

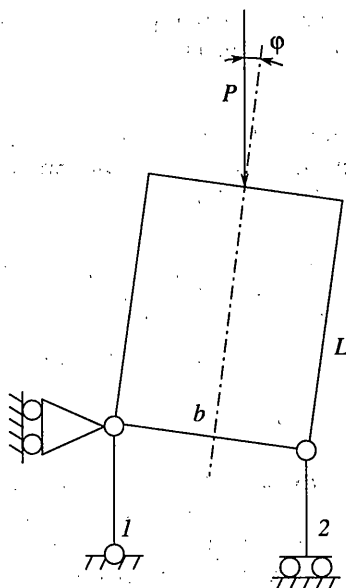
АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПРЯМОМ ТЕРМОУПРУГОМ ПРЕВРАЩЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЖИМАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Анализируются различные подходы к решению задач устойчивости деформируемых твердых тел, испытывающих прямое термоупругое фазовое превращение под действием сжимающих напряжений. На примере исследования в различных постановках нелинейного поведения и потери устойчивости стойки Шенли с опорными стержнями из сплава с памятью формы делается вывод о том, что из двух альтернативных концепций – “фиксированного фазового состава” и “продолжающегося фазового перехода” более реалистичные результаты дает вторая.

Осуществление прямого термоупругого превращения под действием сжимающих нагрузок является весьма эффективным способом задания элементам из сплавов с памятью формы (СПФ) начальной сжимающей деформации. Известно, однако [1], что при прямых термоупругих превращениях деформативность СПФ существенно возрастает как за счет падения упругих модулей, так и за счет развития фазовых деформаций. В результате этого возникает опасность отклонения от прямолинейной формы равновесия в процессе фазового перехода при наличии начальных возмущений силового или геометрического характера, т.е. потери устойчивости, вызванной прямыми термоупругими фазовыми превращениями. В [2] такая форма потери устойчивости обнаружена экспериментально. Установлено, что образцы из никелида титана, не теряющие устойчивость изотермически ни в аустенитном, ни в мартенситном фазовых состояниях, теряют устойчивость под действием той же нагрузки при переходе из первого состояния во второе. Критические нагрузки потери устойчивости, вызванной прямым мартенситным превращением, имеют значения в 3–4 раза меньшие, чем изотермические критические нагрузки в мартенситном состоянии, характеризующемся наименьшей величиной модуля Юнга.

Анализу устойчивости деформируемых твердых тел, испытывающих термоупругие фазовые превращения, посвящен ограниченный круг работ. В [3, 4] исследуется потеря устойчивости тонкостенных элементов из СПФ вызванная сжимающими реактивными напряжениями, возникающими при обратном мартенситном превращении в заневоленном состоянии. В [5] в несвязной линеаризованной постановке исследовано механическое поведение стойки Шенли на стержнях из СПФ, претерпевающих прямое мартенситное превращение под действием сжимающей нагрузки. В [6] изучено нелинейное поведение такой же стойки.

При решении линеаризованных задач устойчивости для деформируемых твердых тел, испытывающих термоупругие фазовые превращения, возникает проблема выбора одной из двух альтернативных гипотез. Следуя первой при быстром переходе из невозмущенного состояния в смежную форму равновесия дополнительное фазовое превращение произойти не успевает, т.е. параметр фазового состава при написании линеаризованных уравнений не варьируется. Для краткости эту гипотезу можно назвать концепцией “фикси-



Фиг. 1

рованного фазового состава". В [7] в рамках этой гипотезы рассмотрена линейризованная задача устойчивости для стержня из СПФ, претерпевающего прямое мартенситное превращение под действием постоянной по величине и направлению сжимающей нагрузки. Критическая сила оказалась близка к эйлеровой нагрузке потери устойчивости с уменьшенным значением модуля Юнга, характерным для мартенситного состояния.

Альтернативное предположение (гипотеза "продолжающегося фазового перехода") состоит в том, что при переходе в смежную форму равновесия происходит дополнительное фазовое превращение.

Для выяснения принципиальных особенностей явления потери устойчивости при термоупругих фазовых превращениях и выбора одной из двух альтернативных гипотез в данной работе в различных постановках рассмотрена модельная задача о нелинейном поведении и потере устойчивости стойки Шенли (фиг. 1). Опорные стержни стойки выполнены из сплава с памятью формы, имеют одинаковые площади поперечного сечения F и работают только на растяжение-сжатие. Расстояние между стержнями обозначается как b , длина абсолютно твердого тела, к верхней точке оси симметрии которого приложена направленная вертикально вниз постоянная нагрузка P , обозначается как L .

Рассматривается как идеальная стойка, стержни которой имеют первоначально одинаковые длины a , так и стойка с геометрической начальной неправильностью, заключающейся в том, что левый стержень 1 имеет длину, на величину Δa большую, чем правый стержень 2. В этом случае символом a обозначается средняя длина стержней. В результате присутствия начальной неправильности ось симметрии абсолютно твердого тела оказывается наклонена под углом $\varphi_0 = \arcsin(\Delta a/b)$ к вертикали. Рассматривается процесс одновременного снижения одинаковой в каждый момент времени температу-

ры стержней через интервал температур прямого мартенситного превращения, вызывающий переход материала стержней из аустенитного состояния в мартенситное.

