**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2004**

УДК 539.3

© 2004 г. **Д. А. ВЫСОКОВСКИЙ, В. И. ШУМЕЙКО**

О НЕКОТОРЫХ СЛЕДСТВИЯХ ТЕОРИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается в кратком изложении теория призматических оболочек [1, 2]. Показано, что, когда симметрическая оболочка постоянной толщины нагружена только нормальной нагрузкой, то первое приближение дает уравнение поперечных колебаний призматического стержня с учетом влияния поперечного сдвига [3], третье приближение дает уравнения модифицированной теории изотропных плит [4].

1. В работах [1, 2] излагается общая непротиворечивая теория призматических оболочек. Имея в виду рассмотреть некоторые следствия, приведем ее в кратком изложении.

Представим смещения, деформации и напряжения в оболочке в виде рядов по полиномам Лежандра

$$\begin{Vmatrix} u_i \\ e_{ij} \\ \sigma_{ij} \end{Vmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} a\left(n+\frac{1}{a}\right)\begin{Vmatrix} u_i^{(n)} \\ e_{ij}^{(n)} \\ \sigma_{ij}^{(n)} \end{Vmatrix} P_n(ax_3-b) \tag{1.1}$$

где $u_i^{(n)}$, $e_{ij}^{(n)}$, $\sigma_{ij}^{(n)}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ – моменты смещений, деформаций и напряжений относительно полиномов $P_n(ax_3-b)$, причем

$$\begin{gathered} a = \frac{2}{h^+-h^-},\quad b = \frac{h^++h^-}{h^+-h^-},\quad 2h = h^+-h^- \\ h^-(x_1, x_2) \le x_3 \le h^+(x_1, x_2) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Применяя формулы, выражающие моменты частных производных через моменты функции и ее производные, к уравнениям общей теории упругости, получим соотношения между моментами искомых величин согласованные с условиями на лицевых поверхностях оболочки

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta}^{(n)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha^{(n)}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta^{(n)}}{\partial x_\alpha}\right)-\frac{n+1}{2}\left(\frac{\partial \ln h}{\partial x_\beta}u_\alpha^{(n)}+\frac{\partial \ln h}{\partial x_\alpha}u_\beta^{(n)}\right)- \\ &-\frac{1}{2}\sum_{s=n+2}^{\infty}(2s+1)\left(\frac{\partial \ln h}{\partial x_\beta}u_\alpha^{(n)}+\frac{\partial \ln h}{\partial x_\alpha}u_\beta^{(n)}\right)-\frac{a}{4}\sum_{s=1}^{\infty}(2s+3)\times \\ &\times\left[\frac{\partial(h^++h^-)}{\partial x_\beta}u_\alpha^{(s+1)}+\frac{\partial(h^++h^-)}{\partial x_\alpha}u_\beta^{(s+1)}\right]\quad (\alpha, \beta = 1, 2) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$e_{\alpha 3}^{(n)} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_3^{(n)}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln h}{\partial x_\alpha}\left[(n+1)u_3^{(n)} + \sum_{s=n+2}^{\infty}(2s+1)u_3^{(s)}\right] - \\ -\frac{a}{4}\sum_{s=n}^{\infty}(2s+3)\frac{\partial(h^+ + h^-)}{\partial x_\alpha}u_3^{(s+1)} + \frac{a}{2}\sum_{s=n}^{\infty}(2s+3)u_\alpha^{(s+1)} \tag{1.4}$$

$$e_{33}^{(n)} = \frac{1}{h}\sum_{s=n}^{\infty}(2s+3)u_3^{(s+1)} \quad (s = n+2k,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\sigma_{ij}^{(n)} = \lambda\delta_{ij}\theta^{(n)} + 2\mu e_{ij}^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Аналогично выводим уравнения движения в моментах напряжений и перемещений

