v=0}^{\infty} T_4(k) (z - e_1)^{-v} + \sum_{v=0}^{\infty} T_3(v) (z - e_1)^v \quad (2.33)$$

На контуре L_2 имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t_2) = & \sum_{v=0}^{\infty} (z+e_2)^n M_2(n) + \sum_{v=0}^{\infty} (z+e_2)^{-v} B_1 + \\ & + \sum_{v=1}^{\infty} (z+e_2)^{-v} M_{10}(v) + \sum_{v=0}^{\infty} (z+e_2)^v M_9(v) \end{aligned} \quad (2.34)$$

На внешнем контуре L_3 функция $\varphi(t_3)$ имеет вид

$$\varphi(t_3) = \sum_{k=0}^{\infty} W_2(k)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} W_7(k)z^{-k} + \sum_{v=0}^{\infty} d_k \left(\frac{z}{A_3}\right)^k \quad (2.35)$$

Далее можно выписать производные от этих функций (2.33) – (2.35) и найти выражение $t\overline{\varphi'(t)}$ на каждой из контуров.

Значение $t\overline{\varphi'(t)}$ на контуре L_1 будет

$$\begin{aligned} t_1\overline{\varphi'(t_1)} = & [(t_1 - e_1) + e_1]\overline{\varphi'(t_1)} = (t_1 - e_1)\overline{\varphi'(t_1)} + e_1\overline{\varphi'(t_1)} = \\ = & (t - e_1) \left[\sum_{v=0}^{\infty} (-v)(\bar{t} - e_1)^{-v-1} M_1(v) + \sum_{n=0}^{\infty} n(\bar{t} - e_1)^{n-1} T_1(n) + \right. \\ & + \left. \sum_{v=1}^{\infty} (-v)(\bar{t} - e_1)^{v-1} T_4(v) + \sum_{v=0}^{\infty} v(\bar{t} - e_1)^{v-1} T_3(v) \right] + \\ & + e_1 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-v)(\bar{t} - e_1)^{-v-1} M_1(v) + \sum_{n=0}^{\infty} n(\bar{t} - e_1)^{n-1} T_1(n) + \right. \\ & + \left. \sum_{v=1}^{\infty} (-v)(\bar{t} - e_1)^{-v-1} T_4(v) + \sum_{v=0}^{\infty} v(\bar{t} - e_1)^{v-1} T_3(v) \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

На контуре L_2 выражение $t\overline{\varphi'(t)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} t_2\overline{\varphi'(t_2)} = & [t_2 + e_2 - e_2] + \overline{\varphi'(t_2)} = (t_2 + e_2)\overline{\varphi'(t_2)} - e_2\overline{\varphi'(t_2)} = \\ = & (t_2 + e_2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} nM_2(n)(\bar{t} + e_2)^{n-1} + \sum_{v=0}^{\infty} (-v)B_v(\bar{t} + e_2)^{-v-1} + \right. \\ & + \left. \sum_{v=0}^{\infty} (-v)M_{10}(v)(\bar{t} + e_2)^{v-1} + \sum_{v=0}^{\infty} M_9(v)(\bar{t} + e_2)^{v-1} \right] - \\ & - e_2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} nM_2(n)(\bar{t} + e_2)^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-v)B_v(\bar{t} + e_2)^{-v-1} + \right. \\ & + \left. \sum_{v=0}^{\infty} (-v)M_{10}(v)(\bar{t} + e_2)^{-v+1} + \sum_{v=0}^{\infty} vM_9(v)(\bar{t} + e_2)^{v-1} \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

И наконец на внешнем контуре L_3 выражение $\overline{t\Phi'(t)}$ примет форму

$$t_3 \overline{\Phi'(t_3)} = t_3 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-k)(\bar{t})^{-k-1} W_2(k) + \sum_{k=0}^{\infty} (-k)(\bar{t})^{-k-1} W_7(k) + \sum_{k=0}^{\infty} d_k A_3^{-k} (\bar{t})^{-k-1} \right] \quad (2.38)$$