1. Определяющие уравнения. Для описания поведения материала опорных стержней из СПФ при прямом мартенситном превращении используется предложенная в [8–10] микромеханическая система определяющих соотношений, одномерный вариант которой имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon^1 + \varepsilon^2, \quad \varepsilon^1 = \frac{\sigma}{E(q)}, \quad \frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_1} + \frac{1-q}{E_2}, \quad \frac{d\varepsilon^2}{dq} = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\sigma_0} + a_0 \varepsilon^2 \quad (1.1)$$

$$q = 0 \text{ при } T > M_s, \quad q = 1 \text{ при } T < M_f \text{ и } q = f(T, M_s, M_f) \text{ при } M_f < T < M_s \quad (1.2)$$

$$M_s = M_s^0 + k|\sigma|, \quad M_f = M_f^0 + k|\sigma| \quad (1.3)$$

Здесь ε , ε^1 , ε^2 , σ – полная, упругая и фазовая продольные деформации а также соответствующее напряжение; q – объемная доля мартенситной фазы; $E(q)$, E_1 , E_2 – модули Юнга двухфазного материала, а также мартенситной и аустенитной фаз; T , M_s , M_f – текущая температура, а также температуры начала и окончания реакции прямого мартенситного превращения; M_s^0 , M_f^0 – те же величины в свободном от механических напряжений материале; σ_0 , a_0 , k – постоянные материала. В качестве функции f , задающей форму диаграммы фазового перехода (1.2), если не оговорено противоположное, используется предложенная в [10] зависимость

$$f(T, M_s, M_f) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{M_s - T}{M_s - M_f}\right) \quad (1.4)$$

В системе (1.1)–(1.3) для упрощения не учитывается объемный эффект реакции мартенситного превращения и температурные деформации.

Следуя соотношениям (1.2) и (1.3) параметр фазового состава q может изменяться при изменении температуры и (или) напряжений. Если температура уменьшается не слишком быстро то при переходе в смежную форму равновесия ее можно считать неизменной. Следовательно, дополнительное фазовое превращение может происходить только за счет изменения напряжений.

Следуя (1.2), (1.3) напряжения влияют на параметр фазового состава лишь в случае если в (1.3) $k \neq 0$. По терминологии [11] краевая задача механики деформируемого твердого тела в рамках системы определяющих соотношений (1.1)–(1.3) при условии $k \neq 0$ трактуется как связная. Таким образом, гипотеза “продолжающегося фазового перехода” для решения задачи устойчивости соответствует связной постановке задачи о нелинейном поведении, а гипотеза “фиксированного фазового состава” – несвязной.

2. Решение линеаризованной задачи устойчивости для идеальной системы в рамках гипотезы “фиксированного фазового состава”. Для решения задачи используются: кинематическое соотношение, связывающее угол отклонения оси стойки от вертикали φ и полные деформации опорных стержней ε_1 и ε_2 :

$$\sin \varphi = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)a/b \quad (2.1)$$

связь между напряжениями σ_1 , σ_2 в опорных стержнях, полными ε_1 , ε_2 , и одинаковыми в силу принятой гипотезы фазовыми деформациями опорных стержней ε^2 :

$$\varepsilon_\beta = \sigma_\beta(\varphi)/E(q) + \varepsilon^2 \quad (\beta = 1, 2) \quad (2.2)$$

и уравнения равновесия

$$\sigma_1 F = -P(1/2 - L/b \operatorname{tg} \varphi), \quad \sigma_2 F = -P(1/2 + L/b \operatorname{tg} \varphi) \quad (2.3)$$

Из (2.1)–(2.3) получается следующее выражение для критической силы $P_1(q)$, соответствующей бифуркации исходной вертикальной формы равновесия

$$P_1(q) = b^2 E(q) F / (2aL) \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) совпадает с формулой эйлеровой критической силы для стойки Шенли на упругих стержнях [12], при условии, что их модуль упругости равен $E(q)$.

Таким образом, в рамках линеаризованной постановки задачи и концепции “фиксированного фазового состава” для идеальной системы значение критической силы совпадает с нагрузкой изотермической потери устойчивости при значении модуля Юнга, характерного для фазового состава в момент потери устойчивости. Минимальное значение критической силы (2.4) равно нагрузке изотермической потери устойчивости в мартенситном состоянии. Явление потери устойчивости, вызванной термоупругим фазовым переходом [2], в данной постановке не описывается.

3. Решение линеаризованной задачи устойчивости для неидеальной стойки Шенли в рамках концепции “фиксированного фазового состава”. Для решения задачи о нелинейном поведении рассматриваемой модели дифференцируется по q кинематическая связь между текущим значением угла отклонения оси симметрии от вертикали φ , его начальным значением φ_0 и полными деформациями в опорных стержнях

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0 + \varepsilon_1 (2a/b + \sin \varphi_0)/2 - \varepsilon_2 (2a/b - \sin \varphi_0)/2 \quad (3.1)$$

и из полученного соотношения исключаются деформации стержней $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ с помощью определяющих соотношений (1.1)–(1.3) и статических уравнений (2.3). В результате для φ получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi}{dq} = \frac{\cos^2 \varphi (\operatorname{tg} \varphi (\alpha S(0) - a_0 S(q)) + a_0 \sin \varphi - (\alpha \beta S(0) + a_0 (1 - \beta S(q))) \sin \varphi_0)}{\cos^3 \varphi - S(q)} \quad (3.2)$$