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}^{(n)}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \ln h}{\partial x_\beta}\left[n\sigma_{\alpha\beta}^{(n)} + \sum_{s=1}^{\infty}(2n+1-4s)\sigma_{\alpha\beta}^{(n-2s)}\right] + \frac{1}{2h}\frac{\partial(h^+ + h^-)}{\partial x_\beta}\sum_{s=1}^{N}(2n+1-4s)\sigma_{\alpha\beta}^{(n-2s)} - \\ -\frac{1}{h}\sum_{s=1}^{N}(2n+3-4s)\sigma_{\alpha 3}^{(n+1-2s)} = \rho\frac{\partial^2 u_\alpha^{(n)}}{\partial t^2} + q_\alpha^+ - (-1)^n q_\alpha^- \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha 3}^{(n)}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \ln h}{\partial x_\alpha}\left[\sigma_{\alpha 3}^{(n)} + \sum_{s=1}^{N}(2n+1-4s)\sigma_{\alpha 3}^{(n-2s)}\right] + \frac{1}{2h}\frac{\partial(h^+ + h^-)}{\partial x_\alpha}\sum_{s=1}^{N}(2n+3-4s)\sigma_{\alpha 3}^{(n+1-2s)} - \\ -\frac{1}{h}\sum_{s=1}^{N}(2n+3-4s)\sigma_{33}^{(n+1-2s)} = \rho\frac{\partial^2 u_3^{(n)}}{\partial t^2} + q_3^+ - (-1)^n q_3^- \tag{1.6}$$

где q_i^+, q_i^- – заданные поверхностные нагрузки, ρ – плотность материала оболочки.

Уравнения (1.3) – (1.6) являются точными, так как они получены из точных трехмерных уравнений теории упругости, как следствия. Несложные преобразования этой системы дают полную бесконечную систему уравнений относительно моментов вектора смещения. Пользоваться такой системой для практического расчета оболочки затруднительно. Поэтому принимается допущение, по которому в разложениях (1.1) удерживаются полиномы степени N относительно координаты x_3.

Таким простым и естественным путем можно построить приближенные теории призматических оболочек и плит при заданных значениях N. Уравнения приближенных теорий получаются из (1.1) – (1.6) в виде конечных сумм. Заметим, что при достаточно большом приближении N можно получить практически незначительную погрешность для оболочки произвольной формы. Важно, что при расчете пологих тонких оболочек можно ограничиться даже приближениями $N = 0$ и $N = 1$.

2. Приближение порядка $N = 1$ позволяет решить задачи о сжатии – растяжении симметрических оболочек при $n = 0$ и задачи изгиба при $n = 1$.

Для симметрических оболочек формулы (1.3) дают следующие соотношения

$$e_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_{\beta 0}}{\partial x_\alpha}\right), \quad e_{\alpha 3}^{(0)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x_\alpha} + 3u_{\alpha 1}\right) \\ e_{33}^{(0)} = \frac{3}{a}w_1, \quad \sigma_{ij}^{(0)} = \lambda\delta_{ij}\theta^{(0)} + 2\mu e_{ij}^{(0)} \tag{2.1}$$

