**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2004**

УДК 539.374

© 2004 г. В.Н. КУКУДЖАНОВ

МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Предлагается новый метод интегрирования уравнений упругопластических сред, основанный на методе расщепления по физическим процессам определяющих уравнений для сред релаксационного типа.

Показано, что в случае классической упругопластической среды, независящей от масштаба времени расщепление приводит к решению алгебраического степенного уравнения для определения коэффициента корректировки упругого решения, который в случае идеальной пластичности совпадает с коэффициентом, полученным в [1]. Для более общих моделей он также получен в аналитическом виде.

Расщепление в случае упруговязкопластических сред приводит к дифференциальному уравнению для определения коэффициентов корректировки, зависящего от времени. Решение его получено в аналитическом виде. Это позволяет исследовать сходимость численности метода и определить его асимптотические свойства.

Предложенный способ обладает и вычислительными преимуществами перед стандартными итерационными методами решения, так как на каждом шаге интегрирования задача сводится к решению упругой задачи и решению одного уравнения на этапе корректор для определения коэффициента корректировки, в то время как традиционными методами в каждой точке тела приходится решать систему n определяющих нелинейных уравнений, где $n \geq 6$.

1. Введение. Математическая формулировка определяющих уравнений теории пластичности отличается от формулировок уравнений для других моделей тем, что в нее наряду с дифференциальными соотношениями входит конечное соотношение – условие пластичности, которое налагает ограничение на инварианты тензора напряжения. Так условие пластичности Мизеса ограничивает второй инвариант тензора напряжений; условие Прагера – Дракера ограничивает линейную комбинацию первого и второго инвариантов этого тензора и т.д. Благодаря этому обстоятельству возможны различные математические формулировки определяющих уравнений модели.

Наиболее распространенная постановка состоит в сведении задачи к системе дифференциальных уравнений путем дифференцирования условия пластичности. Тогда определяющие уравнения сводятся к системе дифференциальных уравнений с дополнительным начальным условием в виде исходного условия пластичности [2, 3]. Такая формулировка обладает тем недостатком, что искусственное дифференцирование приводит, с одной стороны, к повышению порядка системы определяющих уравнений, а с другой существенно усложняет ее интегрирование.

Другая возможность заключается во введении новых переменных, тождественно удовлетворяющих условию пластичности. Этот подход удобен в случае плоской задачи теории пластичности [4], но в случае общей трехмерной задачи он сильно усложняет систему уравнений и оказывается неэффективным. Поэтому такой подход не применяется на практике.

Третий подход заключается в том, что условие пластичности рассматривается как некоторое ограничение на решение гипоупругой задачи и решается задача минимизации упругого функционала при дополнительном ограничении на варьируемые функции [5]. Возможна также близкая к этой формулировка уравнений в виде вариационных неравенств [6, 7].

Наконец, возможно решение задачи в естественной или физической постановке, когда уравнения используются без предварительных преобразований, так как они формулируются для упругопластической модели исходно. Эта исходная формулировка, которую в дальнейшем принимаем, состоит из следующих основных положений теории пластического течения [5, 8]:

1. Аддитивность упругих и пластических скоростей деформаций

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \tag{1.1}$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}$ – упругая, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ – пластическая скорости деформации.

2. Условие пластичности – конечное соотношение между инвариантами тензоров напряжения J_i, деформаций E_i, скоростей деформаций $\dot{E}_i$ и внутренних параметров среды χ_k:

$$F(J_i, E_i, \dot{E}_i, \chi_k) = 0 \quad (i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2 \ldots n) \tag{1.2}$$

3. Ассоциированный закон течения, определяющий направление вектора скорости деформации в пространстве напряжений по нормали к поверхности текучести (1.2):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \Lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}} \tag{1.3}$$

4. Эволюционные уравнения для определения внутренних параметров

$$\dot{\chi}_k = \chi_k(J_i, \chi_k) \tag{1.4}$$

В случае, когда условие пластичности (1.2) не зависит от переменных, изменяющихся во времени, т.е. $\dot{E}^p$ или $\dot{\chi}_i$, то свойства пластической среды не зависят от изменения масштаба времени. Будем называть такие среды упругопластическими или классическими, а среды зависящие от производных по времени – упруговязкопластическими.