Его необходимо решать при начальном условии $\varphi(0) = \varphi_{00}$, где величина φ_{00} , являющаяся упругим углом поворота после приложения нагрузки, но до начала фазового перехода, определяется из уравнения

$$S(0) \operatorname{tg} \varphi_{00} - \sin \varphi_{00} + \sin \varphi_0 (1 - \beta S(0)) = 0$$

$$S(q) = \frac{P}{P_1(q)}, \quad \alpha = \frac{E_2}{E_1} - 1 + \frac{2E_2}{3\sigma_0}, \quad \beta = \frac{P_1(0)}{2E_2 F} = \frac{b^2}{4aL} \quad (3.3)$$

следующего из соотношения (3.1), записанного для аустенитного состояния материала стержней стойки. Величина β имеет смысл упругой деформации стержней из СПФ в момент упругой потери устойчивости стойки Шенли в аустенитном состоянии. Естественно предположить, что

$$\beta \ll 1 \quad (3.4)$$

В случае малых углов уравнение (3.2) и начальное условие (3.3) могут быть линеаризованы в окрестности точки $\varphi = 0$. Если, кроме того, пренебречь, следуя (3.4), величиной β по сравнению с единицей, то линеаризованная задача сводится к решению уравнения

$$\frac{d\varphi}{dq} = \left(a_0 + \frac{\alpha S(0)}{1 - S(q)} \right) \varphi - \frac{a_0 \varphi_0}{1 - S(q)} \quad (3.5)$$

при начальном условии

$$\varphi(0) = \varphi_{00} = \varphi_0 / (1 - S(0)) \quad (3.6)$$

Решение задачи (3.5), (3.6) имеет вид

$$\varphi(q) = \frac{\varphi_0}{1 - S(0)} \left(\frac{1 - S(0)}{1 - S(q)} \right)^{1+m} \exp(a_0 q) \left(1 - a_0 \int_0^q \left(\frac{1 - S(r)}{1 - S(0)} \right)^m \exp(-a_0 r) dr \right) \quad (3.7)$$

$$m = \frac{2E_2 \cdot E_1}{3\sigma_0 E_2 - E_1}$$

В случае, если можно пренебречь переменностью модуля Юнга в процессе фазового перехода то $E_2 = E_1 = E$, $S(q) = S(0) = S$ и зависимость $\varphi = \varphi(q)$ может быть представлена в форме

$$\varphi(q) = \frac{\varphi_0}{1 - S} \frac{a_0(1 - S) + \lambda S \exp[(a_0 + \lambda S / (1 - S))q]}{\lambda S + a_0(1 - S)}, \quad \lambda = \frac{2E}{3\sigma_0} \quad (3.8)$$

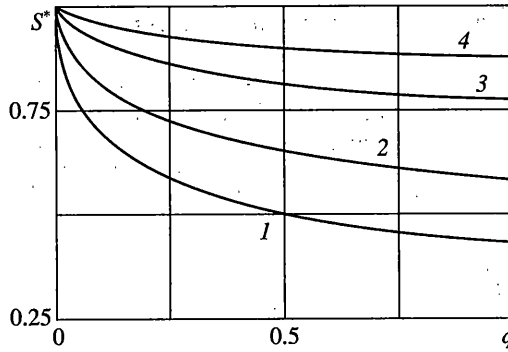
Если $P \geq P_1(0)$, то потеря устойчивости произойдет при приложении нагрузки еще в упругой области до начала фазового перехода. Если $P_1(0) \geq P \geq P_1(1)$ ($S(0) \geq S \geq S(1)$) то на отрезке $[0, 1]$ найдется такое значение q^* , что при $q = q^*$ знаменатель правой части (3.7) обращаются в нуль, а сам угол отклонения – в бесконечность. Следовательно, при

$$P \geq P_1(1) \quad (3.9)$$

сколь угодно малая начальная неправильность приводит к неограниченному (в рамках линеаризованной постановки задачи) росту отклонения от невозмущенного состояния. Таким образом, при выполнении условия (3.9) прямолинейная форма равновесия при прямом мартенситном превращении устойчивой не является.

В то же время, следуя (3.7), при $P < P_1(1)$ (т.е. $S(1) < 1$) возмущение в процессе фазового перехода $\varphi(q)$ пропорционально начальному возмущению φ_0 , причем коэффициент пропорциональности является ограниченной функцией q на отрезке $[0, 1]$, т.е. в классическом понимании прямолинейную форму равновесия можно считать устойчивой, а величину $P_1(1)$ – соответствующей критической силой. Можно заметить, однако, что коэффициент пропорциональности между $\varphi(q)$ и φ_0 является весьма быстро возрастающей функцией q . Так, для значений постоянных материала $a_0 = 0.718$, $\sigma_0 = 4.12 \cdot 10^3$ МПа, $E = 84000$ МПа, характерных для никелида титана, при $P = 0.8P_1(1)$ начальное возмущение в процессе полного прямого мартенситного превращения возрастает на 24 десятичных порядка, так что в практическом плане такие нагрузки вряд ли можно считать допустимыми. Связано столь резкое возрастание с наличием под знаком экспоненты в правой части (3.8) множителя $\lambda S / (1 - S)$, пропорционального величине λ , которая для значений постоянных материала, характерных для никелида титана достаточно велика (величина λ имеет порядок отношения податливостей СПФ, соответствующих полному фазовому переходу и упругому деформированию).

