МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2004

УДК 539.3:534.1

© 2004 г. В.М. БЕЛУБЕКЯН

К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Учет поперечных сдвигов в задачах устойчивости изотропных пластин в большинстве случаев приводит к поправке порядка квадрата относительной толщины по сравнению с результатами теории пластин Кирхгофа [1]. Однако для некоторых вариантов граничных условий на кромках пластины эта поправка оказывается более существенной. Приводятся уравнения устойчивости пластинки на основе варианта уточненной теории первого порядка, предложенного в [2]. На примере локализованной неустойчивости у свободного края пластинки обсуждается вклад трех естественных граничных условий.

1. Изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Пластинка сжата равномерно по сторонам $x = 0$, a усилием $p = 2h\sigma_0$. Принимается наиболее простой вариант уравнений пространственной задачи устойчивости [3, 4]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ik}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

в которых не учитываются начальные деформации, а σ_{ij}^0 – начальные напряжения. В дальнейшем считается, что в начальном напряженном состоянии $\sigma_{11}^0 = -\sigma_0 = \mathrm{const}$, а остальные компоненты напряжений тождественно равны нулю.

При сведении пространственной задачи устойчивости пластинки к двумерной, в основе берется уточненная теория первого порядка (теория типа Э. Рейснера) согласно [2]. В частности, для перемещений принимается

$$u_1 = u - z\theta_1, \quad u_2 = v - z\theta_2, \quad u_3 = w \tag{1.2}$$

где u_1, u_2, u_3, u, w, θ_1, θ_2, являются функциями только координат x, y. Выражения (1.2) отличаются от соответствующих выражений статьи [2] знаком при θ_1 и θ_2, что не имеет для дальнейшего никакого значения.

Процедура сведения к двумерным уравнениям, (в том числе и обозначения) идентична изложению цитируемой статьи. При этом, как обычно, задача, обобщенного плоского напряженного состояния отделяется от задачи изгиба. Окончательно, уравнения статической устойчивости пластинки получаются в виде:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = \Delta w - \frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

$$D\left[\frac{1-\nu}{2}\Delta\theta_1 + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y}\right)\right] + 2Gh\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_1\right) - \frac{2h^3}{3}\sigma_0\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = 0 \tag{1.4}$$

$$D\left[\frac{1-\nu}{2}\Delta\theta_2+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\right)\right]+2Gh\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\theta_2\right)-\frac{2h^3}{3}\sigma_0\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} = 0 \tag{1.5}$$

$$D = 2Eh^3/3(1-\nu^2), \quad G = E/2(1-\nu)$$

Как показано в [2], структура системы уравнений типа (1.3) – (1.5) позволяет ввести потенциальные функции следующим образом:

$$\theta_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \theta_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.6}$$

Преобразование (1.6) приводит систему уравнений (1.3) – (1.5) к виду

$$\Delta w-\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\Delta\varphi = 0 \tag{1.7}$$

$$\Delta\varphi-\frac{1-\nu}{2}\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{3(1-\nu)}{2h^2}(\varphi-w) = 0 \tag{1.8}$$

$$\Delta\psi-\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{3}{h^2}\psi = 0 \tag{1.9}$$

Уравнение (1.7) при $\sigma_0 = 0$ сводится к $\Delta w - \Delta\varphi = 0$, которое отличается от соответствующего уравнения из [2] только знаком при $\Delta\varphi$, что обусловленно выбором знака в (1.2). В итоге имеется система двух уравнений (1.7), (1.8) относительно искомых функций w, φ и автономное уравнение (1.9), определяющее функцию ψ. Из уравнений (1.7), (1.8) можно исключить функцию w:

$$\left(\Delta-\frac{1-\nu}{2}\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2}{\partial x}\right)\left(\Delta\varphi-\frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)+\frac{2h\sigma_0}{D}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0 \tag{1.10}$$

Точно такое же уравнение получается и для w, если исключить φ. Из уравнения для w, при $G \to \infty$, следует уравнение статической устойчивости пластин по теории Кирхгоффа. Однако решения задач предпочтительнее начинать с решения уравнения (1.10), после чего функция w определяется из уравнения (1.8) непосредственно.

2. В отличие от теории Кирхгоффа, на краю пластинки должны быть заданы три граничные условия. В частности, при $x = \text{const}$ обычному условию шарнирного закрепления ($w = 0$, $M_1 = 0$) здесь соответствуют два варианта условий [5]:

$$w = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad M_1 = 0 \tag{2.1}$$

$$w = 0, \quad H = 0, \quad M_1 = 0 \tag{2.2}$$

Аналогично имеется два варианта граничных условий типа скользящего контакта [6]:

$$\theta_1 = 0, \quad H = 0, \quad N_1 = P\partial w/\partial x \tag{2.3}$$

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad N_1 = P\partial w/\partial x \tag{2.4}$$

Условия (2.3), (2.4) эквивалентны условиям

$$\theta_1 = 0, \quad \partial\theta_2/\partial x = 0, \quad \partial w/\partial x = 0$$

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad \partial w/\partial x = 0$$

Наконец следует отметить, что уточненная теория дает возможность удовлетворить трем статическим граничным условиям

$$H = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = P\partial w/\partial x \quad \text{при} \quad x = \text{const} \tag{2.5}$$

В [7] приводятся восемь вариантов граничных условий для теории пластин Рейснера.

