

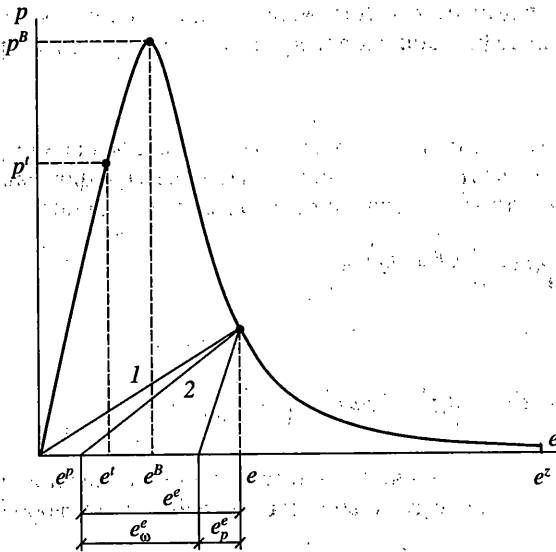
**ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ В ЗАДАЧЕ
О РАВНОМЕРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ШАРА
С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЗОНОЙ ИЗ ПОВРЕЖДАЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА**

Итерационные методы широко применяются для решения различных нелинейных краевых задач механики деформированного твердого тела. Сходимость этих процессов является достаточным условием определения напряженно-деформированного состояния. Если же процедура расходится, то связь этого явления с физическим состоянием тела, как правило, не просматривается.

Наиболее логичной представляется взаимосвязь расходимости итераций с неустойчивостью равновесия тела, являющейся следствием возникновения в нем областей физически неустойчивого материала, не удовлетворяющего постулату Друккера. Неустойчивость материала проявляется в появлении на диаграмме деформирования падающего участка с отрицательным касательным модулем и вызывается процессом разупрочнения, который происходит вследствие роста внутренних дефектов, что эквивалентно уменьшению площади эффективного, т.е. несущего фактически нагрузку, сечения. При макроскопическом описании поведения таких материалов постулат Друккера не выполняется [1]. Ярко выраженным эффектом деформационного разупрочнения обладают структурно неоднородные материалы такие, как композиты [2], бетон [3], геоматериалы [3, 4] и т.п.

В моделях, предназначенных для определения условий потери устойчивости тела в результате его деформирования нередко используются сферические области из разупрочняющегося материала. Так в работе [5] включение в массив скальной породы сферической зоны из разупрочняющегося геоматериала служит для анализа неустойчивости, приводящей к землетрясению. В статье [6] исследуется локализация деформаций в сферический разупрочняющийся регион.

В данной работе модель с разупрочняющейся сферической зоной применяется для установления связи между расходимостью итерационных процессов расчета напряженного состояния с потерей устойчивости равновесия тела. Рассматривается равномерное растяжение по мягкой и жесткой схемам нагружения кусочно-неоднородного шара, внутренняя шарообразная область которого состоит из повреждающегося материала, переходящего при определенном значении объемной деформации в состояние разупрочнения. Сначала производится вычисление напряжений и деформаций с использованием различных итерационных процедур, которые выбираются в зависимости от закона разгрузки материала внутренней зоны. Затем методами теории катастроф исследуется устойчивость деформирования этой системы. В результате установлено, что начало расходимости предложенных итерационных процессов совпадает с моментом потери устойчивости деформирования шара, когда происходит смена устойчивых положений равновесия системы на неустойчивые. Отметим, что полученные условия потери устойчивости совпадают с приведенными в [6] для аналогичной системы, после соответствующего согласования условий задач.



Фиг. 1

1. Рассмотрим составной шар, состоящий из внутреннего шара с радиусом a и окружающей его толстостенной сферы с внешним радиусом b (центры тел совпадают). Деформирование осуществляем либо заданием на внешней границе всестороннего растягивающего усилия, интенсивностью q (мягкое нагружение), либо заданием одинакового радиального перемещения w точкам границы (жесткое нагружение). Материал сферы при нагружении остается в упругом состоянии (модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν). Свойства материала внутреннего шара при всестороннем растяжении характеризует полная диаграмма в координатах объемное напряжение p – объемная деформация e (фиг. 1). На диаграмме p^t, p^B, e^t, e^B – соответственно пределы пропорциональности и прочности при всестороннем растяжении и отвечающие им объемные деформации, e^z – деформация разрушения. Характеристики упругости совпадают с параметрами материала сферы, на стадиях упрочнения (восходящая после предела пропорциональности ветвь) и разупрочнения (падающая ветвь) свойства материала определяет касательный (мгновенный) объемный модуль $K^p = dp/de$ ($K^p < K$, K – модуль объемной упругости).