Уравнения (1.1) – (1.4) полностью определяют модель среды и используются при решении так, как они приведены здесь, без каких-либо дополнительных преобразований, которые присущи другим формулировкам. В дальнейшем будет показано, что такая формулировка определяющих уравнений обладает определенным преимуществом и позволяет получить решение существенно проще, используя метод расщепления.

Общая схема метода расщепления очень проста и хорошо известна. Аддитивный оператор $A(u)$ на малом отрезке времени Δt может быть заменен мультипликативным оператором. Пусть

$$\begin{gathered} \partial u/\partial t = A(u) = (A_1 + A_2 + \ldots A_n)u \\ u^{n+1}(t+\Delta t) = [E + (A_1 + A_2 + \ldots A_n)\Delta t]u(t) \end{gathered} \tag{1.5}$$

где A_n – матрично-дифференциальные операторы по пространственным переменным, E – единичный оператор, u – вектор.

Решение разностного уравнения (1.5) может быть записано в виде мультипликативного оператора

$$u^{n+1}(t+\Delta t) = (E + A_1\Delta t)(E + A_2\Delta t)\ldots(E + A_n\Delta t)u(t) = (E + A\Delta t)u(t) + O(\Delta t^2) \tag{1.6}$$

Это позволяет при численном интегрировании систем дифференциальных уравнений (1.5) решать последовательно задачи для каждого из операторов $A_1 \ldots A_n$ отдельно, с начальными условиями, полученными при решении предыдущей задачи.

Данный метод решения широко используется в вычислительной математике при сведении многомерных задач к одномерным – расщепление по направлениям [9, 10]. При этом A_i – одномерные операторы дифференцирования по координатам x_i.

Другой вид расщепления заключается в расщеплении сложных операторов, которые описывают многофункциональные физические процессы, на более простые, описываемые каждым из операторов A_i в отдельности (расщепление по физическим процессам). Такие разностные методы получили широкое распространение в задачах механики жидкости и газа [10, 11]. Но в механике деформируемого твердого тела число работ, в которых применяется метод расщепления сравнительно невелико, а работ, в которых применялось бы расщепление по физическим процессам единицы [12, 13]. Кроме того, даже тогда, когда расщепление посуществу применяется, это настолько завуалированно, что его доказывают исходя из других соображений, а не из идеи замены оператора (1.5) на оператор (1.6). Например, широко известное правило корректировки упругого решения, предложенное в [1], было получено из других более сложных соображений[1].

В публикуемой работе предлагается изменить отношение специалистов в области механики твердого деформируемого тела к этому эффективному методу.

2. Расщепление упругопластических уравнений. Система уравнений для гипоупругопластической среды при конечной деформации состоит из законов сохранения массы, импульса и энергии, которые в переменных Эйлера могут быть записаны в следующем дивергентном виде

$$\begin{gathered}
\partial\rho/\partial t + \partial(\rho v_k)/\partial x_k = 0 \\
\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \\
\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k E)}{\partial x_k} = \frac{\partial(v_i \sigma_{ki})}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_k}\right)
\end{gathered} \tag{2.1}$$

К этим уравнениям следует добавить определяющие уравнения гипоупругопластической среды, основанные на гипотезах, перечисленных в п. 1. В переменных Эйлера они выглядят так:

1. Условие аддитивности деформаций совместно с законом Гука дает уравнения для определения напряжения

$$D\sigma_{ij}/Dt = d\sigma_{ij}/dt + \Omega_{ik}\sigma_{kj} + \Omega_{ki}\sigma_{jk} = D_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}^p_{kl}) + \Omega_{ik}\sigma_{kj} + \Omega_{ki}\sigma_{jk} \tag{2.2}$$

где $D\sigma_{ij}/Dt$ – производная Яуманна, исключающая изменение во времени тензора σ_{ij} за счет поворота частицы как жесткого целого, D_{ijkl} – тензор упругих модулей материала, $\Omega_{ij} = 1/2(u_{i,j} - u_{j,i})$ – тензор скоростей поворота.