4. Анализ нелинейного поведения системы с начальной неправильностью в несвязной постановке. Решение нелинейной несвязной задачи (3.2), (3.3) показывает [6], что зависимость $\varphi = \varphi(q)$ при нагрузках, существенно меньших $P_1(1)$ имеет точку возврата с вертикальной касательной, соответствующую моменту обращения в нуль знаменателя правой части (3.2). Эту точку как раз и можно считать точкой потери устойчивости, поскольку в ней обращается в бесконечность скорость роста возму-



Фиг. 2

щения, вычисленная по параметру q . В результате для каждого значения q при заданной величине начальной неперильности ϕ_0 можно найти такое значение нагрузки $P^*(\phi_0, q)$, при котором вертикальная касательная на кривой $\phi = \phi(q)$ наблюдается в точке с координатой q . На фиг. 2 изображены графики зависимостей величины $S^* = P^*(\phi_0, q)/P_1(q)$ от q для различных значений ϕ_0 . Расчет проведен для следующих значений безразмерных параметров модели $a_0 = 0.718$, $\alpha = 15.61$, $\beta = 6.25 \cdot 10^{-3}$, характерных для равноатомного никелида титана [9, 10]. Кривая 1 соответствует величине начальной неперильности $\phi_0 = 10^{-2}$, кривая 2 – $\phi_0 = 10^{-3}$, кривая 3 – $\phi_0 = 10^{-5}$, кривая 4 – $\phi_0 = 10^{-7}$. Как видно, для не слишком малых значений ϕ_0 величины критических нагрузок существенно отличаются в меньшую сторону от эйлеровых, однако, при $\phi_0 \rightarrow 0$ получается $P^*(\phi_0, q) \rightarrow P_1(q)$. Следуя данным фиг. 2, значение критической силы существенно зависит от величины начальной неперильности даже если последняя весьма мала.

5. Линеаризованное решение задачи устойчивости для идеальной системы в рамках концепции “продолжающегося фазового перехода”. Считается, что при переходе в смежную форму равновесия, в догружаемом стержне происходит вызванный ростом напряжений дополнительный фазовый переход, приводящий к увеличению объемной доли мартенситной фазы. При этом в разгружаемом стержне обратного мартенситного превращения, вызванного падением напряжений, не происходит, поскольку смежная и тривиальная формы равновесия считаются близкими, а для перехода к обратному превращению за счет явления псевдоупругости необходимо преодолеть конечную ширину петли гистерезиса.

Докритические значения фазовой составляющей деформации находятся интегрированием по q последнего уравнения (1.1):

$$\tilde{\epsilon}_1^2 = \tilde{\epsilon}_2^2 = -\frac{2}{3} \frac{1}{a_0 \sigma_0} \frac{P}{2F} (\exp(a_0 \tilde{q}) - 1) \quad (4.1)$$

Здесь и далее значок тильда ($\sim$) указывает на то, что соответствующая величина характеризует докритическое состояние.

Линеаризованное в окрестности значения $\phi = 0$ выражение для объемной доли мартенситной фазы в догружаемом (за счет отклонения от вертикали на угол ϕ при выпучивании) стержне 2 имеет вид

$$q_2(\phi) = \tilde{q} + \frac{2\psi(\tilde{q})k^*PL}{Fb}\phi \quad (4.2)$$

$$\psi(\tilde{q}) = \frac{\pi}{4} \sqrt{1 - \tilde{q}^2}, \quad k^* = k/(M_s^0 - M_f^0)$$

Фазовая составляющая деформации в догружаемом стержне находится интегрированием по углу φ последнего уравнения (1.1) при постоянной температуре. При этом изменение объемной доли мартенситной фазы происходит за счет увеличения абсолютного значения напряжений в догружаемом стержне из-за выпучивания и определяется по формуле (4.2). В качестве начального условия налагаемого на фазовую деформацию ε_2^2 рассматривается ее докритическое значение (4.1). В итоге получается

$$\varepsilon_2^2(\varphi) = \tilde{\varepsilon}_2^2 + 2a_0\psi(\tilde{q})\frac{k^*PL}{Fb}\left(\tilde{\varepsilon}_2^2 - \frac{1}{3a_0\sigma_0\bar{F}}P\right)\varphi \quad (4.3)$$

В разгружаемом стержне 1 величины q , ε_1^2 , как указывалось выше, не меняются, то есть остаются равными докритическим значениям.

Исходя из линеаризованного варианта соотношения (2.1), привлекая формулы (1.1), (4.1)–(4.3), можно получить уравнение для определения безразмерной величины предельной нагрузки $S = S(0)$, отнесенной к эйлеровой критической силе в аустенитном состоянии

$$S\left\{\left(\gamma + \frac{2E_2}{3\sigma_0}\exp(a_0\tilde{q})\right)\psi(\tilde{q})k^*\beta E_2S + 1 + \gamma\tilde{q}\right\} = 1, \quad \gamma = \frac{E_2 - E_1}{E_1} \quad (4.4)$$

Докритический уровень объемной доли мартенситной фазы подсчитывается по формулам (1.2), (1.4), которые в новых обозначениях имеет вид

$$\tilde{q} = \sin\left(\frac{\pi}{2}(t + k^*\beta E_2S)\right), \quad t = \frac{M_s^0 - T}{M_s^0 - M_f^0} \quad (4.5)$$

