МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2004

УДК 531.391.5

© 2004 г. А.В. ШАТИНА

БЫСТРАЯ И МЕДЛЕННАЯ ДИССИПАТИВНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКОУПРУГИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Для исследования эволюции движения механических систем, содержащих вязкоупругие элементы, предлагается асимптотический метод, сочетающий в себе метод разделения движений для систем с бесконечным числом степеней свободы и обобщенный метод Крылова–Боголюбова для систем с быстрыми и медленными переменными. Этот метод является развитием и обобщением асимптотического метода, предложенного в работе [1], и может использоваться в задачах, где помимо возмущений, связанных с упругостью и диссипацией, имеются малые периодические возмущения, обусловленные полем внешних сил. В качестве примера рассматривается задача о движении спутника с гибкими вязкоупругими стержнями на круговой орбите.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Пусть конфигурационным пространством механической системы является прямое произведение $\mathcal{M} \times \mathcal{B}$ n-мерного дифференцируемого многообразия $\mathcal{M}$ с локальными координатами $q_1, \ldots, q_n$ и банахова пространства $\mathcal{B}$ векторных функций $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, заданных на области Ω трехмерного евклидового пространства E^3. Связи, наложенные на перемещения точек системы, стационарны. Эта ситуация может иметь место, если рассматривать движение сложной механической системы, содержащей упругие элементы, и тогда $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – перемещения точек системы в результате упругих деформаций.

Кинетическая энергия системы определяется функционалом $T = T[\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}]$. Функционал потенциальной энергии внешних сил полагаем заданным в виде $\Pi = \Pi[\mathbf{q}, \mathbf{u}, \alpha, \mu]$, где $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\alpha = \omega_0 t + \alpha(0)$, $\omega_0 = \mathrm{const}$, $\Pi[\mathbf{q}, \mathbf{u}, \alpha + 2\pi, \mu] = \Pi[\mathbf{q}, \mathbf{u}, \alpha, \mu]$, μ – малый параметр.

Будем считать, что относительные перемещения точек при деформациях малы, и функционал потенциальной энергии упругих деформаций $\mathcal{E}[\mathbf{u}]$ соответствует линейной теории упругости малых деформаций. Кроме того, будем считать, что функционал внутренних диссипативных сил $\mathcal{D}[\dot{\mathbf{u}}]$, возникающих при деформациях упругих элементов, связан с функционалом $\mathcal{E}[\mathbf{u}]$ соотношением $\mathcal{D}[\dot{\mathbf{u}}] = \chi\mathcal{E}[\dot{\mathbf{u}}]$, где $\chi > 0$ – коэффициент внутреннего вязкого трения (модель Кельвина–Фойгта).

Уравнения движения выпишем в форме уравнений Рауса. От обобщенных координат и скоростей $(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ перейдем к обобщенным импульсам и координатам $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ согласно соотношениям $p_i = \nabla_{\dot{q}_i} T$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Функционал Рауса определяется равенством

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{6} p_i \dot{q}_i - T + \Pi + \mathcal{E}[\mathbf{u}]\big|_{(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \to (\mathbf{p}, \mathbf{q})}$$

Уравнения движения имеют вид [2]:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_k} \; (k = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

$$-\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathcal{R} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{R} + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathcal{D}[\dot{\mathbf{u}}] = 0 \tag{1.2}$$

Считаем, что жесткость упругих элементов велика, и функционал потенциальной энергии упругих деформаций содержит множителем "большой" параметр N – характеристику жесткости упругой среды. Поэтому можно ввести малый параметр $\varepsilon = N^{-1}$. При $\varepsilon = 0$ данная механическая система представляет собой абсолютно твердое тело, и вектор упругого смещения полагается равным нулю $\mathbf{u} \equiv 0$.

Таким образом, уравнения (1.1), (1.2) содержат два малых параметра ε и μ. Первый из них связан с нежесткостью рассматриваемой механической системы, а второй – с малыми внешними периодическими возмущениями. Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ и $\mu = 0$ система уравнений (1.1) является интегрируемой, а потому в целях использования асимптотических методов от переменных $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ следует перейти к переменным $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$, которые в невозмущенной постановке задачи, т.е. при $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$, являются переменными действие-угол. Тогда

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}[\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \alpha, \mu]$$

а уравнения движения выписываются в виде

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi_k}, \quad \dot{\varphi}_k = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I_k} \; (k = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

$$-\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathcal{R} + \nabla_{\mathbf{u}}\mathcal{R} + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\mathcal{D}[\dot{\mathbf{u}}] = 0 \tag{1.4}$$

2. Построение "возмущенной" системы уравнений. Система уравнений (1.3), (1.4) является сложной системой интегродифференциальных уравнений в банаховом пространстве, и, как правило, ее невозможно проинтегрировать в явном виде. На следующем шаге к этой системе уравнений может быть применен метод разделения движений [1–4], основанный на предположении, что период свободных упругих колебаний мал по сравнению со временем их затухания и обе эти величины много меньше характерного времени движения рассматриваемой механической системы как целого.