2. Условие пластичности, в общем случае изотропного тела, зависящее от инвариантов тензора напряжения J_i, тензора скоростей пластических деформаций $\dot{E}^p_i$ и внутренних параметров χ_i:

$$F(J_i, \dot{E}^p, \chi_k) \le 0 \tag{2.3}$$

[1] См. примечание С.С. Григоряна к статье Уилкинса [1], а также [8, 14].

3. Ассоциированный закон пластического течения, согласно которому функция F в условии пластичности (2.3) является пластическим потенциалом

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\lambda}\partial F/\partial\sigma_{ij} \tag{2.4}$$

4. Эволюционные уравнения для определения внутренних переменных, описывающие внутреннюю структуру материала, упрочнение, повреждаемость, пористость и т.д.

$$\dot{\chi}_k = f_k(J_i, \chi_k) \tag{2.5}$$

здесь точкой обозначена материальная производная по времени.

Система уравнений (2.1) – (2.5) представлена в виде разрешенном относительно производных по временной переменной, как этого требует вид уравнения, к которому применяется расщепление. В качестве операторов A_i можно принимать каждый член, либо группу членов в правых частях уравнений (2.1) – (2.5). Например, силы в правых частях законов сохранения можно расщепить на три группы операторов в соответствии с их физическим смыслом: члены, описывающие инерционные силы; члены с давлением, в общем случае, описывающие консервативные силы; диссипативные силы, связанные с вязкопластичностью, теплопроводностью и т.д.

Основной целью публикуемой работы будет интегрирование методом расщепления определяющих уравнений (2.2) – (2.5) упругопластической среды, так как именно этим система уравнений отличается от других моделей сплошной среды, а расщепление законов сохранения можно осуществить по схемам, которые используются, например, в механике жидкости и газа [9] с малосущественными изменениями. Более того, задача интегрирования определяющих уравнений для нахождения напряжений и внутренних параметров среды при заданных деформациях представляет самостоятельную задачу независимо от того, в какой форме слабой или в дифференциальной формулируются законы сохранения.

Можно ограничиться случаем изотермических процессов при малых деформациях, отбросив конвективные члены и члены, описывающие изменения, связанные с поворотом в производных по времени, которые можно считать еще одним оператором расщепления A_i, и сосредоточить внимание на уравнениях (2.2) – (2.5) при $\Omega_{ij} = 0$.

Общая схема расщепления выглядит следующим образом. Расщеплению подвергается только уравнение (2.2), в котором скорость полных деформаций выражается через скорости частиц v_i:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = 1/2(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{2.6}$$

Предиктор берется при $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = 0$, тогда материал среды упругий и совместно с уравнениями движения на шаге Δt необходимо решить упругую задачу

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \sigma_{ji,j}, \quad \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} = 1/2D_{ijkl}(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{2.7}$$

при начальных условиях, полученных на предыдущем шаге для полной упругопластической задачи. Здесь D_{ijkl} – тензор упругих модулей материала.

Корректор берется при $\dot{\varepsilon}_{ij} = 0$ в уравнении (2.2), тогда из (2.2) и (2.3) следует уравнение релаксации напряжений

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = -\frac{d\Lambda}{dt}D_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial\sigma_{kl}} \tag{2.8}$$

Релаксация происходит до момента выполнения стационарного условия пластичности $F(I_i, \dot{I}_i, \chi_i)|_{\dot{I}_i=0} = 0$, если среда упруговязкопластическая или до наступления условия упругой разгрузки, если среда классического упругопластического типа.