Далее учитывая на каждом из указанных равенств (2.36) – (2.38) отображающиеся функции и сопряженные с ней получим (где учтено, что на единичных окружностях имеет место $\tau\bar{\tau} = 1$):

$$t_1 \overline{\Phi'(t_1)} = A_1(\tau + m_1 \tau^{-1}) \left[\sum_{n=1}^{\infty} N_1(n) \tau^n + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} N_2(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n N_3(n) + \right. \quad (2.39)$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} N_4(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n N_5(n) + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n N_6(n) \right] + e_1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} N_1(n) \tau^n + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} N_2(n) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n N_3(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} N_4(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n N_5(n) + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n N_6(n) \right]$$

$$t_2 \overline{\Phi'(t_2)} = A_2(\tau + m_2 \tau^{-1}) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \Pi_1(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} \Pi_3(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} \Pi_6(n) + \right. \quad (2.40)$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \Pi_2(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \Pi_4(n) + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n N_5(n) \right] - e_2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \Pi_1(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} \Pi_6(n) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \Pi_2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} \Pi_3(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \Pi_4(n) + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \Pi_6(n) \right]$$

$$t_3 \overline{\Phi'(t_3)} = A_3 \left(\tau + \frac{m_3}{\tau^{N-1}} \right) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \tau^{n+1} \Phi_1(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{n+1} \Phi_2(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{-n} \Phi_3(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \Phi_4(n) \right] \quad (2.41)$$

$$N_1(n) = \sum_{v=0}^n (-v) M_1^*(v) A_1^{-v-1} C_{-v-1}^{(n-1-v)/2} m_1^{(n-1-v)/2}$$

$$N_2(n) = \sum_{v=n+1}^n * v T_1(v) A_1^{v-1} C_{-v-1}^{(v-1-n)/2} m_1^{(v-1-n)/2},$$

$$N_3(n) = \sum_{v=0}^n * v T_1(v) A_1^{v-1} C_{v-1}^{(v-1+n)/2} m_1^{(v-1+n)/2}$$

$$N_4(n) = \sum_{v=n+1}^n * v T_3(v) A_1^{v-1} C_{-v-1}^{(v-1-n)/2} m_1^{(v-1-n)/2},$$

$$N_5(n) = \sum_{v=0}^n * v T_4(v) A_1^{v-1} C_{v-1}^{(v-1+n)/2} m_1^{(v-1+n)/2}$$

$$N_6(n) = \sum_{v=1}^n {}^* (-v) T_3(v) A_1^{-v-1} C_{-v-1}^{(n-v)/2} m_1^{(n-v)/2}, \quad M_1^*(v) = A_1^{-v} M_1(v)$$

$$\Pi_1(n) = \sum_{v=0}^{n-1} {}^* (-v) M_2(v) A_2^{v-1} C_{-v-1}^{(n-v-1)/2} m_2^{(n-v-1)/2},$$

$$\Pi_2(n) = \sum_{v=0}^{n-1} {}^* (-v) B_v A_2^{v-1} C_{-v-1}^{(n-v-1)/2} m_2^{(n-v-1)/2}$$

$$\Pi_3(n) = \sum_{v=n+1}^{\infty} {}^* v M_9(v) A_2^{v-1} C_{v-1}^{(n-v-1)/2} m_2^{(n-v-1)/2},$$

$$\Pi_4(n) = \sum_{v=n}^{\infty} {}^* v M_9(v) A_2^{v-1} C_{v-1}^{(v-1+n)/2} m_2^{(v-1+n)/2}$$

$$\Pi_5(n) = \sum_{v=0}^{n-1} {}^* (-v) M_{10}(v) A_2^{-v-1} C_{-v-1}^{(n-v)/2} m_2^{(n-v)/2},$$