При $\varepsilon = 0$, когда жесткость упругой среды бесконечно велика, перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ обращаются в нуль и механическая система движется как твердое тело, функционал Рауса имеет вид

$$\mathcal{R}[\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, 0, 0, \alpha, \mu] = \mathcal{R}_0(\mathbf{I}) + \mu K[\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \alpha, \mu] \tag{2.1}$$

а уравнения (1.3) выглядят следующим образом:

$$\dot{I}_k = -\mu\frac{\partial K}{\partial \varphi_k}, \quad \dot{\varphi}_k = \omega_k(\mathbf{I}) + \mu\frac{\partial K}{\partial I_k}, \quad \omega_k(\mathbf{I}) = \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial I_k} \; (k = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Уравнение (1.4) после умножения обеих его частей на N^{-1} становится сингулярно возмущенным, т.е. содержащим малый параметр при старшей производной по времени. Из уравнения (1.4) определяется квазистатическое решение $\mathbf{u}$, описывающее вынужденные колебания точек вязкоупругой среды, устанавливающиеся после затухания собственных упругих колебаний и обусловленные действием внешних сил и сил инерции. При этом переменные ($\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\varphi}$) в уравнении (1.4) рассматриваются как функции времени, определяемые системой (2.2). Указанное решение представляется в виде

$$\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, \mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \alpha, \chi, \mu) + O(\varepsilon(\chi\omega)^2), \quad \omega = \max_k \omega_k(\mathbf{I}(0)) \tag{2.3}$$

После линеаризации правых частей уравнений (1.3) по $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{u}}$ и подстановки в них вместо $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{u}}$ найденного частного решения (2.3) получается замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных, описывающих поступательно-вращательное движение механической системы, и учитывающая возмущения, вызванные внутренней упругостью и диссипацией

$$\begin{aligned} \dot{I}_k &= -\mu\frac{\partial K}{\partial \varphi_k} + \varepsilon F_k(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \alpha, \chi, \mu) \\ \dot{\varphi}_k &= \omega_k(\mathbf{I}) + \mu\frac{\partial K}{\partial I_k} + \varepsilon G_k(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \alpha, \chi, \mu) \ (k = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Математическое обоснование метода разделения движений для механических систем с конечным числом степеней свободы, содержащих упругие и диссипативные элементы, проводилось в работах [5, 6] на основе метода пограничных функций [7], в работе [8] – на основе метода теории интегральных многообразий [9, 10].

3. Построение эволюционной системы уравнений. Если в уравнениях (2.4) $K \equiv 0$, то система уравнений (2.4) может быть исследована методом усреднения. Эта ситуация рассмотрена в работе [1]. Здесь предполагается, что $K \neq 0$. При $\varepsilon = 0$ система уравнений (2.4) также становится стандартной в смысле применения к ней метода усреднения. Переменные "действие" в этом случае не эволюционируют, т.к. при отсутствии диссипации энергии, вызываемой внутренним вязким трением упругой среды, данная система является консервативной. Поэтому на следующем шаге систему уравнений (2.4) будем рассматривать как систему с малым параметром μ при фиксированном значении параметра ε.

Пусть при $\mu = 0$ уравнения (2.4) выглядят следующим образом:

$$\dot{I}_k = \varepsilon\chi F_{k0}(\mathbf{I}) \tag{3.1}$$

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k(\mathbf{I}) + \varepsilon G_{k0}(\mathbf{I}) \ (k = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

Система уравнений (3.1) является замкнутой системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных действия. Предположим, что она обладает притягивающим множеством – аттрактором, к которому стремятся почти все решения этой системы. Это притягивающее множество содержится во множестве стационарных решений, определяемых системой уравнений

$$F_{k0}(\mathbf{I}) = 0 \ (k = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

Решение системы уравнений (2.4) по аналогии с методом, изложенным в [11], будем искать в виде

$$\begin{aligned} I_k &= J_k + \mu N_{k1}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\psi}, \varepsilon, \chi) + \mu^2 N_{k2}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\psi}, \varepsilon, \chi) + \ldots \\ \varphi_k &= \psi_k + \mu M_{k1}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\psi}, \varepsilon, \chi) + \mu^2 M_{k2}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\psi}, \varepsilon, \chi) + \ldots \ (k = 1, \ldots, n) \\ \mathbf{J} &= (J_1, \ldots, J_n), \quad \boldsymbol{\psi} = (\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_n) \end{aligned} \tag{3.4}$$

где функции N_{ks}, M_{ks} – 2π-периодичны по угловым переменным $\psi_1, \ldots, \psi_n$, α и имеют по этим переменным нулевое среднее.