В случае классической или равновесной упругопластической среды, свойства которой не зависят от изменения масштаба времени, в уравнении (2.8) и (2.5) можно исключить время t и перейти к переменной Λ:

$$d\sigma_{ij}/d\Lambda = -D_{ijkl}\partial F/\partial\sigma_{kl} \tag{2.9}$$

Решая уравнения (2.9) и (2.5) при начальном условии $\Lambda = \Lambda_0$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e$, $\chi_i = \chi_i^e$ полученном после решения упругой задачи, на этапе корректора, найдем решение как функции параметра Λ и σ_{ij}^e, χ_i^e:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\Lambda, \sigma_{ij}^e, \chi_i^e), \quad \chi_{ij} = \chi_{ij}(\Lambda, \sigma_{ij}^e, \chi_i^e) \tag{2.10}$$

Подставляя найденные решения в условие пластичности (2.3), получаем уравнение для определения параметра Λ:

$$F(I_i(\Lambda), \chi_i(\Lambda), J_i^e, \chi_i^e) = 0 \tag{2.11}$$

Решая его, находим Λ, которое подставляем в (2.10), и получаем окончательное решение задачи.

Если условие пластичности дифференциального типа, т.е. среда упроугвязкопластическая, то условие (2.3) для определения Λ приводится к дифференциальному уравнению вида

$$F_1(\sigma_{ij}^e, \chi_i^e, \Lambda, \dot{\Lambda}) = 0 \tag{2.12}$$

Разрешая его относительно $\dot{\Lambda}$, получим уравнение

$$\tau d\Lambda/dt = \varphi[F(J_i(\Lambda), \chi_i(\Lambda))] = \varphi(F) \tag{2.13}$$

где τ – время релаксации, $\varphi(0) = 0$.

В правой части (2.13) стоит функция $F = F(J_i(\Lambda), \chi_i(\Lambda))$ из уравнения (2.11), которая отвечает равновесному условию пластичности при $\tau = 0$. Функция $\varphi(F)$ определяется видом зависимости от $\dot{\Lambda}$ в уравнении (2.12) или другими словами типом вязкости упруговязкопластического материала. Уравнение (2.13) интегрируется в аналитическом виде, что позволяет проанализировать свойства полученной разностной схемы в зависимости от вида функций φ, F и параметра τ.

Очевидно, что предлагаемая схема расщепления устойчива, если устойчива разностная схема предиктора для решения упругой задачи и существуют решения уравнений (2.11) и (2.13).

3. Теория пластичности Мизеса. Изотропное упрочнение. Применим эту общую схему метода расщепления к конкретным типам уравнений пластического течения. Рассмотрим прежде всего упругопластические среды классического типа. Начнем с теории течения Мизеса с деформационным упрочнением.

Условие пластичности (2.3) в этом случае зависит только от второго инварианта девиатора напряжения

$$J_2 = (1/2 s_{ij}s_{ij})^{1/2} = k_0 + 2\mu_1\chi^\beta \tag{3.1}$$

Ассоциированный закон примет вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\dot{\Lambda} s_{ij}}{2J_2} = \dot{\Lambda} s_{ij}, \quad \dot{\Lambda} = \frac{\dot{\lambda}}{2J_2} \tag{3.2}$$

Для параметра упрочнения χ эволюционное уравнение примем в виде

$$d\chi/dt = a\dot{\Lambda}(J_2)^{\alpha}, \quad d\chi/d\Lambda = a(J_2)^{\alpha} \tag{3.3}$$

Если в качестве параметра упрочнения принимается работа пластической деформации, то

$$\dot{\chi} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\Lambda} s_{ij} s_{ij} = 2\dot{\Lambda}(J_2)^2 \quad (\alpha = 2)$$