$$\Pi_6(n) = \sum_{v=1}^{\infty} {}^* A_2^{v-1} C_{v-1}^{(n+v-1)/2} m_2^{(n+v-1)/2} M_2(v)$$

$$\Phi_1(n) = \sum_{k=n}^{\infty} {}^{**} (-k) T_1(k) A_3^{-k-1} C_{-k-1}^{(n-v)/N} m_3^{(n-v)/N},$$

$$\Phi_2(n) = \sum_{k=n}^{\infty} {}^{**} (-k) W_7(k) A_3^{-k-1} C_{-k-1}^{(n-k)/N} m_3^{(n-k)/N}$$

$$\Phi_3(n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} {}^{**} v d_v A_3^{-1} C_{v-1}^{(n-1-v)/N} m_3^{(n-1-v)/N},$$

$$\Phi_4(n) = \sum_{k=0}^{\infty} {}^{**} k d_v A_3^{-1} C_{k-1}^{(k-1+n)/N} m_3^{(k-1+n)/N}$$

Учитывая в (2.1) – (2.3) значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, а также выражения для $t\overline{\varphi'(t)}$, определяемые равенствами (2.17), (2.18), (2.23), (2.24), (2.31), (2.32), (2.39), (2.40), (2.41), граничные условия на контурах L_j ($j = 1, 2, 3$;) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \tau^{-k} + \sum_{v=0}^{\infty} V_1(v) \tau^v + \sum_{v=1}^{\infty} V_2(v) \tau^{-v} + \sum_{k=0}^{\infty} V_5(k) \tau^k + \sum_{k=1}^{\infty} V_6(k) \tau^v + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} V_7(k) \tau^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^k + \sum_{v=0}^{\infty} V_3(v) \tau^{-v} + \sum_{v=1}^{\infty} V_4(v) \tau^v + \sum_{k=0}^{\infty} V_8(k) \tau^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} V_9(v) \tau^k + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} V_{10}(k) \tau^k + A_1 (\tau + m_1 \tau^{-1}) \left[\sum_{n=1}^{\infty} N_1(n) \tau^n + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-v} N_2(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} N_3(v) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} N_4(n) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n N_5(n) + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n N_6(n) \Big] + e_1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \tau^n N_1(n) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} N_2(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^v N_3(v) + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} N_4(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n N_5(n) + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n N_6(n) \right] = 0 \quad \text{на контуре } L_1 \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k M_3(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} M_4(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \tau^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k M_{11}(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} M_{12}(k) + \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} M_{13}(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} M_7(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k M_8(k) + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k b_k + \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} M_{16}(k) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k M_{17}(k) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k M_{18}(k) + A_2(\tau + m_2 \tau^{-1}) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \tau^v \Pi_1(v) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k \Pi_2(k) + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} \Pi_3(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} \Pi_6(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \Pi_4(n) + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \Pi_5(n) \right] - e_2 \left[\sum_{v=1}^{\infty} \tau^v \Pi_1(v) + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \tau^k \Pi_2(k) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} \Pi_3(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{-n} \Pi_6(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \Pi_4(n) + \tau \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \Pi_5(n) \right] = 0 \quad \text{на контуре } L_2 \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} W_3(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} W_8(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v W_{11}(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^{-v} W_{12}(v) + \\
 & + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v W_6(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v W_{10}(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} W_{13}(v) + \sum_{v=1}^{\infty} \tau^v W_{14}(v) + A_3(\tau + m_3 \tau^{1-N}) \times \\
 & \times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \tau^{n+1} \Phi_1(n) + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{n+1} \Phi_2(n) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^{-v} \Phi_3(v) + \sum_{v=0}^{\infty} \tau^v \Phi_4(v) \right] = \quad (2.44) \\
 & = PA_3(\tau + m_3 \tau^{1-N}) \quad \text{на контуре } L_3
 \end{aligned}$$