При всестороннем растяжении макропластические деформации, понимаемые в традиционном смысле, не возникают. Поэтому нелинейность диаграммы $p(e)$ связана с повреждениями материала микротрещинами, микропорами и т.п. В этом случае возможны два варианта разгрузки. Первый – без остаточных деформаций с секущим модулем $K^s = p/e$ (прямая 1, фиг. 1), когда повреждения абсолютно хрупкие. Второй – с образованием незначительных остаточных деформаций, которые будем обозначать e^p , и модулем разгрузки $K^u = p/(e - e^p)$, $K^u < K$ (прямая 2, фиг. 1), если возле повреждений, например, в вершинах микротрещин, образуются локальные микропластические зоны.

Запишем уравнение второго закона термодинамики с учетом необратимости и изотермичности процесса деформирования. Имеем [7]

$$dF = \frac{1}{\rho} p de - dg \quad (1.1)$$

где F – свободная энергия, $dg \geq 0$ – некомпенсированное тепло, ρ – плотность материала.

Параметрами термодинамического состояния являются e^e , e^p – упругая и неупругая составляющие объемной деформации, определяемые по результатам разгрузки, причем

$$e = e^e + e^p \quad (1.2)$$

и параметр ω , характеризующий поврежденность материала микродефектами. Если упругие свойства не зависят от остаточных (неупругих) деформаций, то $F = F(e^e, \omega)$. Тогда, учитывая равенство (1.2), уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial e^e} - \frac{p}{\rho}\right)de^e + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}d\omega - \frac{p}{\rho}de^p + dg\right) = 0$$

Отсюда следует

$$p = \rho \frac{\partial F}{\partial e^e}, \quad \rho dg = dg^p + dg^\omega = pde^p + \left(-\rho \frac{\partial F}{\partial \omega}\right)d\omega \quad (1.3)$$

где dg^p – механическая диссипация, dg^ω – диссипация континуального разрушения [8].

Для рассматриваемого процесса деформирования функцию свободной энергии можно записать в виде

$$F = \rho^{-1}(0.5Ke^e e^e - 0.5\omega Ke^e e^e) = 0.5\rho^{-1}(1 - \omega)Ke^e e^e$$

где первый член представляет собой потенциальную энергию упругих деформаций после механической диссипации, а второй – энергию, потерянную вследствие континуального разрушения. Тогда, учитывая равенство (1.2), получаем

$$p = \rho \frac{\partial F}{\partial e^e} = K(1 - \omega)(e - e^p), \quad K(1 - \omega) = K^u \quad (1.4)$$

Из (1.4) следует, что $e^e = p/K + \omega e^e = e_p^e + e_\omega^e$ (фиг.1). Так как $p = K^u e^e$, то

$$\omega = 1 - K^u K^{-1} \quad (1.5)$$

Далее, используя формулу (1.4), находим

$$dp = K(1 - \omega)(de - de^p) - K(e - e^p)d\omega \quad (1.6)$$

С другой стороны справедливо инкрементальное соотношение

$$dp = K^p de \quad (1.7)$$

Приравняв выражения (1.6) и (1.7), получаем дифференциальное уравнение

$$(e - e^p)\frac{d\omega}{de} + \omega\left(1 - \frac{de^p}{de}\right) = 1 - \frac{K^p}{K} - \frac{de^p}{de} \quad (1.8)$$

с начальными условиями

$$\omega(0) = 0, \quad e^p(0) = 0, \quad K^p(0) = K, \quad K^u(0) = K$$

Если остаточные деформации не возникают ($e^p = 0$), то из (1.8) находим

$$e d\omega/de + \omega = 1 - K^p/K \quad (1.9)$$

Уравнение (1.8) определяет кинетику совместного формирования поврежденности и остаточной деформации, а уравнение (1.9) – кинетику поврежденности при отсутствии остаточной деформации. Непосредственно проверяется, что выражение (1.5) с учетом вы-

ражений для K^p , K^u и K^s является общим решением дифференциального уравнения (1.8) и уравнения (1.9) при $K^u = K^s$.

Наконец, уравнение (1.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} de_{\omega}^e &= de_{\omega}^p - de^p = d(\omega(e - e^p)) \\ de_{\omega}^p &= (1 - K^p/K)de \end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь de_{ω}^p – приращение псевдопластической деформации, которое могло бы иметь место, если бы модуль разгрузки был равен K . Аналогичное представление имеет и уравнение (1.9), а именно, $de_{\omega} = de_{\omega}^p$, где $e_{\omega} = \omega e$.