если интенсивность скоростей пластических деформаций, то

$$\dot{\chi} = (1/2\dot{\varepsilon}_{ij}^p\dot{\varepsilon}_{ij}^p)^{1/2} = \dot{\Lambda}(1/2 s_{ij} s_{ij})^{1/2} = \dot{\Lambda} J_2 \quad (\alpha = 1)$$

Уравнение релаксации напряжений (2.8) примет вид

$$ds_{ij} = -2\mu\dot{\Lambda} s_{ij}$$

Откуда, интегрируя при начальном условии, полученном после предиктора $\Lambda = \Lambda_0$, $s_{ij} = \overset{e}{s}_{ij}$, находим $s_{ij}^{n+1} = \overset{e}{s}_{ij} e^{-2\mu(\Lambda - \Lambda_0)}$, $J_2 = J_2^e e^{-2\mu(\Lambda - \Lambda_0)}$. Интегрируя уравнение (3.3) для параметра упрочнения χ, получим

$$\chi = \chi^e + \frac{(J_2^e)^{\alpha}}{2\alpha\mu}(1 - x^{\alpha}), \quad x = e^{-2\mu(\Lambda - \Lambda_0)}$$

Подставляя χ в условие пластичности (3.1), получаем степенное нелинейное уравнение

$$J_2^e x - k_0 + 2\mu_1\left[\chi^e + \frac{(J_2^e)^{\alpha}}{2\alpha\mu}(1 - x^{\alpha})\right]^{\beta} = 0 \tag{3.4}$$

которое можно решить любым итерационным методом. Начальное приближение берется с предыдущего шага.

При $\alpha = 1$ и линейном упрочнении материала с модулем сдвига μ_1 решение записывается в явном виде

$$x = \left[k_0 + \frac{\mu_1}{\mu}(J_2^e + 2\mu_1\chi^e)\right]\left(1 + \frac{\mu_1}{\mu}\right)^{-1}(J_2^e)^{-1} \tag{3.5}$$

В случае идеальной пластичности $\mu_1 = 0$ получим

$$x = k_0/J_2^e, \quad s_{ij}^{n+1} = \overset{e}{s}_{ij} k_0/J_2^e$$

т.е. решение упругопластической задачи получается из решения упругой задачи простым умножением на коэффициент корректировки x, что означает нормировку вектора напряжения $\overset{e}{s}_{ij}/J_2^e$ и приведение его на поверхность текучести (3.1) в пространстве напряжений. Это и есть известное правило корректировки Уилкинса [1], которое верно только для случая идеальнопластической среды.

В случае упрочнения из формулы (3.5) видно, что если его формально распространить на случай упрочняющейся среды, полагая $x = (k_0 + 2\mu_1\chi^e)/J_2^e$, то получим неверный результат.

4. Трансляционное или кинематическое упрочнение. Условие пластичности в этом случае записывается через девиатор активных напряжений

$$s_{ij}^a = s_{ij} - 2\mu_1\varepsilon_{ij}^p, \quad J_2^a = (1/2 s_{ij}^a s_{ij}^a)^{1/2}$$

$$F(J_2^a) = J_2^a - k_0 = 0$$

Ассоциированный закон примет вид

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial s_{ij}} = \dot{\lambda}\frac{s_{ij}^a}{2J_2^a}$$

Релаксационное уравнение примет вид

$$\frac{ds_{ij}}{d\lambda} = -2\mu_1\frac{s_{ij}^a}{2J_2^a}, \quad s_{ij} = s_{ij}^a + 2\mu_1\varepsilon_{ij}^p$$

Переходя к переменным s_{ij}^a и $d\Lambda = d\lambda/(2J_2^a)$, получим

$$\frac{ds_{ij}^a}{d\Lambda} = \left(1 - \frac{\mu}{\mu_1}\right)s_{ij}^a, \quad s_{ij}^a = (s_{ij}^a)^e e^{-\left(1-\frac{\mu}{\mu_1}\right)(\Lambda - \Lambda_0)} = (s_{ij}^a)^e x, \quad J_2^a = (J_2^a)^e x$$

Из условия пластичности получаем, что $x = k_0/(J_2^a)^e$, т.е. выполняется правило корректировки для тензора активных напряжений. Можно видеть, что в случае одновременно обоих видов упрочнения (кинематического и изотропного) уравнения для определения x будет совпадать с уравнением (3.4), в котором J_2 заменено на девиатор активных напряжений J_2^a.