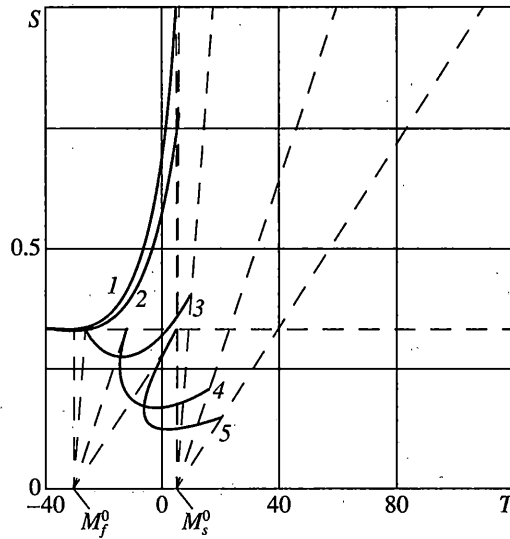
Совместное решение уравнений (4.4), (4.5) позволяет установить зависимость критической силы от температуры T при которой происходит выпучивание. В процессе решения установлено, что эти зависимости меняются при изменении аппроксимации диаграммы фазового перехода, т.е. зависят от вида функции f (1.2). Поэтому наряду с соотношением (1.4) для объемной доли мартенситной фазы используются и две другие зависимости. Первая из них соответствует аппроксимации диаграммы прямого превращения, предложенной в [13] и приводит к выражению

$$q = (1/2)(1 - \cos(\pi(t + k^*|\sigma|))) \quad (4.6)$$

В результате получаются такие же соотношения (4.2), (4.3), (4.4) однако в них уже функция $\psi(\tilde{q})$ имеет другое выражение: $\psi(\tilde{q}) = 0.5\pi\sqrt{\tilde{q}(1 - \tilde{q})}$, причем совместно с (4.4) необходимо решать соотношение $\tilde{q} = 0.5(1 - \cos(\pi(t + k^*\beta E_2S)))$.

Рассмотрена также простейшая линейная аппроксимация диаграммы фазового перехода $q = t + k^*|\sigma|$. Здесь снова получаются соотношения (4.2), (4.3), (4.4), где уже функция ψ имеет постоянное значение, равное 0.5, причем совместно с (4.4) необходимо рассматривать выражение $\tilde{q} = t + k^*\beta E_2S$.

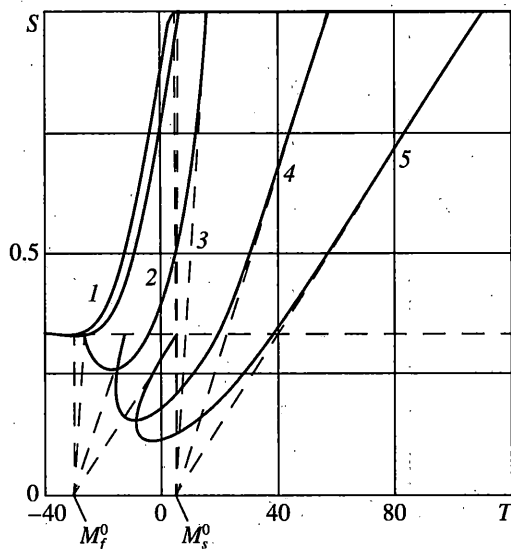
На фиг. 3–5 представлены зависимости параметра критической силы стойки Шенли $S(T) = P^*(T)/P_1(0)$ от температуры при прямом мартенситном превращении, найденные в соответствии с концепцией “продолжающегося фазового перехода” для различных вариантов аппроксимации диаграммы перехода. Графики фиг. 3 соответствуют зависимостям (1.4); фиг. 4 соответствует аппроксимации (4.6); фиг. 5 – линей-



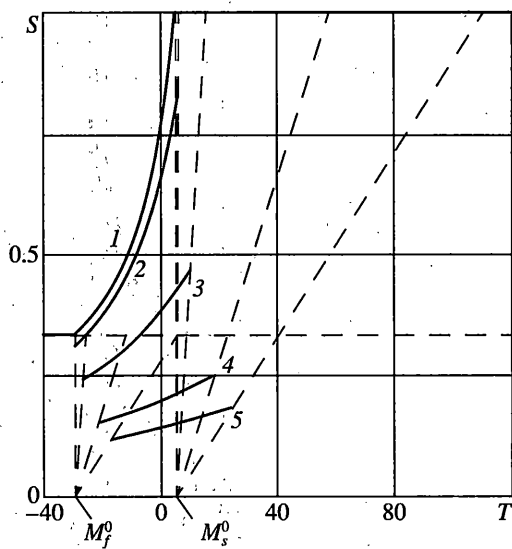
Фиг. 3

ной зависимости объемной доли мартенситной фазы от температуры. Кривые 1 найдены путем решения задачи в рамках гипотезы “фиксированного фазового состава” и приведены для сравнения. Они соответствуют значению эйлеровой критической силы, вычисленной с учетом переменности модуля Юнга в процессе фазового перехода. Кривые 2, 3, 4, 5 – отвечают значениям параметра $k = 0.002, 0.02, 0.1, 0.2^\circ\text{C}/\text{МПа}$ соответственно. На фиг. 3–5 для удобства анализа приведены наклонные штриховые линии, соответствующие температурно-силовым условиям начала и конца прямого перехода в догружаемом опорном стержне с учетом его докритического напряженного состояния. Они проходят через точки $S=0, M_s^0 = 5^\circ\text{C}$, и $S=0, M_f^0 = -30^\circ\text{C}$ соответственно. Все другие параметры здесь и далее имеют те же значения, что и раньше.