Возвращаясь к уравнению (1.4), запишем его в виде

$$p = K[e - e^p - \omega(e - e^p)] = K[e - (e^p + e_{\omega}^e)] = K(e - e_{\omega}^p) \tag{1.11}$$

где e_{ω}^p – величина полной псевдопластической деформации, определяемой разгрузкой с модулем K . Кинетика ее изменения зависит от изменения e^p и ω и описывается уравнение (1.8) (или (1.9)), а с формальной точки зрения – равенством (1.10).

2. Составляющие некомпенсированного тепла положительны ($dg^p \geq 0$, $dg^{\omega} \geq 0$). Подставляя в выражения для dg^p , dg^{ω} из (1.3) свободную энергию F , функцию ω из (1.5), выражение для de^p , полученное из уравнения (1.8) с учетом того, что $de = dp/K^p$, $e - e^p = p/K^u$, получаем неравенства $K^u > K^p$, $dK^u \leq 0$ и $dK^u \geq (1 - K^u/K^p)K^u dp/p$. Отсюда $dK^u \leq 0$ как при $K^p > 0$ ($dp > 0$), так и при $K^p < 0$ ($dp < 0$). Данное условие накладывает ограничение на скорость выполаживания модуля разгрузки, которое обусловлено континуальным разрушением. Оно обеспечивает выполнение неравенства $de^p \geq 0$ и, следовательно, условия $dg^p \geq 0$.

Далее считаем, что материал разрушен, если он потерял способность диссипировать подводимую энергию. Так как пластическая деформация мала, то диссипация континуального разрушения является определяющей. Следовательно, в качестве условия разрушения выступает равенство $dg^{\omega} = 0$ или

$$dg^{\omega} = -\rho \frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega = \frac{1}{2} K e^e e^e d\omega = 0$$

Отсюда $d\omega = 0$ или $\omega = \text{const}$. Таким образом, поврежденность материала при разрушении достигает некоторого постоянного значения. Из равенства (1.5) вытекает, что разрушение происходит при $K^u = 0$ (или $K^s = 0$) и $\omega = 1$.

3. Перейдем к решению задачи о всестороннем растяжении составного шара, используя для внутренней шаровой области V_a формальную связь между напряжениями и деформациями (1.11). Для материала внешней толстостенной сферы (область V_b) эта связь определяется законом Гука

$$\begin{aligned} \sigma_r &= E(mn)^{-1}[(1 - \nu)\epsilon_r + 2\nu\epsilon_{\theta}], \quad \sigma_{\theta} = E(mn)^{-1}(\nu\epsilon_r + \epsilon_{\theta}), \quad \epsilon_{\theta} = \epsilon_{\varphi}, \quad \sigma_{\theta} = \sigma_{\varphi} \\ m &= 1 + \nu, \quad n = 1 - 2\nu \end{aligned}$$

σ_r , σ_{θ} , σ_{φ} , ϵ_r , ϵ_{θ} , ϵ_{φ} – напряжения и деформации в сферической системе координат. К физическим уравнениям добавляются уравнение равновесия и соотношения Коши

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = 0; \quad \epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_{\theta} = \frac{u}{r}$$

(u – радиальное перемещение) и граничные условия, которые в случае жесткого нагружения равны

$$u|_{r=b} = w \quad (3.1)$$

а при мягком нагружении имеют вид

$$\sigma_r|_{r=b} = q \quad (3.2)$$

Сформулированная исходная задача разбивается на две, а именно, основную и корректирующую задачи. Основная – это задача о всестороннем растяжении упругого шара с граничными условиями (3.1), (3.2). Ее решение для жесткого нагружения имеет вид

$$p' = Kwb^{-1}, \quad e' = wb^{-1}, \quad u' = wrb^{-1} \quad (3.3)$$

а для мягкого нагружения определено выражениями

$$p' = q, \quad e' = qK^{-1}, \quad u' = qrK^{-1} \quad (3.4)$$

Корректирующая – это задача об определении остаточных напряжений в сплошном упругом шаре при заданном значении псевдопластической деформации внутреннего шара, определяемой величиной e_ω^p . Граничные условия в этом случае при жестком нагружении равны

$$u|_{r=b} = 0 \quad (3.5)$$

(внешняя граница закреплена), а при мягком нагружении имеют вид

$$\sigma_r''|_{r=b} = 0 \quad (3.6)$$

(внешняя граница свободна от напряжений).