5. Теория пластичности Прагера – Дракера. Другой широко используемой теорией пластичности является теория Прагера – Дракера, для которой условие пластичности зависит от двух инвариантов

$$F(J_1, J_2, k) = J_2 + aJ_1 - k = 0 \tag{5.1}$$

тогда ассоциированный закон примет вид уравнения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda}\left(\frac{s_{ij}}{2J_2} + a\delta_{ij}\right) \tag{5.2}$$

Запишем его отдельно для шаровой и девиаторной частей тензоров

$$\dot{\varepsilon}_{ii}^p = 3\dot{\lambda}a, \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p - (1/3)\dot{\varepsilon}_{kk}^p\delta_{ij} = (1/2)\dot{\lambda}s_{ij}/J_2 \tag{5.3}$$

Откуда, используя закон Гука, находим

$$\dot{\sigma}_{ii} = -3K(3\dot{\lambda}a + \dot{\varepsilon}_{ii}), \quad \frac{ds_{ij}}{dt} = 2\mu(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p) = 2\mu\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\lambda}\frac{s_{ij}}{2J_2}\right)$$

После расщепления получим релаксационные уравнения для этапа коррекции

$$d\sigma_{ii}/d\lambda = -9Ka, \quad ds_{ij}/d\lambda = -\mu s_{ij}/J_2$$

Переходя к новой переменной $d\Lambda = \mu d\lambda/J_2$ после интегрирования, находим

$$s_{ij} = s_{ij}^e e^{-(\Lambda-\Lambda_0)}, \quad d\Lambda = \frac{\mu d\lambda}{J_2^e e^{-(\Lambda-\Lambda_0)}}, \quad \frac{J_2^e}{\mu}(1-e^{-(\Lambda-\Lambda_0)}) = \lambda-\lambda_0$$

$$\sigma_{ii}-\sigma_{ii}^e = -9Ka(\lambda-\lambda_0) = -\frac{9Ka}{\mu}J_2^e(1-e^{-(\Lambda-\Lambda_0)}), \quad J_1 = J_1^e-\frac{9Ka}{\mu}J_2^e(1-x)$$

Подставляя эти соотношения в условие пластичности, находим

$$J_2^e x + a\left(J_1^e - \frac{9Ka}{\mu}J_2^e(1-x)\right) - k_0 = 0 \tag{5.4}$$

$$x = \frac{k_0 - J_1^e a(1-9KaJ_2^e/\mu J_1^e)}{J_2^e(1+9Ka^2/\mu)} \quad (a<1) \tag{5.5}$$

Коэффициент корректировки получается с поправкой, вызванной влиянием первого инварианта. Из (5.5) видно, что правило корректировки Уилкинса здесь неприменимо. Оно выполняется только в случае, когда объемный модуль $K = 0$.

Из приведенных результатов можно сделать определенные выводы в случае общих уравнений. Если условие пластичности однородно относительно компонентов тензора напряжений (включая случай зависимости от всех трех инвариантов), и не зависит от инвариантов других тензоров и внутренних переменных нелинейным образом, то уравнение для коэффициента корректировки будет линейным. В противном случае это уравнение нелинейное.