При решении системы уравнений (1.7) – (1.9) граничные условия следует выразить через функции w, φ, ψ. В частности, условия (2.5) будут иметь вид

$$\begin{gathered}2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+(1-\nu)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0\\ \frac{\partial}{\partial x}(w-\varphi)-\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\sigma_0}{G}\frac{\partial w}{\partial x}\end{gathered} \tag{2.6}$$

В условиях (2.3) – (2.6) считается, что сжимающее усилие не меняет направление при деформации пластинки (не следящая нагрузка).

Процедура решения задач потери устойчивости пластин по цилиндрической поверхности (форма изгиба пластины не зависит от координаты y) принципиально не отличается от решения соответствующих задач по теории Кирхгофа.

В частности, если края пластинки $x = 0, a$ шарнирно закреплены, независимо от варианта граничных условий (2.1) или (2.2), для определения критической нагрузки получается формула

$$\frac{P_*}{D} = \left[1+\frac{3-\nu}{3(1-\nu)}\left(\frac{\pi h}{a}\right)^2\right]^{-1}\frac{\pi^2}{a^2} \tag{2.7}$$

При выводе формулы (2.7) пренебрегается величина порядка $(h/a)^4$ по сравнению с единицей.

В случае, когда на всех сторонах прямоугольной пластинки имеют место условия шарнирного закрепления (2.1), но не (2.2) задача решается также просто и критическая нагрузка определяется из выражения:

$$\frac{P_{mn}}{D} = \left[1+\frac{3-\nu}{3(1-\nu)}(\mu_m^2+\lambda_m^2)\pi^2h^2\right]^{-1}\frac{(\mu_m^2+\lambda_m^2)^2}{\mu_m^2} \tag{2.8}$$

$$\mu_m = m\pi/a, \quad \lambda_n = n\pi/b \quad (m, n = 1, 2, 3...)$$

Во всех указанных случаях поправка к результатам теории Кирхгофа имеет порядок квадрата относительной толщины пластинки.

3. Рассматривается задача локализованной неустойчивости пластинки. Пусть полубесконечная пластинка по краям $x = 0, a$ шарнирно закреплена по варианту граничных условий (2.1). Край $y = 0$ свободен, т.е. $H = 0$, $M_2 = 0$, $N_2 = 0$, что при помощи функций w, φ, ψ записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-(1-\nu)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0\\ \frac{\partial}{\partial y}(w-\varphi)-\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0\end{gathered} \tag{3.1}$$

Требуется найти нетривиальное решение системы уравнений (1.7) – (1.9), удовлетворяющее граничным условиям (2.1), (3.1) и условиям затухания

$$\lim_{y\to\infty} w = 0, \quad \lim_{y\to\infty}\varphi = 0, \quad \lim_{y\to\infty}\psi = 0 \tag{3.2}$$

Система уравнений уравнений (1.7) – (1.9) имеет следующее решение, удовлетворяющее граничным условиям (2.1):

$$
\begin{aligned}
&w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y)\sin\mu_m x \quad \varphi = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(y)\sin\mu_m x \\
&\psi = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y)\cos\mu_m x \quad \mu_m = \frac{m\pi}{a}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Функция $g_m(y)$, удовлетворяющая условию затухания (3.2), определяется из уравнения (1.10):

$$
g_m = A_1\exp(-p_1\mu_m y) + A_2\exp(-p_2\mu_m y) \tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&p_1 = \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha + \gamma_m^2}\right)^{1/2}, \quad p_2 = \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha + \gamma_m^2}\right)^{1/2} \\
&\alpha = 1 - \frac{3-\nu}{2}\frac{\sigma_0}{G} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\sigma_0^2}{G^2}, \quad \beta = 1 - \frac{3-\nu}{4}\frac{\sigma_0}{G}, \quad \gamma_m^2 = \frac{2h\sigma_0}{D\mu_m^2}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные.

При этом затухающее по y решение (3.4) существует, если одновременно $\operatorname{Re}p_1 > 0$ и $\operatorname{Re}p_2 > 0$, что возможно только если выполняется условие

$$
0 < \gamma_m^2 < \alpha \tag{3.6}
$$

Функции $f_m(y)$ определяются непосредственно из уравнения (1.8):

$$
f_m = \left[1 + \frac{2}{1-\nu}\xi^2\left(1 - \frac{1-\nu}{2}\frac{\sigma_0}{G}\right)\right]g_m - \frac{2h^2}{3(1-\nu)}g_m'', \quad \xi^2 = \frac{\mu_m^2 h^2}{3} \tag{3.7}
$$

Решение для функции $q_m(y)$, удовлетворяющее условию затухания из (3.2), находится из уравнения (1.9) и имеет вид

$$
q_m = B_1\exp(-\eta y), \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{h}\sqrt{1-\xi^2} \tag{3.8}
$$