Общий вид решения корректирующей задачи с граничными условиями (3.5) определяют выражения

$$p'' = K(\varepsilon^0 - e_\omega^p), \quad \varepsilon^0 = e_\omega^p B, \quad v' = e_\omega^p Br, \quad r \in V_a$$

$$\varepsilon_r' = -e_\omega^p N \left(\frac{2b^3}{r^3} + 1 \right), \quad \varepsilon_\vartheta' = e_\omega^p N \left(\frac{b^3}{r^3} - 1 \right), \quad v' = e_\omega^p N \left(\frac{b^3}{r^2} - r \right) \quad (3.7)$$

$$\sigma_r'' = -\frac{e_\omega^p EN}{mn} \left(m + n \frac{2b^3}{r^3} \right), \quad \sigma_\vartheta'' = \frac{e_\omega^p N}{mn} \left(-m + n \frac{b^3}{r^3} \right), \quad r \in V_b$$

а с граничными условиями (3.6) задан формулами

$$p'' = K(\varepsilon^0 - e_\omega^p), \quad \varepsilon^0 = e_\omega^p A, \quad v' = e_\omega^p Ar, \quad r \in V_a$$

$$\sigma_r'' = e_\omega^p M \left(1 - \frac{b^3}{r^3} \right), \quad \sigma_\vartheta'' = e_\omega^p M \left(1 + \frac{b^3}{2r^3} \right), \quad v' = \frac{e_\omega^p M}{E} \left(nr + m \frac{b^3}{2r^2} \right) \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_r' = \frac{e_\omega^p M}{E} \left(n - m \frac{b^3}{r^3} \right), \quad \varepsilon_\vartheta' = \frac{e_\omega^p M}{E} \left(n + m \frac{b^3}{2r^3} \right), \quad r \in V_b$$

Используя свойство непрерывности радиальных напряжений и перемещений, находим, что

$$N = \frac{a^3 m}{b^3(m+2n)}, \quad B = \frac{(b^3 - a^3)m}{b^3(m+2n)}, \quad M = \frac{2a^3 E}{b^3(m+2n)}, \quad A = \frac{b^3 m + 2a^3 n}{b^3(m+2n)}$$

Непосредственно проверяется, что решением исходной задачи при заданном значении e_ω^p является сумма решений основной и корректирующей задач.

Пусть теперь при некотором значении q составной шар находится в равновесии. В области V_a известны величина псевдопластической деформации e_ω^p , характеристики материала ω , K^p и в общем случае K^u . Напряженно-деформированное состояние определяют e, p – объемные деформации и напряжения в V_a и ε, σ – вектор-функции деформаций и напряжений в V_b , которые составляют пары $\{e, \varepsilon\}, \{p, \sigma\}$. Увеличим нагрузку на величину Δq и определим параметры нового положения равновесия. Сначала по формулам (3.4), заменяя q значением Δq , находим решение основной задачи $p_1' e_1'$. Тогда выражения $\{p_1, \sigma_1\} = \{p, \sigma\} + \{p_1', p_1'\}$ и $\{e_1, \varepsilon_1\} = \{e, \varepsilon\} + \{e_1', e_1'\}$ представляют первое приближение к решению исходной задачи при растягивающем усилии $q + \Delta q$. Затем для значения e_1 определяем характеристики $K_1^p = K^p(e_1), K_1^u = K^u(e_1), \omega_1 = 1 - K_1^u/K$ в области V_a . Заметим, что функции $K^p(e), K^u(e)$ заданы диаграммой деформирования и параметрами разгрузки и полагаются известными.

Далее, используя зависимость (1.10), куда подставляем величины $de = e_1'$ и K^p , вычисляем значение $de_{1\omega}^p$. По формулам (3.8), в которых полагаем $e_\omega^p = de_{1\omega}^p$, получаем решение корректирующей задачи $\{\varepsilon_1^0, \varepsilon_1'\}, \{p_1'', \sigma_1''\}$ и находим второе приближение $\{p_2, \sigma_2\} = \{p_1, \sigma_1\} + \{p_1'', \sigma_1''\}, \{e_2, \varepsilon_2\} = \{e_1, \varepsilon_1\} + \{\varepsilon_1^0, \varepsilon_1'\}$. Для значения e_2 определяем $K_2^p = K^p(e_2), K_2^u = K^u(e_2), \omega_2$. Снова по формуле (1.10), где уже $de = \varepsilon_1^0, K^p = K_1^p$, вычисляем приращение $de_{2\omega}^p$ по формулам (3.8), где $e_\omega^p = de_{2\omega}^p$, получаем корректирующее решение и находим третье приближение. И так далее.

При решении задачи с граничными условиями (3.1) увеличиваем перемещение точек внешней границы на Δw . Для определения параметров нового положения равновесия применяем ту же итерационную процедуру, только вместо формул (3.4), (3.8) используем формулы (3.3), (3.7).