$$
\begin{aligned}
&e_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{\partial u_{\alpha 1}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_{\beta 1}}{\partial x_\alpha}\right)\\
&e_{\alpha 3}^{(1)} = \frac{1}{2a^2}\frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha}, \quad e_{33}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{ij}^{(1)} = \lambda\delta_{ij}\theta^{(1)} + 2\mu e_{ij}^{(1)}\\
&u_{\alpha 0} = au_\alpha^{(0)}, \quad w = au_3^{(0)}, \quad u_{\alpha 1} = a^2 u_\alpha^{(1)}, \quad w_1 = a^2 u_3^{(1)}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Уравнения движения в перемещениях имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\mu\Delta^2 u_{\alpha 0} + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_{\beta 0}}{\partial x_\beta}\right) + 3\lambda\frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x_\alpha}\left[2\mu\frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial x_\alpha} + \right.\\
&\left. + \lambda\left(\frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_{\beta 0}}{\partial x_\beta}\right) + 3\lambda w_1\right] - \frac{\mu}{a}\frac{\partial a}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_{\beta 0}}{\partial x_\beta}\right) = \rho\frac{\partial^2 u_{\alpha 0}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$
\Delta^2 w_0 - \frac{\partial \ln a}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w_0}{\partial x_\alpha} + 3\left(\frac{\partial u_{\alpha 1}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_{\beta 1}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \ln a}{\partial x_\alpha}u_{\alpha 1} - \frac{\partial \ln a}{\partial x_\beta}u_{\beta 1}\right) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu}q \tag{2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu\Delta^2 u_{\alpha 1} + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial u_{\alpha 1}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_{\beta 1}}{\partial x_\beta}\right) - 3\frac{\partial \ln a}{\partial x_\alpha}\left[2\mu\frac{\partial u_{\alpha 1}}{\partial x_\alpha} + \lambda\left(\frac{\partial u_{\alpha 1}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_{\beta 1}}{\partial x_\beta}\right)\right] - \\
&- 3\mu\frac{\partial \ln a}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial u_{\alpha 1}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_{\beta 1}}{\partial x_\beta}\right) - a^2\mu\left(\frac{\partial w_0}{\partial x_\alpha} + 3u_{\alpha 1}\right) = \frac{\rho}{a}\frac{\partial^2 u_{\alpha 1}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$$
\mu\Delta^2 w_1 - \frac{3}{a}\left(\frac{\partial a}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial a}{\partial x_\beta}\frac{\partial w_1}{\partial x_\beta}\right) - a^2\left[3(\lambda+2\mu)w_1 + \lambda\left(\frac{\partial u_{\alpha 0}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_{\beta 0}}{\partial x_\beta}\right)\right] = \rho\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + a^2 q \tag{2.6}
$$

Чтобы установить в какой мере эти уравнения согласуются с известными уравнениями технической теории упругости, достаточно положить $a = \text{const}$. В результате получим известные уравнения для тонких плит.

Из (2.5) и (2.6) выводим уравнение сдвиговых колебаний тонкой плиты

$$
h^2\Delta^2 V - \left(3 - h^2\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V = 0 \tag{2.7}
$$

и уравнение изгибных колебаний

$$
EI\Delta^4 w_0 + \frac{1-2\nu}{1-\nu^2}\rho\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \rho I[1 + 2(1-\nu)]\Delta^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \rho^2 I\frac{1-2\nu}{\mu}\frac{\partial^4 w_0}{\partial t^4} = 0 \tag{2.8}
$$

Уравнение (2.8) совпадает с дифференциальным уравнением поперечных колебаний призматического стержня [3].

3. Теперь покажем, что приближение $N = 3$, когда симметрическая оболочка постоянной толщины нагружена только нормальной нагрузкой, дает уравнения теории изотропных плит [4].