Приравнявая в системе уравнений (2.42), (2.43) и (2.44) коэффициенты при одинаковых степенях переменной τ , получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\alpha_k, \beta_k, \lambda_k, a_k, b_k$ и γ_k :

$$\begin{aligned}
 & a_k + V_2(k) + V_6(k) + V_7(k) + V_3(k) + V_8(k) + A_1 N_2(v+1) + A_1 m_1 N_2(v-1) \varepsilon_1 + \\
 & + A_1 N_4(v+1) + A_1 m_1 N_4(v-1) \varepsilon_1 + e_1 N_2(v) + e_1 N_4(v) = 0 \quad (2.45) \\
 & V_1(v) + V_5(v) + a_k + V_4(v) + V_9(v) + V_{10}(v) + A_1 N_1(n-1) \varepsilon_1 + \\
 & + A_1 m_1 N_1(n+1) + A_1 N_2(0) \varepsilon_3 + A_1 N_3(-1) \varepsilon_1 + A_1 m_1 N_3(v+1) + \\
 & + A_1 N_4(0) \varepsilon_3 + A_1 N_5(v-1) \varepsilon_1 + A_1 m_1 N_5(v+1) + A_1 N_6(v-2) \varepsilon_2 +
 \end{aligned}$$

$$+ A_1 m_1 N_5(v) + e_1 N_1(v) + e_1 N_3(v) + e_1 N_5(v) + e_1 N_6(n-1) \varepsilon_1 = 0 \quad (2.46)$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } v < 2 \\ 1 & \text{при } v \geq 2 \end{cases}, \quad \varepsilon_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } v < 3 \\ 1 & \text{при } v \geq 3 \end{cases}, \quad \varepsilon_3 = \begin{cases} 0 & \text{при } v \neq 1 \\ 1 & \text{при } v = 1 \end{cases}$$

$$M_4(k) + \beta_k + M_{12}(k) + M_{13}(k) + M_7(k) + M_{16}(k) + A_2 m_2 \Pi_6(n-1) \varepsilon_1 - \\ - e \Pi_6(n) + A_2 \Pi_3(n+1) + A_2 m_2 \Pi_3(n-1) \varepsilon_1 - e_2 \Pi_3(n) = 0 \quad (2.47)$$

$$M_3(k) + M_{11}(k) + M_8(k) + b_k + M_{17}(k) + M_{18}(k) + A_2 \Pi_1(v-1) \varepsilon_1 + \\ + A_2 m_2 \Pi_1(v+1) \varepsilon_1 + A_2 \Pi_2(k-1) \varepsilon_1 + A_2 m_2 \Pi_2(k+1) \varepsilon_1 + A_2 \Pi_3(0) \varepsilon_3 + \\ + A_2 \Pi_4(n-1) \varepsilon_1 + A_2 m_2 \Pi_4(n+1) \varepsilon_1 + A_2 \Pi_6(0) \varepsilon_3 + A_2 \Pi_5(n-2) \varepsilon_2 + A_2 m_2 \Pi_5(n) - \\ - e_2 \Pi_1(v) - e_2 \Pi_2(k) - e_2 \Pi_4(v) - e_2 \Pi_5(n-1) \varepsilon_1 = 0 \quad (2.48)$$

$$W_3(v) + W_8(v) + W_{12}(v) + W_{13}(v) + A_3 m_3 \Phi_1(N-n-2) \varepsilon_4 + A_3 m_3 \Phi_2(N-n-2) \varepsilon_4 + \\ + A_3 \Phi_3(v+1) + A_3 m_3 \Phi_3(v+N-1) + A_3 m_3 \Phi_4(N-n-2) \varepsilon_4 = P A_3 m_3 \varepsilon_6 \quad (2.49)$$