Как функции времени переменные $J_1, \ldots, J_n$ и $\psi_1, \ldots, \psi_n$ определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{J}_k &= A_{k0}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi) + \mu A_{k1}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi) + \mu^2 A_{k2}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi) + \ldots \\ \dot{\psi}_k &= B_{k0}(\mathbf{J}, \varepsilon) + \mu B_{k1}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi) + \mu^2 B_{k2}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi) + \ldots \; (k = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$A_{k0}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi) = \varepsilon\chi F_{k0}(\mathbf{J}), \quad B_{k0}(\mathbf{J}, \varepsilon) = \omega_k(\mathbf{J}) + \varepsilon G_{k0}(\mathbf{J}) \tag{3.6}$$

В μ-окрестности асимптотически устойчивого стационарного решения системы (3.1) положим $A_{k0}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi) = \varepsilon\chi\mu\tilde{A}_{k0}(\mathbf{J})$. Далее, подставляя разложение (3.4) с учетом соотношений (3.5) и (3.6) в уравнения (2.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра μ, можно последовательно определить неизвестные функции A_{kj}, N_{kj}, B_{kj}, M_{kj} ($k = 1, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots$) при условии отсутствия резонансов. К примеру, уравнения, определяющие неизвестные функции A_{k1}, N_{k1}, B_{k1}, M_{k1} первого приближения имеют вид:

$$\begin{aligned} & A_{k1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial N_{k1}}{\partial \psi_j} B_{j0} + \frac{\partial N_{k1}}{\partial \alpha}\omega_0 = -\frac{\partial}{\partial \varphi_k} K(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \mu)|_{\mu=0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \mu} F_k(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \chi, \mu)|_{\mu=0} \\ & B_{k1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial M_{k1}}{\partial \psi_j} B_{j0} + \frac{\partial M_{k1}}{\partial \alpha}\omega_0 = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial B_{k0}}{\partial J_s} N_{s1} + \frac{\partial}{\partial I_k} K(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \mu)|_{\mu=0} + \\ & + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \mu} G_k(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \chi, \mu)|_{\mu=0} \; (k = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Так как N_{k1} – 2π-периодические по угловым переменным $\alpha, \psi_1, \ldots, \psi_m$ функции с нулевым средним значением, то из уравнений (3.7) следует, что

$$A_{k1}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi) = \left\langle \varepsilon\frac{\partial}{\partial \mu} F_k(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \chi, \mu)|_{\mu=0} \right\rangle, \quad \langle\cdot\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{m+1}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} (\cdot) d\alpha d\psi_1 \ldots d\psi_m$$

Если $A_{k1}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi) \not\equiv 0$ ($k = 1, \ldots, n$) то приближенные уравнения, описывающие эволюцию переменных действие на этапе "медленной" диссипативной эволюции, протекающей со скоростью порядка $\varepsilon\chi\mu$, имеют вид

$$\dot{J}_k = \varepsilon\chi(F_{k0}(\mathbf{J}) + \mu F_{k1}(\mathbf{J})) \; (k = 1, \ldots, n) \tag{3.8}$$

Если же какие-либо из функций $A_{k1}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi)$ ($k = 1, \ldots, n$) равны нулю, то следует найти функции $A_{k2}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi)$, определяющие эволюцию переменных действие во втором приближении по малому параметру μ. Функции $A_{k2}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi)$ второго приближения по малому параметру μ необходимо искать также в случае, когда система уравнений (3.8) обладает асимптотически устойчивым стационарным решением. Тогда в μ^2 – окрестности этого стационарного решения необходимо учитывать следующее приближение по μ. Система уравнений, описывающая эволюцию переменных действие на следующем этапе эволюции, протекающей со скоростью порядка $\varepsilon\chi\mu^2$, примет вид:

$$\dot{J}_k = \varepsilon\chi(F_{k0}(\mathbf{J}) + \mu F_{k1}(\mathbf{J}) + \mu^2 F_{k2}(\mathbf{J})) \; (k = 1, \ldots, n) \tag{3.9}$$

Система уравнений (3.1) описывает "быструю" диссипативную эволюцию переменных действие, а приближенная система дифференциальных уравнений (3.8) (или (3.9)) описывает "медленную" диссипативную эволюцию этих переменных.