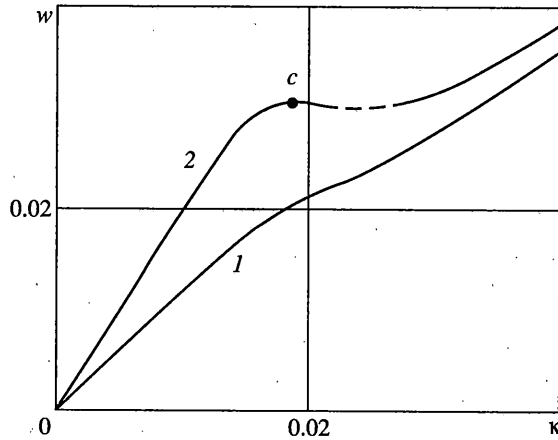
Сходимость итерационных процессов определяется сходимостью итерационных рядов для области V_a . При мягком нагружении имеем ряд

$$e_k = e + e_1' + \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_i^0 = e + e_1' + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \tag{3.9}$$

$$\beta_{n+1} = c_n \beta_n, \quad \beta_1 = A(1 - K^p/K)e_1', \quad c_n = A(1 - K_n^p/K)$$

Ряд (3.9) сходится, если $c_n < 1$, и расходится, если начиная с некоторого момента $c_n \geq 1$. Отсюда находим условие сходимости $K^p > (A - 1)K/A$. Так как $0 < A < 1$, то при $K^p > 0$ ряд (3.9) всегда сходится. При $K^p < 0$ возможна расходимость. Ее начало определяет равенство

$$K^p = \frac{2Kn(b^3 - a^3)}{b^3 m + 2a^3 n} \tag{3.10}$$



Фиг. 2

Отсюда сходимость процесса зависит от сочетания параметров K , v , b , a и наклона падающей ветви диаграммы.

Рассуждая аналогично, получаем условие сходимости процесса при жестком нагружении, а именно, $K^p > (B - 1)K/B$. Так как $0 < B < 1$, то при $K^p > 0$ итерационная процедура сходится. Начало расходимости определяет равенство

$$K^p = -\frac{2b^3 n + a^3 m}{m(b^3 - a^2)} K \quad (3.11)$$

Отметим, что для расходимости итерационного процесса при жестком нагружении всегда требуется больший наклон падающей ветви диаграммы, чем для расходимости при мягком нагружении.

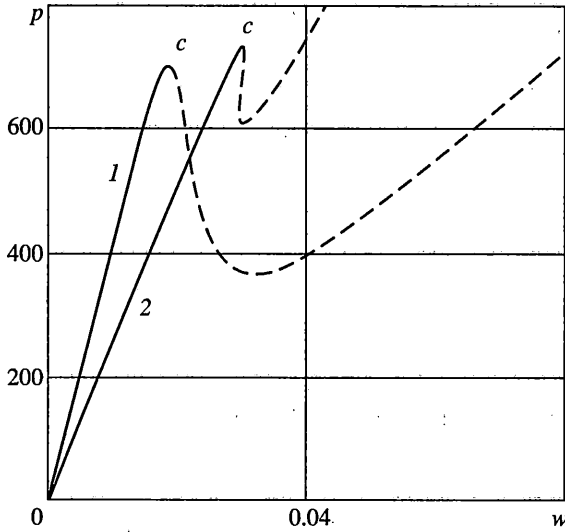
Примечание. Так как область V_a , где развиваются повреждения, не изменяется, и K^p в ходе итерационного процесса после начала его расходимости, вообще говоря, стремится к нулю, то условия сходимости на каком-то шаге необходимо начинают выполняться, и ряды в конце концов сходятся.

4. В качестве примера определим параметры положений равновесия составного шара при постепенном возрастании граничных условий, если свойства материала в области V_a описывает зависимость (см. фиг. 1)