Сопоставление графиков на фиг. 3–5 показывает, что форма соответствующих кривых меняется при изменении аппроксимации диаграммы перехода. Наиболее реалистичные графики получаются при использовании аппроксимации диаграммы перехода (4.6), в рамках которой производная dq/dT является непрерывной функцией T для всех значений температуры, включая начало и конец интервала прямого фазового превращения. Поэтому здесь существует единая непрерывная зависимость критической силы потери устойчивости от температуры начиная от эйлеровой силы в аустенитном состоянии при температуре начала превращения, вычисленной с учетом напряжения, соответствующего этой силе и до минимального значения, достигаемого в некоторой внутренней точке интервала превращения. Необходимо отметить, что это минимальное значение примерно в три раза меньше, чем эйлерова критическая сила для мартенситного значения модуля Юнга, которая равна критической нагрузке при решении данной задачи в рамках гипотезы “фиксированного фазового состава”. Наличие участка кривой после точки минимума, на котором критическая нагрузка возрастает с падением температуры объясняется тем, что в рамках аппроксимаций (1.4) или (4.6) производная dq/dT для $T < 0.5(M_s + M_f)$ уменьшается с уменьшением температуры. В силу непрерывности указанной производной в точке конца участка фазового превращения для аппроксимаций (1.4) и (4.6) кривые заканчиваются в точке,



Фиг. 4



Фиг. 5

соответствующей эйлеровой критической силе при мартенситном значении модуля Юнга и температуре конца фазового перехода, вычисленной с учетом напряжений, соответствующих этой критической силе. Наличие участка возрастания критической силы с падением температуры как раз и связано с тем, минимальное значение критической нагрузки существенно меньше, чем эйлерова сила в мартенситном состоянии.

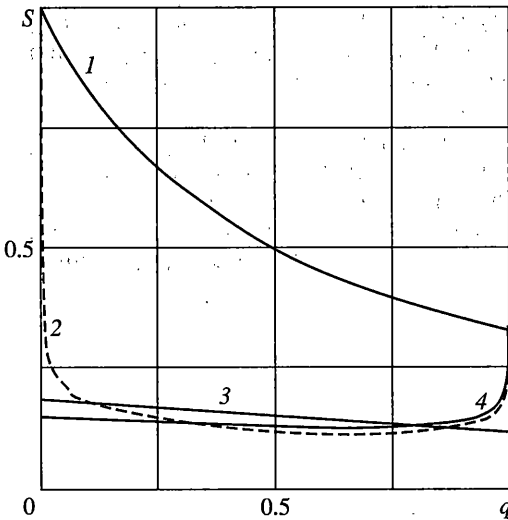
Для аппроксимации (1.4) величина dq/dT терпит разрыв в точке начала фазового перехода. Поэтому непрерывный переход от эйлеровой критической силы в аустенитном состоянии к критической нагрузке потери устойчивости в процессе фазового перехода отсутствует.

Для линейной аппроксимации диаграммы перехода, где разрыв производной dq/dT имеет место на обоих концах интервала превращения, как первая, так и последняя точки графиков зависимости критической нагрузки от температуры не совпадают, соответственно, с точками изотермической потери устойчивости в аустенитном и мартенситном состояниях. В данном случае производная dq/dT сохраняет постоянное значение и участок роста критической силы отсутствует (фиг. 5).

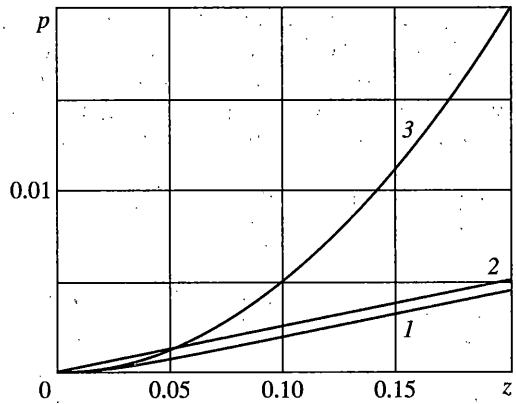
Несмотря на столь существенные качественные различия зависимостей критической силы от температуры для различных аппроксимаций диаграммы деформирования, получающиеся минимальные значения критических сил весьма близки. Этот факт иллюстрируется на графике фиг. 6, где сопоставлены зависимости S от $\bar{q}$, подсчитанные для различных вариантов аппроксимации диаграммы фазового перехода и значения $k = 0.2^\circ\text{C}/\text{МПа}$. Линия 1 соответствует гипотезе “фиксированного фазового состава”, а кривые 2, 3, 4 отвечают решению в рамках концепции “продолжающегося фазового перехода” при использовании, соответственно, формулы (4.6), линейной аппроксимации и формулы (1.4).

Для случая линейной аппроксимации диаграммы перехода минимальное значение критической силы достигается при $\bar{q} = 1$ (фиг. 5). Этот факт позволяет получить аналитическое выражение для минимального значения критической силы P^* :

$$P^* = \frac{E_1 b^2 F}{aL(\sqrt{1 + AE_1 b^2/(2aL)} + 1)}, \quad A = k^* \frac{E_1}{E_2} \left(\gamma + \frac{2E_2}{3\sigma_0} \exp(a_0) \right) \quad (4.7)$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Сопоставляя выражение (2.4) с формулой для критической нагрузки упругой потери устойчивости для стержня можно ввести понятие “эффективной длины” стойки Шенли $\delta = \sqrt{aL}$, как такой величины, от которой критическая сила упругой потери устойчивости стойки Шенли зависит также, как критическая эйлерова сила потери устойчивости для стержня зависит от длины стержня (аналогом момента инерции для стойки Шенли является величина $b^2F/2$). Возникает вопрос о том, как зависит минимальная критическая сила потери устойчивости, вызванной прямым термоупругим превращением для стойки Шенли от ее эффективной длины. Следуя (4.7) при условии $AE_1b^2/(2aL) \ll 1$ (весьма “гибкая” стойка Шенли) для критической силы приближенно справедлива формула (2.4) при $q = 1$, т.е., имеет место обычная для задачи Эйлера ситуация когда критическая сила обратно пропорциональна квадрату эффективной длины. Однако, в противоположном случае $AE_1b^2/(2aL) \gg 1$ (“короткая” стойка Шенли) справедлива другая асимптотика