6. Упруговязкопластические среды. Среда называется упруговязкопластической, когда условие пластичности (2.12) зависит от инвариантов девиатора скоростей пластической деформации, в частности от второго инварианта $\dot{E}^p = (1/2\dot{\varepsilon}_{ij}^p\dot{\varepsilon}_{ij}^p)^{1/2}$. Поскольку такое условие неоднородно относительно временной переменной, то оно содержит временную константу материала τ – время релаксации. При $\tau \to 0$ неравновесное уравнение пластичности переходит в соответствующее равновесное, независящее от временного масштаба. Рассмотрим случай, когда уравнение (2.12) зависит только от второго инварианта $\dot{E}_2^p$. В результате получим

$$\tau\dot{E}_2^p = \varphi[F(J_i, \chi_i) - k_0], \quad \varphi(0) = 0 \tag{6.1}$$

уравнение (6.1) при $\tau \to 0$ дает равновесное условие (2.11).

Когда условие (2.11) типа Мизеса, то из ассоциированного закона имеем соотношение $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\Lambda} s_{ij}$, откуда находим

$$\dot{E}_2^p = (1/2\dot{\epsilon}_{ij}^p\dot{\epsilon}_{ij}^p)^{1/2} = \dot{\Lambda}(1/2\dot{s}_{ij}s_{ij})^{1/2} = \dot{\Lambda}J_2 \tag{6.2}$$

Преобразования в левой части уравнения (6.1) были выполнены в п. 3, поэтому дифференциальное уравнение относительно параметра корректировки x будет

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2\mu}{\tau J_2^e}\varphi(F(x)) \tag{6.3}$$

$$\frac{t-t_n}{\tau} = -\frac{J_2^e}{2\mu}\int\limits_1^x \frac{dx}{\varphi[F(x)]}, \quad t_n \le t \le t_{n+1} \tag{6.4}$$

Рассмотрим случай степенной зависимости от $\dot{E}_2^p$ для условия пластичности типа Мизеса

$$\tau(\dot{E}_2^p)^n = F(J_2, \chi_i) - k_0 \tag{6.5}$$

Тогда из ассоциированного закона найдем, что $\dot{E}_2^p = \dot{\Lambda} J_2$; в результате получаем следующее дифференциальное уравнение для определения параметра корректировки x:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2\mu}{\tau J_2^e}\left(J_2^e x - k_0 + 2\mu_1\left[\chi^e + \frac{J_2^e}{2\alpha\mu}(1-x^\alpha)\right]^\beta\right)^{1/n} \tag{6.6}$$

из которого следует

$$\frac{t-t_n}{\tau} = -\frac{J_2^e}{2\mu}\int\limits_1^x \frac{dx}{[F(x)]^{1/n}}, \quad (t_n \le t \le t_{n+1}) \tag{6.7}$$

Подынтегральная функция имеет особенность $x = x_*^p$, отвечающую равновесному значению коэффициента корректировки, при $F(x_*^p) = 0$. Так как x_* простой корень, то сходимость интеграла будет зависеть от показателя степени n. При $n > 1$ интеграл сходится, а при $n \le 1$ расходится. Соответственно интервал изменения $\Delta t/\tau$ при $n > 1$ ограничен значением правой части (6.7), а при $n \le 1$ он неограничен

$$0 < \Delta t/\tau \le A \quad (n > 1) \quad x \to x_*^p \quad \text{при} \quad \Delta t/\tau \to A$$

$$0 < \Delta t/\tau < \infty \quad (n \le 1) \quad x \to x_*^p \quad \text{при} \quad \Delta t/\tau \to \infty$$

Решение записывается особенно просто в явном виде, если $F(X)$ – линейная функция и $n = 1$. Например, для идеальной упруговязкопластической среды получим

$$\frac{\Delta t}{\tau} = -\frac{1}{2\mu}\int\limits_1^x \frac{dx}{(x - k_0/J_2^e)}$$

$$x - \frac{k_0}{J_2^e} = \left(1 - \frac{k_0}{J_2^e}\right)e^{-(\Delta t/\tau)(2\mu/J_2^e)}$$

$$x \to x_*^p = k_0/J_2^e \quad \text{при} \quad \tau \to 0$$

Отсюда следует, что при $(\Delta t/\tau)(2\mu/J_2^e) \gg 1$ решение будет стремиться к равновесному и следовательно разностная схема на этапе корректора абсолютно устойчива.