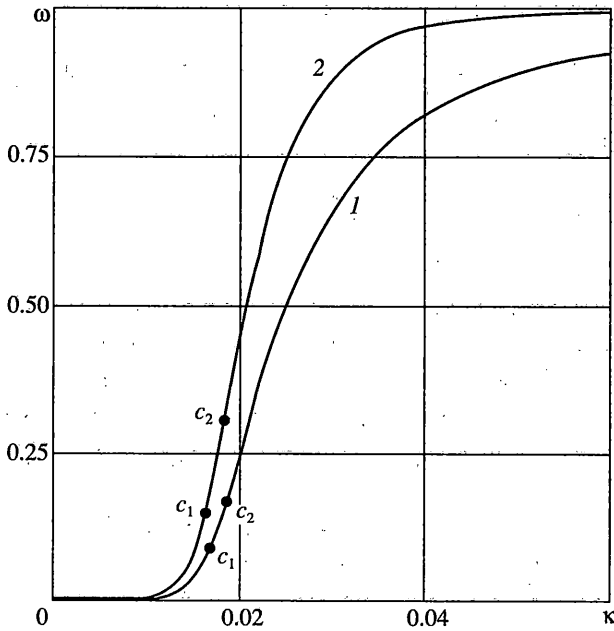
$$p = \begin{cases} Ke, & 0 \leq e \leq e^t \\ \frac{K(366 \cdot 10^{-6} - 26 \cdot 10^{-2} e)}{3 \cdot 10^5 e^2 - 960e + 1}, & e^t < e \leq e^z \end{cases}$$

$$K = 5 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad e^t = 0.001, \quad e^z = 0.006$$

Полагаем $a = 10$ мм, $b = 12; 20$ мм. На фиг. 2, 3 приведены кривые равновесных состояний соответственно при жестком и мягком нагружениях, рассчитанные по приведенной выше методике (сплошные линии). Кривые 1 построены для $b = 12$ мм, кривые 2 – для $b = 20$ мм, точки c соответствуют началу расходимости итерационных процессов, $k[\text{мм}]$ – перемещение точек границы внутреннего шара ($w[\text{мм}]$, $p[\text{МПа}]$).



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 изображены кривые, характеризующие изменение поврежденности в области V_a при жестком нагружении, когда деформирование идет устойчиво, вплоть до разрушения ($b = 12$ мм). Кривая 1 построена для модуля разгрузки K^s кривая 2 – для модуля K^u . Обе кривые асимптотически стремятся к единице. Если $b = 20$ мм, то непрерывный рост поврежденности прерывается (при мягком нагружении в точке c_1 при жестком – в точке c_2), что отвечает началу расходимости итерационных процессов.

5. Найдем решение задачи, учитывая поврежденность в явном виде. Сначала будем использовать закон (1.4) при $e^p = 0$, а именно, $p = K^s e$. Общий вид решения упругой задачи определяют выражения

$$p = K^s e, \quad e = \frac{\kappa}{a}, \quad v = \frac{\kappa r}{a}, \quad r \in V_a$$

$$\sigma_r = \frac{K}{m} \left(Dm - \frac{2L}{r^3} n \right), \quad \sigma_\vartheta = \frac{K}{m} \left(Dm + \frac{L}{r^3} n \right) \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_r = -\frac{2L}{r^3} + D, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{L}{r^3} + D, \quad v = \frac{L}{r^2} + Dr, \quad r \in V_b$$

Из условия непрерывности перемещений и радиальных напряжений, с учетом граничных условий (3.2), находим

$$\kappa = \kappa_1(K^s) = \frac{aq}{K^s C_1 + K C_2}, \quad L = L_1(K^s) = \frac{\kappa a^2 m (K - K^s)}{K(m + 2n)} \quad (5.2)$$

$$D = D_1(K^s) = \frac{\kappa(2Kn + K^s m)}{aK(m + 2n)}, \quad C_1 = \frac{2na^3 + mb^3}{b^3(m + 2n)}, \quad C_2 = 1 - C_1$$

Для жесткого нагружения с учетом граничных условий (3.1) имеем

$$\kappa = \kappa_2(K^s) = \frac{awK}{b(K^s C_3 + K C_4)}, \quad L = L_2 = \frac{a^2 b^2 (b\kappa - aw)}{b^3 - a^3} \quad (5.3)$$

$$D = D_2 = \frac{b^2 w - a^2 \kappa}{b^3 - a^3}, \quad C_3 = \frac{m(b^3 - a^3)}{b^3(m + 2n)}, \quad C_4 = 1 - C_3$$

Пусть при некоторых q и w положение равновесия характеризуется параметрами $\{e, \varepsilon\}$, $\{p, \sigma\}$, K^s , ω . Увеличим нагрузку на $\Delta q (q_1 = q + \Delta q)$. Заменяя в формулах (5.1) с параметрами (5.2) величины q на Δq , находим Δe , $\Delta \varepsilon$, Δp , $\Delta \sigma$ и получаем первое приближение $\{e_1, \varepsilon_1\} = \{e, \varepsilon\} + \{\Delta e, \Delta \varepsilon\}$, $\{p_1, \sigma_1\} = \{p, \sigma\} + \{\Delta p, \Delta \sigma\}$. Затем, используя зависимость $p(e)$, находим $K_1^s = p(e_1)/e_1$ и по формуле (1.5), где $K^u = K^s$, вычисляем значение ω_1 в области V_a .