4. Эволюция движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями на круговой орбите. Рассмотрим движение спутника, представляющего собой симметричное твердое тело, вдоль оси симметрии которого расположена пара гибких вязкоупругих стержней, в центральном ньютоновском поле сил на круговой орбите. Систему координат $O_1x_1x_2x_3$ жестко свяжем с телом. Точка O_1 – центр масс спутника при отсутствии деформации стержней, когда стержни прямолинейны и расположены вдоль оси x_3. Радиус-вектор точки стержня в системе координат $O_1x_1x_2x_3$ согласно линейной теории изгиба тонких нерастяжимых стержней имеет вид:

$$\mathbf{r}+\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = u_1(s,t)\mathbf{e}_1 + u_2(s,t)\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{r} = s\mathbf{e}_3, \quad s \in V = [-a-l \le s \le -a] \cup [a \le s \le a+l]$$

где $u_i(s, t)$ ($i = 1, 2$) – отклонение сечения стержня с координатой s при изгибе по оси O_1x_i, $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор по оси O_1x_i ($i = 1, 2, 3$), a и l – постоянные.

Рассмотрим ограниченную постановку задачи, т.е. будем считать, что точка O_1 движется по круговой орбите радиуса R. Введем систему координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$, которая движется поступательно, а ось ξ_3 ортогональна плоскости орбиты. Радиус-вектор $\mathbf{R}$ притягивающего центра в системе координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ имеет координаты $(R\cos\alpha, R\sin\alpha, 0)$, где $\alpha = \Omega t + \alpha(0)$, Ω – орбитальная угловая скорость. Если γ – гравитационная постоянная, то $\Omega^2 = \gamma R^{-3}$.

Кинетическая энергия спутника в движении относительно осей $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ равна

$$T = \frac{1}{2}(\hat{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}\int_V [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}+\mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}]^2 \rho ds \tag{4.1}$$

Здесь $\hat{J}$ – тензор инерции твердого тела относительно системы координат $O_1x_1x_2x_3$; $\boldsymbol{\omega}$ – его угловая скорость; ρ – линейная плотность материала стержней, которую считаем постоянной.

Потенциальная энергия гравитационного поля и поля сил инерции определяется функционалом

$$\Pi = -\gamma\int_U \frac{d\mu}{\sqrt{[\mathbf{R}+\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})]^2}} - \frac{1}{2}\Omega^2\int_U [\mathbf{R}+\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})]^2 d\mu \tag{4.2}$$

где U – область, занимаемая твердым телом и двумя недеформированными стержнями, μ – мера на U, определяющая распределение масс в твердом теле и в стержнях, Γ – матрица перехода от системы координат $O_1x_1x_2x_3$ к $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$.

Пусть $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}/R$, а $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – компоненты вектора $\Gamma^{-1}\mathbf{R}^0$ в системе координат $O_1x_1x_2x_3$. Так как $|\mathbf{r} + \mathbf{u}| \ll R$, то подынтегральное выражение в первом интеграле формулы (4.2) можно разложить в ряд. Ограничиваясь квадратичными членами относительно $(\mathbf{r} + \mathbf{u})/R$ и отбрасывая несущественные постоянные, получим

$$\Pi = -\frac{3}{2}\Omega^2\left[(A-C)\gamma_3^2 + \int_V [(\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0, \mathbf{u})^2 + 2(\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0, \mathbf{r})(\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0, \mathbf{u})]\rho ds\right] \tag{4.3}$$

где A, A, C – главные моменты инерции спутника с прямолинейными стержнями в системе координат $O_1x_1x_2x_3$.

Функционалы потенциальной энергии упругих деформаций и диссипативных сил имеют вид:

$$\mathscr{E}[\mathbf{u}] = \frac{N}{2}\int\limits_V\left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}\right)^2\right]ds, \quad \mathscr{D}[\dot{\mathbf{u}}] = \frac{\chi N}{2}\int\limits_V\left[\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial t\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial t\partial s^2}\right)^2\right]ds$$

где N – изгибная жесткость стержня, χ – коэффициент рассеяния энергии в стержнях при изгибе.

Вращательное движение спутника относительно системы координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ будем описывать переменными Андуайе [2] I_k, φ_k ($k = 1, 2, 3$). Здесь I_2 – модуль вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ спутника относительно точки O_1, I_1, I_3 – его проекции на оси O_1x_3 и $O_1\xi_3$ соответственно, φ_k – сопряженные к I_k ($k = 1, 2, 3$) переменные.