Будем исходить из (1.1) и в первые члены запишем в виде

$$
u_\alpha = \frac{3}{2h}u_\alpha^{(1)}P_1(\zeta) + \frac{7}{2h}u_\alpha^{(3)}P_3(\zeta), \quad w = \frac{1}{2h}w^{(0)} + \frac{5}{2h}w^{(2)}P_2(\zeta) \tag{3.1}
$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{3}{2h}e^{(1)}_{\alpha\beta}P_1(\zeta) + \frac{7}{2h}e^{(3)}_{\alpha\beta}P_3(\zeta), \quad e_{\alpha 3} = \frac{1}{2h}e^{(0)}_{\alpha 3} + \frac{5}{2h}e^{(2)}_{\alpha 3}P_2(\zeta),$$
$$e_{33} = \frac{3}{2h}e^{(1)}_{33}P_1(\zeta) + \frac{7}{2h}e^{(3)}_{33}P_3(\zeta) \tag{3.2}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{3}{2h}\sigma^{(1)}_{\alpha\beta}P_1(\zeta) + \frac{7}{2h}\sigma^{(3)}_{\alpha\beta}P_3(\zeta)$$
$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{1}{2h}\sigma^{(0)}_{\alpha 3} + \frac{5}{2h}\sigma^{(2)}_{\alpha 3}P_2(\zeta) + \frac{9}{2h}\sigma^{(4)}_{\alpha 3}P_4(\zeta) \tag{3.3}$$
$$\sigma_{33} = \frac{3}{2h}\sigma^{(1)}_{33}P_1(\zeta) + \frac{7}{2h}\sigma^{(3)}_{33}P_3(\zeta) + \frac{11}{2h}\sigma^{(5)}_{33}P_5(\zeta), \quad \zeta = \frac{x_3}{h}$$

Формулы (1.3), (1.4) дают соотношения

$$e^{(n)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^{(n)}_{\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u^{(n)}_{\beta}}{\partial x_\alpha}\right) \quad (n = 1, 3)$$
$$e^{(n-1)}_{\alpha 3} = \frac{\partial w^{(n-1)}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{h}(\delta_{1n}3u^{(1)}_{\alpha} + 7u^{(3)}_{\alpha}), \quad e^{(1)}_{33} - e^{(3)}_{33} = \frac{5}{h}w^{(2)} \tag{3.4}$$

$$\sigma^{(1)}_{\alpha\alpha} = -\frac{2h}{3}\frac{\mu}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2}\right)(w^{(0)} - w^{(2)}) + \frac{2h}{3}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\sigma^{(0)}_{\alpha 3} - \sigma^{(2)}_{\alpha 3}) - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma^{(1)}_{33} - \frac{h}{3}\frac{\nu}{1-\nu}q$$

$$\sigma^{(1)}_{\alpha\beta} = -\frac{2h}{3}\mu\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}(w^{(0)} - w^{(2)}) + \frac{h}{3}\left[\frac{\partial \sigma^{(0)}_{\alpha 3}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \sigma^{(0)}_{\beta 3}}{\partial x_\alpha} - \left(\frac{\partial \sigma^{(2)}_{\alpha 3}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \sigma^{(2)}_{\beta 3}}{\partial x_\alpha}\right)\right]$$

$$\sigma^{(3)}_{\alpha\alpha} = -\frac{2h}{7}\frac{\mu}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x_\alpha^2} + \nu\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x_\beta^2}\right) + \frac{2h}{7}\frac{\partial \sigma^{(2)}_{\alpha 3}}{\partial x_\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{6}{7}\sigma^{(1)}_{33} + \sigma^{(3)}_{33}\right) \tag{3.5}$$

$$\sigma^{(3)}_{\alpha\beta} = -\frac{2h}{7}\mu\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{h}{7}\left(\frac{\partial \sigma^{(2)}_{\alpha 3}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \sigma^{(2)}_{\beta 3}}{\partial x_\alpha}\right)$$

$$\sigma^{(1)}_{33} - \sigma^{(3)}_{33} = \frac{10}{h}\mu\frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{2h}{3}\mu\frac{\nu}{1-\nu}\left[\Delta^2 w^{(0)} - \frac{10}{7}\Delta^2 w^{(2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \sigma^{(0)}_{\alpha 3}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \sigma^{(0)}_{\beta 3}}{\partial x_\beta}\right) + \frac{10}{7\mu}\left(\frac{\partial \sigma^{(2)}_{\alpha 3}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \sigma^{(2)}_{33}}{\partial x_\beta}\right)\right] \tag{3.6}$$