Второе приближение ищем следующим образом. Считаем тело упругим и обладающим рассчитанной выше поврежденностью. Нагружаем его усилием q_1 и по формулам (5.1) с параметрами (5.2), где $q = q_1$, определяем второе приближение $\{e_2, \varepsilon_2\}$, $\{p_2, \sigma_2\}$.

Опять вычисляем K_2^s , ω_2 и повторяем всю процедуру (и так далее).

Для определения условий сходимости итерационного процесса запишем выражение перемещения границы области V_a после $n + 1$ приближения. Имеем

$$\kappa_{n+1} = \frac{aq_1}{K_n^s C_1 + K C_2} = f(\kappa_n), \quad K_n^s = p(e_n)/e_n, \quad e_n = \kappa_n/a \quad (5.4)$$

Формула (5.4) представляет метод простой итерации. Известно [9], что он сходится, если функция $f(\kappa)$ удовлетворяет условию Липшица $|f(\kappa_n) - f(\kappa_{n-1})| \leq k|\kappa_n - \kappa_{n-1}|$ с кон-

стантой $k = \sup_{\kappa} |df/d\kappa| < 1$. Вычислим производную функции $f(\kappa)$ в силу условия равновесия $q_1 = (K^S C_1 + K C_2)e$ и равенства

$$\frac{dK^S}{d\kappa} = \frac{dK^S de}{de d\kappa} = \frac{1}{ade} \frac{d(p)}{d(e)} = \frac{1}{ae} \left(\frac{dp}{de} - \frac{p}{e} \right) = \frac{1}{ae} (K^P - K^S) \quad (5.5)$$

В результате будем иметь

$$k = \frac{df}{d\kappa} = \frac{K^S C_1 - K^P C_1}{K^S C_1 + K C_2} = 1 - \frac{K^P C_1 + K C_2}{K^S C_1 + K C_2}$$

Отсюда процесс сходится, если $K^P C_1 + K C_2 > 0$, и начинает расходиться, когда $K^P C_1 + K C_2 = 0$. Это условие совпадает с условием (3.10).

Далее будем возмущать исходное положение равновесия, увеличивая перемещение точек внешней границы на Δw . Итерационная процедура решения аналогична изложенной выше, только используются уже формулы (5.1) с параметрами (5.3). В этом случае

$$\kappa_{n+1} = \frac{aw_1 K}{b(K_n^S C_3 + K C_4)} = f_1(\kappa_n), \quad w_1 = w + \Delta w$$

Дифференцируя функцию $f_1(\kappa)$ в силу условия равновесия $w_1 = eb(K^S C_3 + K C_4)/K$ и равенства (5.5), находим

$$k = \frac{df_1}{d\kappa} = \frac{K^S C_3 - K^P C_3}{K^S C_3 + K C_4} = 1 - \frac{K^P C_3 + K C_4}{K^S C_3 + K C_4}$$

Отсюда получаем условие начала расходимости, совпадающее с условием (3.11).

Отметим, что расчеты, проведенные с использованием данных п. 4, по изложенным здесь итерационным схемам, дают те же результаты, что и в п. 4.

6. Рассмотрим наконец общий случай, когда в законе (1.4) величина $e^p \neq 0$. Общий вид решения также определяют формулы (5.1), в которых только используется закон $p = K^u(e - e^p)$. Вычисляя аналогичным образом значения неизвестных параметров и заменяя в формулах (5.2) и (5.3) K^S на K^u получаем для мягкого нагружения

$$\kappa = \kappa_1(K^u) + \frac{\beta_1}{K^u C_1 + K C_2}, \quad L = L_1(K^u) + \frac{K^u e^p m a^3}{K(m+2n)}, \quad D = D_1(K^u) - \frac{K^u e^p m}{K(m+2n)}$$

$$\beta_1 = K^u e^p a(m b^3 + 2n a^3)/b^3(m+2n)$$

и для жесткого нагружения

$$\kappa = \kappa_2(K^u) + \frac{\beta_2 a}{K^u C_3 + K C_4}, \quad L = L_2, \quad D = D_2$$

$$\beta_2 = K^u e^p m(b^3 - a^3)/b^3(m+2n)$$

Расчет параметров нового положения равновесия после возмущения исходного положения равновесия проводим по тем же итерационным схемам, что и в п. 5. В результате для мягкого нагружения имеем

$$\kappa_{n+1} = \frac{aq_1 + \beta_1}{K_n^u C_1 + K C_2} = \psi(\kappa_n)$$

Дифференцируя функцию $\psi(\kappa)$ в силу условия равновесия $q_1 = e(K''C_1 + KC_2) - \beta_1$ и равенства

$$\frac{de^p}{de} = 1 - \frac{K^p}{K''} + \frac{(e - e^p)dK''}{K'' de} \quad (6.1)$$

которое получено из уравнения (1.8) после подстановки равенства (1.5), находим $d\psi/d\kappa = df/d\kappa$.