Оператор Γ в переменных Андуайе можно представить в виде произведения пяти ортогональных матриц

$$\Gamma = \Gamma_3(\varphi_3)\Gamma_1(\delta_1)\Gamma_3(\varphi_2)\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1)$$

$$\Gamma_3(\varphi_k) = \left\|\begin{matrix}\cos\varphi_k & -\sin\varphi_k & 0\\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|, \quad \Gamma_1(\delta_j) = \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\delta_j & -\sin\delta_j\\ 0 & \sin\delta_j & \cos\delta_j\end{matrix}\right\| \tag{4.4}$$

$$\cos\delta_1 = I_3 I_2^{-1}, \quad \cos\delta_2 = I_1 I_2^{-1}, \quad k = 1,2,3, \quad j = 1,2$$

Компоненты вектора $\mathbf{G}$ в системе координат $O_1x_1x_2x_3$ в переменных Андуайе имеют вид

$$\mathbf{G} = (\sqrt{I_2^2 - I_1^2}\sin\varphi_1, \sqrt{I_2^2 - I_1^2}\cos\varphi_1, I_1) \tag{4.5}$$

С другой стороны

$$\mathbf{G} = \nabla_\omega T = J[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}_u$$

$$J[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega} = \hat{J}\boldsymbol{\omega} + \int\limits_V(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})]\rho ds, \quad \mathbf{G}_u = \int\limits_V[(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times\dot{\mathbf{u}}]\rho ds \tag{4.6}$$

Функционал Рауса определяется равенством

$$\mathscr{R} = T_2[\boldsymbol{\omega}] - T_0 + \Pi + \mathscr{E}[\mathbf{u}]$$

$$T_2[\boldsymbol{\omega}] = \frac{1}{2}(\hat{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}\int\limits_V[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}+\mathbf{u})]^2\rho ds, \quad T_0 = \frac{1}{2}\int\limits_V\dot{\mathbf{u}}^2\rho ds \tag{4.7}$$

При этом в формуле (4.7) компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ в системе координат $O_1x_1x_2x_3$ необходимо выразить через переменные Андуайе. Из (4.6) получим $\boldsymbol{\omega} = J^{-1}[\mathbf{u}](\mathbf{G} - \mathbf{G}_u)$. Поэтому функционал Рауса запишется в виде:

$$\mathscr{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{G}-\mathbf{G}_u, J^{-1}[\mathbf{u}](\mathbf{G}-\mathbf{G}_u)) - \frac{1}{2}\int\limits_V\dot{\mathbf{u}}^2\rho ds + \Pi + \mathscr{E}[\mathbf{u}] \tag{4.8}$$

Оператор Γ и компоненты вектора $\mathbf{G}$ в (4.8) необходимо выразить через переменные Андуайе согласно формулам (4.4), (4.5) соответственно.

Движение рассматриваемой механической системы описывается уравнениями (1.3), (1.4), в которых $n = 3$. При этом уравнение (1.4) справедливо лишь в проекциях на оси O_1x_1 и O_1x_2.

Введем малый параметр $\varepsilon = \omega_0^2 l^4 \rho N^{-1}$, где ω_0 – константа, ограничивающая модуль начальной угловой скорости спутника. Это означает, что низшая частота собственных колебаний стержня намного больше начальной угловой скорости спутника. В дальнейшем выберем масштабы основных единиц так, чтобы $\omega_0^2 l^4 \rho = 1$ и $\varepsilon = N^{-1}$. Помимо этого будем считать, что действие гравитационных сил и сил инерции мало, что эквивалентно малости параметра $\mu = \Omega^2 \omega_0^{-2}$.

Если $\varepsilon = 0$, то $\mathbf{u} = 0$. Это означает, что стержни не деформируются, и данная механическая система движется как твердое тело. Функционал Рауса в этом случае имеет вид:

$$\mathcal{R}[\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, 0, 0, \alpha, \mu] = \frac{I_2^2 - I_1^2}{2A} + \frac{I_1^2}{2C} - \frac{3}{2}\mu\omega_0^2(A - C)\gamma_3^2$$

Уравнения движения выглядят следующим образом:

$$\dot{I}_1 = 0, \quad \dot{I}_2 = -\mu\frac{\partial K}{\partial \varphi_2}, \quad \dot{I}_3 = -\mu\frac{\partial K}{\partial \varphi_3}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1 + \mu\frac{\partial K}{\partial I_1}, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2 + \mu\frac{\partial K}{\partial I_2}, \quad \dot{\varphi}_3 = \mu\frac{\partial K}{\partial I_3} \tag{4.9}$$

$$K = -\frac{3}{2}\omega_0^2(A - C)\gamma_3^2, \quad \omega_1 = \frac{(A - C)}{AC}I_1, \quad \omega_1 = \frac{I_2}{A}$$