$$W_{11}(v) + W_6(v) + W_{10}(v) + W_{14}(v) + A_3 \Phi_1(n-2) \varepsilon_2 + A_3 m_3 \Phi_1(n+2-N) \varepsilon_7 + \\ + A_3 \Phi_2(n-2) \varepsilon_2 + A_3 m_3 \Phi_2(n+2-N) \varepsilon_7 + A_3 \Phi_3(0) \varepsilon_3 + \\ + A_3 \Phi_4(v-1) \varepsilon_1 + A_3 m_3 \Phi_4(v+1-N) \varepsilon_5 = P A_3 \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_4 = \begin{cases} 0 & \text{при } v \geq N-2 \\ 1 & \text{при } v < N-2 \end{cases}, \quad \varepsilon_5 = \begin{cases} 0 & \text{при } v \leq N-1 \\ 1 & \text{при } v > N-1 \end{cases}, \quad \varepsilon_6 = \begin{cases} 0 & \text{при } v \neq N-1 \\ 1 & \text{при } v = N-1 \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\varepsilon_7 = \begin{cases} 0 & \text{при } v \leq N-2 \\ 1 & \text{при } v > N-2 \end{cases}$$

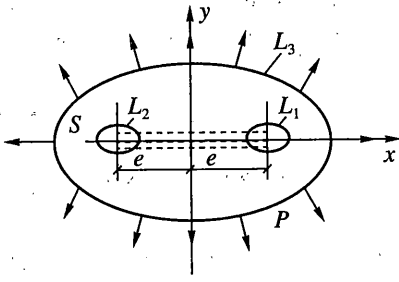
Таким образом решение задачи о напряженно-деформированном состоянии многоугольной пластинки с двумя эллиптическими отверстиями при всестороннем растяжении сводится к решению совокупности шести систем (2.45) – (2.50) бесконечных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов α_k , β_k , λ_k , a_k , b_k и γ_k .

Удерживая в каждом из указанных систем, несколько первых членов и решая их совместно, можно найти искомые коэффициенты. Число удерживаемых членов зависит от требуемой точности решения и локальной близости контуров L_j ($j = 1, 2, 3$).

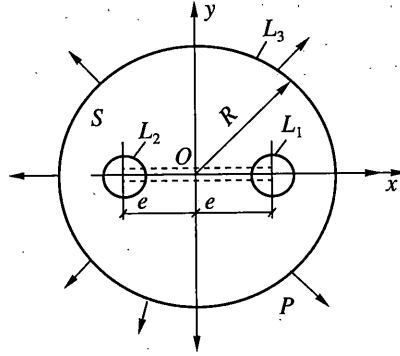
Определив искомые коэффициенты, тем самым определяются функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитические в области S , рассматриваемой многоугольной пластики. А затем по известным формулам Колосова – Мухелишвили [2, 3, 7, 12], можно найти компоненты напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ в любой точке области S .

Следует отметить, что если в отображающих функциях (2.5), а затем в полученных системах уравнений (2.45) – (2.50) принять $m_1 = m_2 = 1$; $b_1 = b_2 = 0$, то получим задачу рассмотренную в п. 1, т.е. многоугольную пластинку с двумя неравными прямолинейными разрезами-трещинами.

Сопоставляя результаты полученные на основе первого и второго методов можно судить о правильности проводимых расчетов и эффективности применяемых методов решения.



Фиг. 3



Фиг. 4

Зная напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ в окрестности концевых точек трещины можно затем определить коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) по следующим асимптотическим формулам [2, 7, 14]:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r^{(j)} \\ \sigma_\theta^{(j)} \\ \tau_{r\theta}^{(j)} \end{matrix} \right\} = \frac{K^{(j)}}{4\sqrt{2\rho}} \begin{cases} 5 \cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2) \\ 3 \cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) \end{cases} \quad (2.51)$$

$$4\mu \begin{cases} u_r^{(j)} \\ \vartheta_\theta^{(j)} \end{cases} = K^{(j)} \begin{cases} (2\chi - 1) \cos(\theta/2) - \cos(3\theta/2) \\ -(2\chi + 1) \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) \end{cases} \quad (2.52)$$

Так, как в рассматриваемой задаче напряжений относительно линии Ox , симметрично действующие усилия также симметричны относительно линии трещин, т.е. относительно оси ox , то как известно в том случае $K_2 = 0$.