Таким образом решение упруговязкопластической задачи методом расщепления на этапе корректора сводится к решению одного дифференциального уравнения, которое интегрируется в аналитическом виде. Коэффициент корректировки при этом зависит от величины шага интегрирования Δt.

Если решение упруговязкопластической задачи при $t \gg \tau$ стремится к упругопластическому решению, то и схема расщепления гарантирует такое стремление без ограничения на величину τ.

В заключение подведем итоги. Показано, что при решении упругопластических уравнений, если не надо дифференцировать условие пластичности и исключать из системы уравнений $\dot{\Lambda}$, как это делается в общепринятой постановке [2, 15, 16], а следует проинтегрировать дифференциальные уравнения ассоциированного закона и эволюционные уравнения для внутренних переменных при неопределенном $\dot{\Lambda}$, не переходя к разностным уравнениям, и определить Λ из условия пластичности. Тогда корректировка упругого решения на шаге Δt сводится к умножению на один единственный множитель, который для большинства условий пластичности (Мизиса, Прагера – Дракера, трансляционного упрочнения) определяется простой аналитической формулой. В то же время при стандартном подходе это требует решения в каждой точке тела системы n нелинейных уравнений, где $n \geq 6$.

При решении упруговязкопластической задачи и условии пластичности, зависящем от второго инварианта скорости деформации, задача корректировки сводится к решению дифференциального уравнения, которое тоже интегрируется в аналитическом виде, и определяет коэффициент корректировки как функцию $x = x(\Delta t\delta)$, где δ – обратный параметр времени релаксации. Полученное аналитическое решение задачи позволяет детально проанализировать разностную схему расщепления и доказать, что она обладает свойством абсолютной устойчивости и асимптотической сходимости к решению предельного упругопластического уравнения при фиксированном Δt и $\delta \to \infty$.

Разностные схемы, которые не обладают этим свойством, как показано в [17], приводит к эффекту псевдолокализации в погранслоях, в случаях, когда упрочнение материала мало, а $\delta \gg 1$. Это свойство является определяющим для разностной схемы, когда упруговязкопластическая модель используется для исследования процессов локализации пластической деформации как регуляризация упругопластической модели разупрочняющегося материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-00701) и Научной Программы ОЭММПУ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уилкинс М.Л.* Расчет упругопластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. 212–264 с.
2. *Hinton E. and Owen D.R.J.* Finite elements in plastisity. Sweansea: Pineridge Press, UK. 1981. 720 p.
3. *Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др.* Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 600 с.
4. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк. 1969. 608 с.
5. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет программ "Астра". М.: ИПМ АН СССР. Препринт № 326. 63 с.
6. *Садовский В.М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997. 208 с.
7. *Дюво Г., Лионс Н.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
8. *Кукуджанов В.Н.* Разностные методы решения задач механики деформируемых тел. Учебн. пособие. М.: МФТИ, 1992. 123 с.
9. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.
10. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Изд-во Наука СО АН СССР, 1981.

11. *Белоцерковский О.М., Давидов Ю.М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 391 с.
12. *Кукуджанов В.Н., Кудряшев Ю.И.* Решение смешанных задач нестационарного взаимодействия газообразных сред с деформируемыми телами. М.: ИПМ АН СССР. Препринт № 472. 1990. 28 с.
13. *Кибардин В.Ю., Кукуджанов В.Н.* Моделирование континуального разрушения в упруговязкопластических материалах // Изв. РАН МТТ. 2001. № 1. С. 109–123.
14. *Кукуджанов В.Н.* Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // Успехи механики. 1985. Т. 8. Вып. 4. С. 21–65.
15. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
16. *Бребия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
17. *Кукуджанов В.Н.* Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 96–111.

Москва

Поступила в редакцию
16.10.2003