Напряжения $\sigma^{(n-1)}_{\alpha 3}$ и $\sigma^{(n)}_{33}$ ($n = 1, 3, 5$) выражаются через перерезывающие силы $Q^{(n)}_{\alpha}$ ($n = 1, 3$) и функцию напряжений σ. В силу условий $\sigma^{\pm}_{\alpha 3} = 0$, $\sigma^{\pm}_{33} = -q(x_1, x_2)$, получим

$$\sigma^{(0)}_{\alpha 3} = \frac{3}{2}Q^{(1)}_{\alpha}, \quad \sigma^{(4)}_{\alpha 3} = -\frac{2}{7}Q^{(3)}_{\alpha}, \quad 5\sigma^{(2)}_{\alpha 3} = \frac{2}{7}Q^{(3)}_{\alpha} - \frac{2}{3}Q^{(1)}_{\alpha} \tag{3.7}$$

$$\sigma^{(1)}_{33} = \frac{2h}{105}\sigma, \quad \sigma^{(5)}_{33} = \frac{2h}{693}\sigma, \quad \sigma^{(3)}_{33} = \frac{h}{7}q - \frac{4h}{315}\sigma \tag{3.8}$$

После подстановки (3.7) и (3.8) в (3.3) соответствующие напряжения принимают вид

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{1}{h}Q_\alpha^{(1)}\frac{1-P_2(\zeta)}{3}+\frac{1}{h}Q_\alpha^{(3)}\frac{P_2(\zeta)-P_4(\zeta)}{7} \tag{3.9}$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2}qP_3(\zeta)+\sigma\left(\frac{P_1(\zeta)}{35}-\frac{2P_3(\zeta)}{45}+\frac{P_5(\zeta)}{63}\right) \tag{3.10}$$

Такое распределение напряжений по толщине плиты точно соответствует теории Э. Рейсснера.

Обратимся теперь к (1.5) и (1.6) и оставим только первые уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\alpha}^{(n)}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}^{(n)}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{h}(\delta_{nn}\sigma_{\alpha 3}^{(0)}+\delta_{3n}5\sigma_{\alpha 3}^{(2)}) \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial\delta_{\alpha 3}^{(n-1)}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial\sigma_{\beta 3}^{(n-1)}}{\partial x_\beta} = -\delta_{1n}\frac{1}{2}q+\delta_{3n}\frac{3}{n}\sigma_{33}^{(1)}\quad (n=1,3) \tag{3.12}$$

Система уравнений (3.4) – (3.8), (3.11), (3.12) полная. Покажем, что ее можно преобразовать так, что остаются только два уравнения четвертого порядка и два симультанных уравнений второго порядка. Особенность этих преобразований в том, что появляются исключительно операторы Лапласа, так, что возможно решать краевые задачи в полярных координатах в замкнутой форме.

На первом этапе преобразований исключим моменты напряжений $\sigma_{ii}^{(n)}$ $(i = 1, 2, 3)$. Подстановка выражений (3.5) в (3.11) приводит к результатам

$$\begin{aligned}&\frac{h^2}{3}\Delta^2(\sigma_{\alpha 3}^{(0)}-\sigma_{\alpha 3}^{(2)})-\sigma_{\alpha 3}^{(0)}-\frac{2h^2}{3}\frac{\mu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Delta^2(w^{(0)}-w^{(2)})-\frac{2h^2}{105}\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x_\alpha} = \\ &= \frac{h^2}{6}\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha}\quad(\alpha = 1, 2)\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}&\frac{h^2}{7}\Delta^2\sigma_{\alpha 3}^{(2)}-5\sigma_{\alpha 3}^{(2)}-\sigma_{\alpha 3}^{(0)}-\frac{2h^2}{7}\frac{\mu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Delta^2 w^{(2)}+\\ &+\frac{2h^2}{2205}\frac{9-5\nu}{1-\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x_\alpha} = -\frac{h^2}{7}\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha}\end{aligned}$$

где Δ^2 – оператор Лапласа.

Уравнения (3.5) и (3.13) соответствуют уравнениям для моментов и перерезывающих сил теории изотропных плит [4].