Зная величины $K_1^{(j)}$, можно найти предельное усилие P_* при котором начинается рас пространение трещины (начинается хрупкое разрушение тела).

3. Рассмотрим ряд числовых примеров. 3.1. *Всестороннее растяжение эллиптической пластинки с двумя эллиптическими отверстиями.* Если в отображающей функции (2.6) и систем уравнений (2.45) – (2.50) принять $N = 2$, то рассматриваемая задача переходит к задаче всестороннее растяжение эллиптической пластинки с теми же отверстиями.

При числовых расчетах были взяты по пять первых уравнений из каждой указанной системы и определены коэффициенты разложения аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ для следующих значений относительных размеров пластинки и отверстий:

$$(a) \quad a_3 = 2b_3; \quad m_3 = 1/3; \quad a_1 = a_2 = 2b_1; \quad m_1 = m_2 = 1/3; \quad b_1 = b_2 = 0.25b_3; \\ e_1 = e_2 = 2a_1$$

или $e_1 = e_2 = 1.1a_1$. Расстояние между центрами отверстий L_1 и L_2 были взяты равными $4a_1$ или $2.2a_1$, причем a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 соответственно большие и малые полуоси эллипсов L_1, L_2 и L_3 .

(в) $a_3 = 2b_3; m_3 = 1/3; a_1 = a_2 = 0.5a_3; b_1 = b_2 = 0; e_1 = e_2 = 0$. В этом случае внутренние контура L_1 и L_2 сливается в один прямолинейный разрез, и задача переходит к задаче определения напряженного состояния в эллиптической пластике с центральным прямолинейным разрезом длиной $l = 2a_1$, расположенным на вещественной оси ox (фиг. 3).

Вычисленные напряжения σ_{θ}/ρ по известным формулам Колосова – Мухелишвили [2, 12] в характерных точках внутреннего контура (L_1) пластинки приводятся в табл. 1 (в нижней части таблицы приводятся результаты для прямолинейных разрезов):

Таблица 1

z	Расстояние между центрами отверстий	
	$L_1 = 4 a_1$	$L_2 = 2.2 a_1$
$z = 3 a_1$	5.11	–
$z = 2.1 a_1$	–	6.63
$z = a_1$	5.31	–
$z = 0.1 a_1$	–	8.27
$z = i b_1$	0.76	0.81
$z = 1.1 a_1$	13.4	
$b_1 = b_2 = 0$		
$e_1 = e_2 = 0$		

3.2 Круглая пластинка с двумя эллиптическими отверстиями. Приняв в отображающей функции (2.6) и в системах уравнений (2.45)–(2.50) $a_3 = b_3$; $m_3 = 0$ и $A_3 = R$ рассматриваемая многоугольная пластинка переходит в круглую пластинку с теми же отверстиями.

Далее если принять $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = r$, то получим задачу определения напряженного состояния круглой пластинки с двумя круговыми отверстиями радиуса r , симметрично расположенными на оси ox . Расстояние между центрами равно $2e$.

А если принять $a_1 = a_2 = a = 0.5R$; $b_1 = b_2 = 0$, а также $e_1 = e_2 = 0$, то получим круглую пластинку радиуса R с центрально расположенным прямолинейным разрезом длиной $2l = 2a = R$ (фиг. 4).