В случае жесткого нагружения имеем

$$\kappa_{n+1} = \frac{awK + \beta_2 a}{K''C_3 + KC_4} = \psi_1(\kappa_n)$$

Дифференцируя функцию $\psi_1(\kappa)$ в силу условия равновесия $Kw = e(K''C_3 + KC_4) - \beta_2$ и равенства (6.1), находим, что $d\psi_1/d\kappa = df_1/d\kappa$.

Таким образом, условия начала расходимости итерационных процессов не отличаются от изложенных в п. 5. Кроме того, результаты проведенных расчетов так же совпадают с результатами, полученными выше.

7. Для определения физического состояния тела в момент начала расходимости приведенных выше итерационных процедур, исследуем устойчивость процесса деформирования шара. Рассматривая составной шар как дискретную систему, запишем выражение полной энергии системы [10] для случая мягкого нагружения

$$\Pi = 4\pi a^2 \int_0^{\kappa} p(\kappa/a) d\kappa + \Pi_c(w, \kappa) - 4\pi b^2 \int_0^w q dw \quad (7.1)$$

где Π_c – потенциальная энергия упругих деформаций сферы. Она рассчитывается с использованием решения упругой задачи о деформировании толстостенной сферы при граничных условиях, заданных в перемещениях. Данное решение определяется аналогично решению корректирующей задачи в области V_b для случая жесткого нагружения. Производя необходимые вычисления, находим

$$\Pi_c = \frac{2\pi K}{m(b^3 - a^3)} [2ab(b\kappa - aw)^2 n + m(b^2 w - a^2 \kappa)^2]$$

Известно [4, 5], что положения равновесия системы определяют решения уравнений $\partial\Pi/\partial\kappa = 0$, $\partial\Pi/\partial w = 0$ (для жесткого нагружения только первое уравнение, так как в этом случае в выражении (7.1) отсутствует последний член). Кривые равновесных состояний, рассчитанные по этим уравнениям, совпадают с кривыми, изображенными на фиг. 2, 3 как сплошными линиями, так и штриховыми.

Координаты точек, где происходит смена устойчивых положений равновесия на неустойчивые, находим из уравнений, получаемых приравниванием к нулю детерминанта матрицы Гессе [11]. В случае мягкого нагружения имеем $(\partial^2\Pi/\partial\kappa^2)(\partial^2\Pi/\partial w^2) - \partial^2\Pi/\partial\kappa\partial w = 0$, а при жестком нагружении получаем $\partial^2\Pi/\partial\kappa^2 = 0$. Решая данные уравнения, находим, что потеря устойчивости положения равновесия системы происходит в точках с (фиг. 2, 3) и условия потери устойчивости процесса деформирования совпадают с моментом начала расходимости итерационных процедур.

Таким образом, на примере задачи об определении напряженно-деформированного состояния при равномерном растяжении шара с симметрично расположенным шаровым включением из нелинейного разупрочняющегося материала установлено, что

рассмотренные специальные итерационные методы расчета обладают тем свойством, что начало их расходимости соответствует моменту потери устойчивости деформирования данного составного тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
2. Хорошун Л.П., Шкула Е.Н. Деформирование композитных материалов при микроразрушениях // Прикл. механика. 1996. Т. 32. № 6. С. 52–58.
3. Frantziskonis G., Desai C.S. Constitutive model with strain softening // Intern. J. Solids and Struct. 1987. V. 23. № 6. P. 733–750.
4. Баклашов И.В. Деформирование и разрушение породных массивов. М.: Недра, 1988. 271 с.
5. Rice J. The mechanics of earthquake rupture // Proc. Intern. School of Physics "Enrico Fermi". Course 78 "Physics of the Earth's Interior", 1979. Italian Phys. Soc. Amsterdam: North-Holland, 1980. P. 555–649.
6. Bazant Z.P. Softening instability. P.II. Localization in to ellipsoidal regions // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1988. V. 55. № 3. P. 523–529.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
8. Киселев А.Б., Юмашев М.В. Деформирование и разрушение при ударном нагружении. Модель повреждаемой термоупругопластической среды // ПМТФ. 1990. № 5. С. 116–123.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 623 с.
10. Стружанов В.В. О разрушении диска с ослабленной центральной зоной // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 135–141.
11. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
12.07.2001