При $\varepsilon \neq 0$ согласно методу разделения движений после затухания собственных колебаний вязкоупругих стержней решение $\mathbf{u}(s, t)$ уравнения (1.4) ищется в виде: $\mathbf{u}(s, t) = \varepsilon\mathbf{u}_1(s, t) + \ldots$ Полагая $\mathbf{u}_1 = u_{11}\mathbf{e}_1 + u_{12}\mathbf{e}_2$, получим

$$B(u_{1i} + \chi\dot{u}_{1i}) = sf_i \; (i = 1, 2) \tag{4.10}$$

где B – дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $B(y) = d^4y/ds^4$ и краевыми условиями

$$y(\pm a) = \frac{dy(\pm a)}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y(\pm(a + l))}{ds^2} = \frac{d^3y(\pm(a + l))}{ds^3} = 0$$

Функции f_i $(i = 1, 2)$ в правых частях уравнений (4.10) имеют вид:

$$f_1 = \rho\{-\dot{G}_2 - G_1G_3 + 3\mu\omega_0^2\gamma_1\gamma_3\}, \quad f_2 = \rho\{\dot{G}_1 - G_2G_3 + 3\mu\omega_0^2\gamma_2\gamma_3\}$$

$$G_1 = \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A}\sin\varphi_1, \quad G_2 = \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A}\cos\varphi_1, \quad G_3 = \frac{I_1}{C}$$

и зависят от времени через переменные Андуайе, которые в свою очередь являются решениями невозмущенной системы (4.9), и через угловую переменную $\alpha(t) = \Omega t + \alpha(0)$.

Будем предполагать, что $|\chi\omega_k| \ll 1$ $(k = 1, 2)$, $|\chi\Omega| \ll 1$, и представим решение уравнений (4.10) в виде

$$u_{1i} \approx \Psi(s)\{f_i - \chi\dot{f}_i\} \; (i = 1, 2), \quad \int_V \Psi(s)ds = 0, \quad \int_V s\Psi(s)ds = d_1 > 0$$

Найденное решение описывает вынужденные колебания вязкоупругих стержней. Согласно асимптотическому методу разделения движений поставим $\mathbf{u} = \varepsilon(u_{11}\mathbf{e}_1 + u_{12}\mathbf{e}_2)$ в правые части уравнений (1.3) и изучим влияние вынужденных колебаний стержней на движение механической системы в целом.

Заметим, что угловая переменная φ_3 входит в функционал Рауса в комбинации $(\alpha - \varphi_3)$, поэтому введем новую переменную $\beta = \alpha - \varphi_3$ и представим "возмущенную" систему уравнений в виде:

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_1 &= -\rho d_1\varepsilon\left\{\frac{\partial G_1}{\partial\varphi_1}(\dot{f}_2-\chi\ddot{f}_2)-\frac{\partial G_2}{\partial\varphi_1}(\dot{f}_1-\chi\ddot{f}_1)+G_3\frac{\partial G_1}{\partial\varphi_1}(f_1-\chi\dot{f}_1)+\right.\\
&\left.+G_3\frac{\partial G_2}{\partial\varphi_1}(f_2-\chi\dot{f}_2)-3\mu\omega_0^2\left[\frac{\partial(\gamma_1\gamma_3)}{\partial\varphi_1}(f_1-\chi\dot{f}_1)+\frac{\partial(\gamma_2\gamma_3)}{\partial\varphi_1}(f_2-\chi\dot{f}_2)\right]\right\}\\
\dot{I}_2 &= -\mu\frac{\partial K}{\partial\varphi_2}+3\varepsilon\rho d_1\mu\omega_0^2\left\{\frac{\partial(\gamma_1\gamma_3)}{\partial\varphi_2}(f_1-\chi\dot{f}_1)+\frac{\partial(\gamma_2\gamma_3)}{\partial\varphi_2}(f_2-\chi\dot{f}_2)\right\}\\
\dot{I}_3 &= \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\beta} = \mu\frac{\partial K}{\partial\beta}-3\varepsilon\rho d_1\mu\omega_0^2\left\{\frac{\partial(\gamma_1\gamma_3)}{\partial\beta}(f_1-\chi\dot{f}_1)+\frac{\partial(\gamma_2\gamma_3)}{\partial\beta}(f_2-\chi\dot{f}_2)\right\}\qquad(4.11)\\
\dot{\varphi}_k &= \omega_k+\mu\frac{\partial K}{\partial I_k}+\rho d_1\varepsilon\left\{\frac{\partial G_1}{\partial I_k}(\dot{f}_2-\chi\ddot{f}_2)-\frac{\partial G_2}{\partial I_k}(\dot{f}_1-\chi\ddot{f}_1)+\frac{\partial(G_1G_3)}{\partial I_k}(f_1-\chi\dot{f}_1)+\right.\\
&\left.+\frac{\partial(G_2G_3)}{\partial I_k}(f_2-\chi\dot{f}_2)-3\mu\omega_0^2\left[\frac{\partial(\gamma_1\gamma_3)}{\partial I_k}(f_1-\chi\dot{f}_1)+\frac{\partial(\gamma_2\gamma_3)}{\partial I_k}(f_2-\chi\dot{f}_2)\right]\right\}\ (k=1,2)\\
\dot{\beta} &= \Omega-\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial I_3} = \Omega-\mu\frac{\partial K}{\partial I_3}+3\varepsilon\rho d_1\mu\omega_0^2\left\{\frac{\partial(\gamma_1\gamma_3)}{\partial I_3}(f_1-\chi\dot{f}_1)+\frac{\partial(\gamma_2\gamma_3)}{\partial I_3}(f_2-\chi\dot{f}_2)\right\}
\end{aligned}
$$