Подстановка (3.3), (3.4), (3.7), (3.8), в граничные условия (3.1) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, B:

$$
\begin{aligned}
&p_1 A_1 + p_2 A_2\mu - 0.5(1 + \mu_m^{-2}\eta^2)B_1 = 0 \\
&(\kappa - p_1^2)p_1 A_1 + (\kappa - p_2^2)p_2 A_2\mu - 0.5(1-\nu)\xi^{-2}B_1 = 0 \\
&(p_1^2 - \nu)A_1 + (p_2^2 - \nu)A_2\mu - (1-\nu)\mu_m^{-1}\eta B_1 = 0 \\
&\kappa = 1 - \xi^2\gamma_m^2
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Приравняв нулю детерминант системы (3.9), после некоторых преобразований получим уравнение относительно γ_m:

$$
(p_1 - p_2)K(\gamma_m) = 0 \tag{3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
K(\gamma_m) = &\frac{1}{1-\nu}(\xi^2 + \sqrt{1-\xi^2})[-p_1^2 p_2^2 + (\nu - \kappa)p_1 p_2 + \nu(p_1^2 + p_2^2) - \nu\kappa] - \\
&- p_1 p_2 - \nu + 2\xi\sqrt{1-\xi^2}p_1 p_2(p_1 + p_2)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Таблица

ξ \ ν	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0.99997	0.99940	0.99621	0.98533	0.95711
0.1	0.99996	0.99926	0.99541	0.98257	0.95041
0.3	0.9994	0.99880	0.99285	0.97440	0.93223

Локализованная неустойчивость будет иметь место, если уравнение (3.10), а следовательно и уравнение

$$K(\gamma_m) = 0 \tag{3.12}$$

имеет решение, удовлетворяющее условию затухания (3.6).

Если в уравнении (3.12) положить $\xi = 0$, то получится уравнение, следующее из теории Кирхгофа [8]:

$$1-\gamma_m^2+2(1-\nu)\sqrt{1-\gamma_m^2}-\nu^2 = 0, \quad 0<\gamma_m^2<1 \tag{3.13}$$

которое всегда имеет решение при естественном ограничении $\nu \neq 0$. При $\nu = 0$ неустойчивость существует, но она не локализована у края пластинки.

Для выяснения вопроса существования действительного корня уравнения (3.12), определяются значения функции $K(\gamma_m)$ на концах интервала, задаваемого неравенствами (3.6). Имея ввиду, что в теории пластин выполнение неравенства $\xi > 0$ необходимо, нетрудно показать, что $K(0) < 0$. Из равенства

$$K(\sqrt{\alpha}) = \frac{\nu}{1-\nu}\left[(\xi^2+\sqrt{1-\xi^2})\left(1-\frac{2\xi^2\alpha}{1-\nu}\right)-1+\nu\right] \tag{3.14}$$

получается что

$$K(\sqrt{\alpha})>0 \quad \text{при} \quad \frac{2\nu(1-\nu)}{1+3\nu}>\xi^2 \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что условие (3.15) достаточно для существования корня уравнения (3.12), удовлетворяющего условию затухания (3.6). Необходимо отметить, что в отличии от (3.13), здесь при учете поперечных сдвигов, не для всех значений коэффициента Пуассона ν имеет место локализованная неустойчивость.

Если в уравнении (3.12) пренебречь ξ^2 по сравнению с единицей, то можно получить приближенное решение в виде

$$\gamma_m^2 = (1-\nu)[1+\nu+2(1-\xi)\sqrt{(1-\nu)^2(1-\xi)^2+\nu^2}-2(1-\nu)(1-\xi)^2] \tag{3.16}$$

При $\xi = 0$ из (3.16) получается решение уравнения (3.13) соответствующее теории Кирхгофа. Следует отметить, что минимальной критической силе соответствует значение $m = 1$.

В таблице приводятся численные значения γ_m^2 по формуле (3.16) в зависимости от относительной толщины пластинки ξ и коэффициента Пуассона ν. Очевидно, что при больших значениях ξ отличие от теории Кирхгофа будет больше. Во всех случаях значения γ_m^2 близки к единице, что означает слабое затухание формы неустойчивости от свободного края пластинки.

Показывается также, что при граничных условиях на краю $y = 0$ типа шарнирного закрепления (2.1), (2.2) и типа скользящего контакта (2.3), (2.4) локализованная неустойчивость не имеет места.

Аналогичные результаты получены и по уточненной теории С.А. Амбарцумяна.

Благодарю автора рецензии за существенные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. *Васильев В.В.* Классическая теория пластин – история и современный анализ // Изв. АН. МТТ. 1998. № 3. С. 46–58.
3. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
4. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
5. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. № 4. С. 668–686.
6. *Белубекян В.М., Белубекян М.В.* О граничных условиях теории пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. № 2. С. 11–21.
7. *Иванова Е.А.* Асимптотический и численный анализ высокочастотных свободных колебаний прямоугольных пластин // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 163–174.
8. *Белубекян М.В.* Задачи локализованной неустойчивости пластинки // Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: ЕГУ, 1997. С. 95–99.

Ереван

Поступила в редакцию
29.02.2000