$$P^* \approx \sqrt{\frac{2E_1}{A} \frac{Fb}{\sqrt{aL}}} \quad (4.8)$$

Здесь уже критическая сила обратно пропорциональна первой, а не второй степени эффективной длины. Этот факт иллюстрируется на фиг. 7, где в координатах $z = b/\delta$, $p = P^*/(E_1F)$ приведены графики зависимости (4.7) (кривая 1), (4.8) – (кривая 2) и (2.4) при $q = 1$, т.е. для эйлеровой критической нагрузки в мартенситном состоянии (кривая 3). Как видно, в достаточно широком диапазоне значений эффективных длин критическая нагрузка, получаемая с помощью концепции “продолжающегося фазового перехода”, близка к линейной, а не к квадратичной функции от обратной величины эффективной длины. Этим еще раз подчеркивается различие в явлениях упругой потери устойчивости и потери устойчивости, вызванной термоупругим фазовым переходом.

6. Анализ нелинейного поведения стойки Шенли с начальной неправильностью в связанной постановке. Решение проблемы может быть сведено к серии задач Коши

для систем двух или трех обыкновенных дифференциальных уравнений, в зависимости от того, оба ли стержня или один находятся при данной температуре в условиях термоупругого превращения. Достигнутые значения искомых функций на предыдущем этапе численного решения соответствующей системы (а иногда и на более ранних), рассматриваются в качестве начальных для следующей системы. Вычисления показывают, что при очень малых углах φ_0 таких участков больше (например, пять), при несколько больших значениях угла – меньше (три). Ниже приведена система трех обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающая случаю, когда оба стержня стойки Шенли находятся в условиях прямого термоупругого превращения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\cos^2 \varphi (\text{sign}(\sigma_1) G_{\varphi 1} + G_{\varphi 2})}{k^* \gamma(\varphi)}$$

$$\frac{d\varepsilon_1^2}{dt} = \frac{F_1 \sqrt{1 - q_1^2} \cos^3 \varphi - F_{\varphi 2} (1 - \text{sign}(\sigma_1)) - G_{\varphi}}{\gamma(\varphi)}$$

$$\frac{d\varepsilon_2^2}{dt} = \frac{F_2 \sqrt{1 - q_2^2} \cos^3 \varphi - F_{\varphi 1} (1 - \text{sign}(\sigma_1)) - \text{sign}(\sigma_1) G_{\varphi}}{\gamma(\varphi)}$$

$$\gamma(\varphi) = \cos^3 \varphi - (F_{\varphi 1} + F_{\varphi 2}), \quad \gamma^+ = \frac{a}{b} + \frac{\sin \varphi_0}{2}, \quad \gamma^- = \frac{a}{b} - \frac{\sin \varphi_0}{2}$$

$$F_j(t) = \frac{2\sigma_j}{3\sigma_0} + a_0 \varepsilon_j^2, \quad q_j(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(t + k^*|\sigma_j|)\right) \quad (j = 1, 2) \quad (5.1)$$

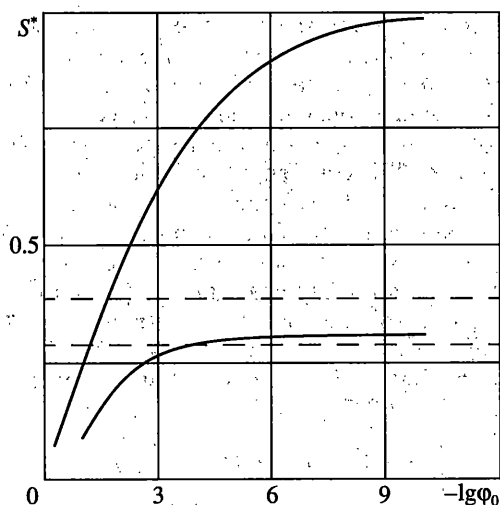
$$G_{\varphi 1}(t) = k^* \text{sign}(\sigma_1) \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - q_1^2} \gamma^+ \left(F_1 + \sigma_1 \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \right)$$

$$G_{\varphi 2}(t) = -k^* \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - q_2^2} \gamma^- \left(F_2 + \sigma_2 \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \right)$$

$$G_{\varphi}(t) = \frac{PL}{Fb} \left(\frac{\gamma^+}{E(q_1)} + \text{sign}(\sigma_1) \frac{\gamma^-}{E(q_2)} \right)$$

$$F_{\varphi 1}(t) = \frac{PL}{Fb} \left(G_{\varphi 1} + \frac{\gamma^+}{E(q_1)} \right), \quad F_{\varphi 2}(t) = \frac{PL}{Fb} \left(G_{\varphi 2} + \frac{\gamma^-}{E(q_2)} \right)$$