На втором этапе исключим $\sigma_{\alpha 3}^{(n-1)}$ и σ из (3.6) и (3.13). Принимая во внимание (3.12), получим два уравнения четвертого порядка относительно $w^{(0)}$ и $w^{(12)}$:

$$\begin{aligned}&(9-7\nu)h^2\Delta^4 w^{(0)}-661.5\nu\frac{(2-\nu)(1-\nu)}{7+5\nu}\Delta^2 w^{(0)}+\\ &+2.5h^2\Delta^4 w^{(2)}+945\nu\frac{(2-\nu)(1-\nu)}{7+5\nu}\Delta^2 w^{(2)} = \\ &= -1012\frac{(1-\nu)(0.2-\nu)}{\mu(7+5\nu)}q-2.25\frac{(2.9-\nu)(0.7-\nu)}{\mu}h^2\Delta^2 q\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\left(1-4.2\nu\frac{2-\nu}{7+5\nu}\right)h^2\Delta^4 w^{(0)}-\left(1-6\nu\frac{2-\nu}{7+5\nu}\right)h^2\Delta^4 w^{(2)}=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{1-\nu}{\mu}q-\frac{1}{2\mu}\left[1+1.2\frac{(2-\nu)(3-10\nu)}{7+5\nu}\right]h^2\Delta^2 q$$

Остается рассмотреть вихревое решение основной системы (3.13), считая, что

$$u_{\alpha 1}^{(n)}=\frac{\partial V_n}{\partial x_\beta},\quad u_{\beta 1}^{(n)}=-\frac{\partial V_n}{\partial x_\alpha}\quad (n=1,3)$$
$$w_1^{(n-1)}=0,\quad \sigma_1=0 \tag{3.15}$$

где V_1, V_3 – функции перемещений.

Моменты напряжений (3.5) принимают вид

$$\sigma_{\alpha\alpha 1}^{(n)}=2\mu\frac{\partial^2 V_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},\quad \sigma_{\beta\beta 1}^{(n)}=-\sigma_{\alpha\alpha 1}^{(1)}$$
$$\sigma_{\alpha\beta 1}^{(n)}=\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\beta^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\right)V_n \tag{3.16}$$

$$\sigma_{\alpha 31}^{(n-1)}=\frac{\mu}{h}\left(\delta_{1n}3\frac{\partial V_1}{\partial x_\beta}+7\frac{\partial V_3}{\partial x_\beta}\right)$$
$$\sigma_{\beta 31}^{(n-1)}=-\frac{\mu}{h}\left(\delta_{1n}3\frac{\partial V_1}{\partial x_\alpha}+7\frac{\partial V_3}{\partial x_\alpha}\right) \tag{3.17}$$

Подстановка (3.17) в (3.13) приводит к двум дифференциальным уравнениям второго порядка

$$\left(\Delta^2-\frac{3}{h^2}\right)V_1-\frac{7}{h^2}V_3=0$$
$$\left(\Delta^2-\frac{42}{h^2}\right)V_3-\frac{3}{h^2}V_1=0 \tag{3.18}$$

Таким путем показано, что уравнения теории изотропных плит [4] могут быть получены из общей непротиворечивой теории оболочек [1, 2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И.Н.* Об одном методе расчета призматических оболочек // Тр. Тбил. мат. ин-та. 1955. Т. 21. С. 191–295.
2. *Векуа И.Н.* О двух путях построения непротиворечивой теории упругих оболочек // Тр. 1й Всес. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, С. 5–50.
3. *Тимошенко С.П.* Статические и динамические проблемы теории упругости. Киев: Наук, думка, 1975. 562 с.
4. *Reissner E.* A Twelvth Order Theory of Transverse Bending of Transversely Isotropic Plates // ZAMM. 1983. Bd. 63. H. 7. S. 285–289.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию 3.10.2001