Вычисленные компоненты напряжений σ_{θ}/ρ в характерных точках отверстия и вблизи вершины разреза приводятся в табл. 2:

Таблица 2

z	Расстояние между центрами отверстий		
	$2e = 4r$	$2e = 3r$	$2e = 2.2r$
$z = e + r$ $e_1 = e_2 = e$ $R = 4r$	2.12	2.36	2.56
$z = e - r$ $e_1 = e_2 = e$ $R = 4r$	2.16	2.91	5.51
$z = e + ri$ $e_1 = e_2 = e$ $R = 4r$	1.86	1.84	1.74
$A_1 = a_2 = a$ $z = 1.1a$ $e_1 = e_2 = 0$ $b_1 = b_2 = 0$ $R = 2a$	$l = 0.5r$ 3.92		$l = 0.8r$ 5.66

Зная значения напряжений σ_{θ}/p в концевых точках прямолинейных разрезов (они приведены на последних строчках табл. 1 и 2) можно определить величины коэффициента интенсивности напряжения (K_1) на основе формулы 2.51.

Критическая нагрузка $P = P_*$ при которой начинается распространение трещины (т.е. начинается хрупкое разрушение пластинки) определяется по критерию Ирвина [2, 7, 11, 14]: $[\sigma_b] = 0.97K_c/\sqrt{\pi l}$, где $K_c = K_1\sqrt{\pi}$ постоянная определяющая трещиностойкость материала (сопротивление материала разрушению).

Для первого примера $P_* = 0.196[\sigma_b]$; для второго примера критическая нагрузка P_* равна: $P_* = 0.66[\sigma_b]$ при $l = 0.5R$, $P_* = 0.46[\sigma_b]$ при $l = 0.8R$.

Здесь $[\sigma_b]$ предел выносливости материала на растяжение: для серого чугуна $[\sigma_b] = 35.2$ кГ/мм², для модифицированного чугуна $[\sigma_b] = 23.3$ кГ/мм², для стали СТ-40 $[\sigma_b] = 58$ кГ/мм², для стали 20Х $[\sigma_b] = 80$ кГ/мм².

Следует отметить, что если наименьшее расстояние между внутренними контурами (L_1 и L_2) и внешних контуров L_3 будет пять и более раз больше максимального размера внутреннего контура, то форма внешнего контура почти не влияет на распределение напряжений на внутреннем контуре. Такую пластинку без заметного ущерба можно принять за бесконечную пластинку. При этом полученные результаты хорошо согласуются с имеющимися в литературе результатами вычисленными для бесконечной пластинки с теми же отверстиями (см. например [7, 14]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высш. шк., 1976, 272 с.
2. Кулиев С.А. Двумерные задачи теории упругости М.: Стройиздат, 1991. 349 с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
5. Шерман Д.И. Об одной задаче теории упругости // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27. № 9. С. 907–910.
6. Шерман Д.И. Об одном методе решения некоторых задач теории упругости для двухсвязных областей // Докл. АН СССР. 1947. Т. 55. № 8. С. 701–704.
7. Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., В.В. Панасюк. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. Киев: Наук. думка, 1979. 400 с.
8. Кулиев С.А. Напряженное состояние в многоугольной пластинке с дугообразными трещинами // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 152–162.
9. Меркулов В.А. Изгиб пластин с разрезами вдоль прямой или дуг окружности // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 165–171.
10. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т. О предельном равновесии пластины с трещинами вдоль дуг окружности // Прикл. механика. 1965. Т. 1. № 10. С. 52–60.
11. Vieekner H.F. The propagation of cracks and the energy of elastic deformation // Trans ASME. 1958. V. 8. № 6. P. 1225–1230.
12. Бережницкий Л.Т. Предельные усилия для пластины с двумя равными дугообразными трещинами // Физ.-хим. механика материалов. 1965. Т. 1. № 1. С. 99–106.
13. Шерман Д.И. Упругая плоскость с прямолинейными разрезами // Докл. АН СССР. 1940. Т. 26. № 7. С. 635–638.
14. Си Г., Парис П., Эрдоган Е. Коэффициенты концентрации напряжений у вершины трещины при плоском растяжении и изгибе пластин // Тр. америк. об-ва инж.-механиков. Сер. Е. Прикл. механика. 1963. Т. 29. № 2. С. 101–108.
15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1970. 800 с.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.