Отметим еще раз, что дифференцирование по времени в правых частях уравнений (4.11) производится в силу "невозмущенной" системы уравнений (4.9), т.е.

$$
\begin{aligned}
\dot{(*)} &= \frac{d}{dt}(*) = -\mu\frac{\partial K}{\partial\varphi_2}\frac{\partial(*)}{\partial I_2}+\mu\frac{\partial K}{\partial\beta}\frac{\partial(*)}{\partial I_3}+\left(\omega_1+\mu\frac{\partial K}{\partial I_1}\right)\frac{\partial(*)}{\partial\varphi_1}+\\
&+\left(\omega_2+\mu\frac{\partial K}{\partial I_2}\right)\frac{\partial(*)}{\partial\varphi_2}+\left(\Omega-\mu\frac{\partial K}{\partial I_3}\right)\frac{\partial(*)}{\partial\beta}
\end{aligned}
$$

Полагая в (4.11) $\mu = 0$, получим

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_1 &= -\varepsilon\chi d_1\rho^2\frac{(A-C)}{A^5C}(I_2^2-I_1^2)I_1^3,\quad \dot{I}_2 = 0,\quad \dot{I}_3 = 0\\
\dot{\varphi}_1 &= \omega_1-\varepsilon d_1\rho^2\frac{I_1(AI_2^2-(A+C)I_1^2)}{A^4C}\qquad(4.12)\\
\dot{\varphi}_2 &= \omega_2-\varepsilon d_1\rho^2\frac{I_1^2I_2}{A^4},\quad \dot{\beta} = \Omega
\end{aligned}
$$

Система уравнений (4.12) описывает вращение спутника на этапе “быстрой” диссипативной эволюции. Скорость эволюции переменной I_1 имеет порядок $\varepsilon\chi$. Переменные I_2, I_3 на этом этапе не эволюционируют. Если $A > C$, то значение переменной I_1 уменьшается и стремится к нулю, т.е. стремится к нулю проекция вектора кинетического момента на ось симметрии спутника. Если $A < C$, то значение переменной I_1 увеличивается и стремится к I_2. Это означает, что направление вектора кинетического момента стремится совпасть с направлением оси симметрии спутника.

Ограничимся далее рассмотрением случая $A > C$. Решение системы уравнений (4.11) будем искать в виде разложений (3.4), (3.5) (при этом $n = 3$, а вместо переменной φ_3 используется переменная β). В μ-окрестности аттрактора $J_1 = 0$ определяются функции A_{k1} первого приближения по малому параметру μ, которые имеют вид: $A_{k1}(\mathbf{J}, \varepsilon, \chi) = 0$ ($k = 1, 2, 3$). Т.е. и в первом приближении по малому параметру μ переменные J_2, J_3 не эволюционируют. В μ^2-окрестности асимптотически устойчивого стационарного решения $J_1 = 0$ определим функции A_{22}, A_{32}. Соответствующая система уравнений, описывающая медленную диссипативную эволюцию переменных действие J_2, J_3, имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\dot{J}_2 &= -\frac{9}{4}\varepsilon\chi\mu^2 d_1\rho^2\omega_0^4 C^2 A^{-2}\left\{\frac{J_2}{A}\left(1+\frac{J_3^2}{J_2^2}\right)-2\Omega\frac{J_3}{J_2}\right\}\\
\dot{J}_3 &= -\frac{9}{16}\varepsilon\chi\mu^2 d_1\rho^2\omega_0^4 C^2 A^{-2}\left\{8\frac{J_3}{A}+\Omega\left(3\frac{J_3^4}{J_2^4}-6\frac{J_3^2}{J_2^2}-5\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Заметим, что правые части системы (4.11) зависят от двух угловых переменных φ_2 и β, и разложение в ряды Фурье при реализации асимптотического метода проводится по этим двум переменным.