На фиг. 8 представлены графики, иллюстрирующие поведение изучаемой механической системы. Нижняя кривая отражает зависимость параметра критической нагрузки $S^* = P^*(\varphi_0)/P_1(1)$, полученной при помощи численного решения систем уравнений типа (5.1) при $k = 0.2 \neq 0$, т.е. в связанной постановке. Здесь $P^*(\varphi_0)$ – критическая нагрузка неидеальной стойки Шенли, при которой равенство $d\varphi/dt = \infty$ имеет место при $q = 1$. Если нагрузить стойку чуть меньшей нагрузкой, то в процессе фазового превращения она не потеряет устойчивость вообще. Верхняя кривая приведена для сравнения. Она отвечает решению той же задачи, но в несвязной постановке. Необходимо отметить, что в отличие от фиг. 6, критические силы на фиг. 8 даны в долях эйлеровой критической нагрузки идеальной стойки Шенли в мартенситном, а не аустенитном состоянии. Верхней горизонтальной штриховой линией на фиг. 8 показан минимальный уровень критической силы, подсчитанный путем решения линеаризованной задачи устойчивости для идеальной системы в рамках концепции “про-



Фиг. 8

должающегося фазового перехода”, найденный при использовании той же зависимости (1.4) для $q(T)$, что и нижняя кривая фиг. 8. Горизонтальная прямая $S^* = 1$ соответствует решению линеаризованной задачи в рамках концепции “фиксированного фазового состава”. Как видно, линеаризованное решение, полученное в рамках концепции “продолжающегося нагружения”, значительно ближе к нелинейному решению связной задачи, чем линеаризованное решение, полученное в рамках концепции “фиксированного фазового состава”. Чтобы соответствие было еще лучше, можно несколько модифицировать концепцию “продолжающегося фазового перехода”. Ранее предполагалось, что в процессе перехода в отклоненное состояние не менялась ни температура, ни сжимающая сила. Вследствие этого в левом стержне имеет место разгрузка и дополнительный фазовый переход не происходит.

Можно отказаться от указанных положений в пользу того, что в процессе перехода в отклоненное состояние могут иметь место возмущения сжимающей силы. Легко видеть, что существуют такие бесконечно малые вариации нагрузки, при которых и в левом стержне имеет место догрузка и дополнительный фазовый переход. Можно показать, что в этом случае получатся те же самые разрешающие уравнения (4.4), (4.5), но с функциями $\psi(\tilde{q})$, имеющими вдвое большие значения. Данному решению соответствует нижняя пунктирная линия рис. 8. Как видно, эта зависимость существенно ближе к точному нелинейному решению, причем дает для него оценку снизу.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы. В случае решения задачи устойчивости при прямом термоупругом превращении в рамках концепции “фиксированного фазового состава” получаемые значения критических сил существенно зависят от постановки задачи и различны для решений линеаризованной и нелинейной задач а также при анализе идеальной системы и системы с малой начальной неправильностью. Получающееся при этом значение критической силы зависит от начального возмущения даже при весьма малом его значении. В то же время, при анализе устойчивости в рамках концепции “продолжающегося фазового перехода” значения критических сил, получаемые при решении задачи в различных постановках, различаются значительно меньше. Для достаточно малых начальных возмуще-

ний критические нагрузки не зависят от величины этих возмущений (см. нижняя кривая фиг. 8). Критические нагрузки, получаемые в рамках концепции “продолжающегося фазового перехода” существенно (примерно в 3 раза) ниже, чем определяемые в рамках концепции “фиксированного фазового состава” или чем нагрузки изотермической потери устойчивости в мартенситном состоянии, что соответствует экспериментальным данным [2]. Наилучшее соответствие с решением нелинейной задачи для малых начальных неправильностей дает решение задачи устойчивости в рамках концепции “продолжающегося фазового перехода” и предположении о том, что дополнительное фазовое превращение испытывают оба опорных стержня. Все эти данные свидетельствуют в пользу концепции “продолжающегося фазового перехода” для решения задач устойчивости при термоупругих фазовых превращениях.

Работа выполнена при содействии РФФИ, проект № 02-01-01075, Министерства образования РФ проект № Е00-4-57 и в соответствии с государственным контрактом № 10002-251/ОЭММПУ-11.079-077/190603-775.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993. 471с.
2. Мовчан А.А., Казарина С.А. Экспериментальное исследование потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 6. С. 82–89.
3. Хусаинов М.А. Исследование эффекта осесимметричного выпучивания круглых пластин // Ж. техн. физики. 1997. Т. 67. № 6. С. 118–120.
4. Хусаинов М.А., Малухина О.А. Анализ устойчивости сферических сегментов с памятью формы // Тр. 3-го Междунар. семинара “Современные проблемы прочности”. Т. 2. Изд-во Новгородс. ун-та, 1999. С. 185–189.
5. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. К проблеме устойчивости равновесия при термоупругих мартенситных фазовых превращениях // Тр. 3-го Междунар. семинара “Современные проблемы прочности”. Т. 1. Изд-во Новгородс. ун-та. 1999. С. 307–311.
6. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость “стойки Шенли” при ползучести или при прямом термоупругом мартенситном превращении // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. № 1. С. 89–102.
7. Сильченко Л.Г. Устойчивость сжатого стержня из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении // Физика процессов деформации и разрушения и прогнозирование механического поведения материалов: 36-й семинар “Актуальные проблемы прочности”. Науч. тр. Ч. 1. Витебск: 2000. С. 359–364.
8. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
9. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 197–205.
10. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 2. С. 173–181.
11. Мовчан А.А. Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 79–90.
12. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
13. Liang C., Rogers C.A. One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // Appl. Math. Model. 1990. V. 1. № 2. P. 207–235.

Москва

Поступила в редакцию
10.04.2002