Введем новые переменные x и y: $x = J_3 J_2^{-1}$, $y = J_2 A^{-1}$. Переменная x приближенно равна косинусу угла, образованного вектором кинетического момента $\mathbf{G}$ с нормалью к плоскости орбиты, а переменная y – модулю угловой скорости вращения спутника. Получим следующую систему дифференциальных уравнений:

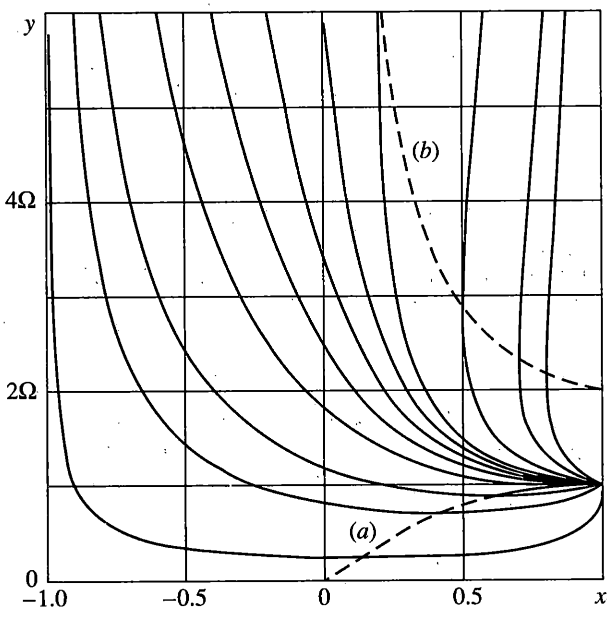
$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -\frac{n_1}{Ay}\{4xy-(3x^2+5)\Omega\}(1-x^2), \quad \dot{y} = -\frac{4n_1}{A}\{y(1+x^2)-2\Omega x\}\\
n_1 &= \frac{9}{16}\varepsilon\chi\mu^2 d_1\rho^2\omega_0^4 C^2 A^{-2}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

При условии $y > 0$ система уравнений (4.14) имеет единственное стационарное решение $x = 1$, $y = \Omega$, которое соответствует гравитационной стабилизации спутника в орбитальной системе координат.

Фазовый портрет системы уравнений (4.14) в области $D = \{(x, y) \| |x| \le 1, y > 0\}$, принадлежащей плоскости Oxy, изображен на фигуре. Кривые (a) и (b) на фиг. 1 – это кривые, задаваемые соответственно уравнениями $y = 2\Omega x/(1 + x^2)$ и $y = 1/4\Omega(3x^2 + 5)/x$. Касательные к фазовым траекториям в точках их пересечения к кривой (a) параллельны оси x, а касательные к фазовым траекториям в точках их пересечения с кривой (b) параллельны оси y.

Все фазовые траектории системы уравнений (3.5) в области D, за исключением прямой $x = -1$, стягиваются в точку с координатами $(1, \Omega)$. Следовательно, в случае $A > C$ на этапе медленной эволюции движение рассматриваемой механической системы стремится к равномерному вращению вокруг нормали к плоскости орбиты с угловой скоростью, равной орбитальной.

Следует отметить, что последнее утверждение носит формальный характер, так как в окрестности стационарного решения нарушается предположение о быстрой за-



крутке спутника по сравнению с угловой скоростью его орбитального движения. Исследование финальной стадии эволюции нуждается в специальном анализе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-05-64176).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вильке В.Г.* Разделение движений и метод усреднения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы // Вест. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1983. № 5. С. 54–59.
2. *Вильке В.Г.* Аналитические и качественные методы в динамике систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
3. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 34–42.
4. *Черноусько Ф.Л.* О движении вязкоупругого твердого тела относительно центра масс // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 1. С. 22–26.
5. *Черноусько Ф.Л., Шамаев А.С.* Асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 33–42.
6. *Синицын Е.В.* Асимптотика сингулярных возмущений в исследовании поступательно-вращательного движения вязкоупругого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 104–110.
7. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
8. *Сидоренко В.В.* Об эволюции движения механической системы с линейным демпфером большой жесткости // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 562–568.
9. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
10. *Старыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.
11. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.06.2001