МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2004

УДК 593.3

© 2004 г. Р.Л. САЛГАНИК

СМЕШАННЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ УПРУГИХ СТРУКТУР, ОБРАЗОВАННЫХ РАБОТАЮЩИМИ НА ИЗГИБ СЛОЯМИ (КОНТИНУАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Рассматриваются статические граничные задачи упругого деформирования многослойных структур, образованных работающими на изгиб плоскими слоями (пластинами) и описываемых в континуальном приближении. Это – двумерные задачи для полуплоскости и трехмерные задачи для полупространства с границами, параллельными слоям. Предполагается, что на границе заданы: распределение нормального к ней смещения (прогиба) на одной ее части и распределение нормального к ней напряжения – на остальной ее части. Как на самой границе, так и между слоями пренебрегается действием касательных напряжений. Предполагается, что действует нормальное к слоям равномерно распределенное (и потому не влияющее на прогиб) давление, предотвращающее возникновение отслоений. Нагружение вдоль слоев предполагается отсутствующим или настолько слабым, что его влиянием на их прогибы можно пренебречь. Рассматриваются основные общие граничные соотношения. С их помощью решаются частные задачи, сначала для двумерного, а затем для трехмерного (осесимметричного) случаев.

1. Введение. Рассматриваются смешанные граничные задачи упругого деформирования многослойных структур, образованных работающими на изгиб слоями для полуплоскости (двумерный случай) и полупространства (трехмерный случай), границы которых параллельны слоям. Предполагается, что на одной части этих границ задано распределение нормальных к ним смещений (прогибов), а на оставшейся части задано распределение нормальных напряжений. Характерные масштабы указанных распределений предполагаются достаточно большими для того, чтобы было оправдано континуальное описание деформирования указанных многослойных структур, т.е. описание любой такой структуры как некоторой эквивалентной сплошной среды.

Такое описание явлений изгиба в многослойной структуре допустимо при условии, что сопротивление межслойных границ сдвигу вдоль них относительно мало. Это условие может выполняться с самого начала, либо начать и продолжать выполняться в результате действия достаточно сильных сдвиговых нагрузок. При его выполнении уравнения деформирования указанной эквивалентной сплошной среды можно вывести, рассматривая деформирование каждого слоя, испытывающего нагружение со стороны соседних с ним слоев, а также, возможно, под действием внешних (объемных) сил, как подчиняющееся классической теории изгиба. Описание указанной многослойной структуры при помощи эквивалентной ей сплошной среды применимо лишь там, где существенное изменение прогиба слоев происходит в областях, которые содержат достаточно много слоев.

Используемое ниже приближение сплошной среды, или континуальное приближение, базируется на модели изгибного деформирования, разработанной в [1] для структуры, образованной большим числом балок, описываемых в рамках классической теории слабого изгиба, и в [2] для структуры, образованной большим числом слоев, описываемых в рамках классической теории слабого изгиба тонких пластин. Более подробный обзор работ по этому направлению приведен в [3]. Указанная модель применима, если возможно межслойное скольжение.

Эта модель применима также и для многослойных структур, в которых между слоями имеются полностью сцепленные с ними относительно более податливые упругие прослойки. При умеренных значениях податливости последних переход к континуальному описанию приводит к классической модели упругого тела с параметрами, выражаемыми через эффективные характеристики упругости структуры с прослойками. Если же податливость прослоек велика настолько, что оказывается допустимым пренебречь их сопротивлением изгибу, приходим для этой структуры (при соответствующем ее нагружении) к модели изгибного деформирования, рассмотренной в [2].

2. Основные уравнения. Рассмотрим указанную многослойную структуру как эквивалентную ей сплошную среду и отнесем ее к декартовой системе координат x, y, z с осью z, направленной перпендикулярно слоям. Предположим, что нагрузки, направленные вдоль слоев, и касательные напряжения на межслойных границах отсутствуют или пренебрежимо малы. При таких условиях поле прогиба $w(x, y, z)$ слоев, усредненного по представительному элементу объема (т.е. по элементу, содержащему достаточно много слоев) удовлетворяет следующему уравнению [2]:

$$\beta^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 w-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad \beta = \frac{D}{hE_a}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.1}$$

Здесь все слои предполагаются упругими, изотропными и однородными с модулем Юнга E, коэффициентом Пуассона ν и толщиной h, которые для простоты считаются одинаковыми для всех слоев; D – изгибная жесткость слоя, E_a – эффективный модуль упругости многослойной структуры вдоль нормали к слоям. Условия применимости континуального приближения, в рамках которого выведено уравнение (2.1), таковы:

(*1*) толщина слоя достаточно мала по сравнению с характерной длиной заметного изменения поля прогиба,

(*2*) прогибы достаточно малы по сравнению с толщиной слоя, что оправдывает выполненный вывод уравнения (2.1) на основе классической теории слабого изгиба тонких пластин.

Условия (1) и (2), очевидно, выполняются на достаточном удалении от тех мест, где рассматриваемая многослойная структура может быть интенсивно нагружена, а также всюду, если распределения факторов, вызывающих деформирование этой структуры, достаточно пологие и плавные. Чем меньше отношение E_a/E, тем легче удовлетворить условию (*1*), так как тем больше становится отношение характерной длины, на которой происходит изменение поля прогиба, к толщине слоя и потому тем проще обеспечить применимость континуального приближения. Можно ожидать, что пониженные значения E_a/E реализуются в случаях (возможных, например, в геомеханических приложениях), когда контактирующие поверхности слоев в достаточной мере шероховаты. Действительно, в таких случаях реальная площадь контактов между слоями может составлять сравнительно небольшую долю от кажущейся (номинальной) площади контакта слоев. Достаточно малые значения E_a/E могут быть также характерными для упомянутых во Введении многослойных структур, в которых между слоями имеются прослойки, гораздо более податливые, чем сами слои (как это, например, может иметь место в слоистых кристаллах).

Последний член в (2.1) учитывает взаимодействие слоев: величина $E_a\partial w/\partial z$ представляет собой нормальное к слоям напряжение, порожденное их прогибами. Полное нормальное к слоям напряжение можно записать в виде

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(0)}+E_a\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_{zz}^{(0)} = -p_0 \tag{2.2}$$

где первый член – равномерно распределенное напряжение, не влияющее на прогиб, $p_0 > 0$ – нормальное давление, предполагаемое в дальнейшем достаточно большим для того, чтобы предотвратить возникновение отслоений, т.е. участков отсутствия контакта между слоями.

Нормальные и касательные напряжения в сечениях слоев плоскостями, параллельными координатным плоскостям xz и yz, могут быть выражены через прогиб при помощи хорошо известных формул теории тонких пластин [4].

3. Полуплоскость. *3.1. Основное граничное соотношение для двумерного случая.* Это соотношение выведено в [2] (формула (3.11)). Получим его здесь несколько иным, чем в [2], способом.

Рассмотрим полуплоскость $z > 0$ для условий плоской деформации, так что прогиб w предполагается зависящим лишь от x и z. Тогда (2.1) принимает вид

$$\beta^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \tag{3.1}$$

Рассмотрим сначала всю плоскость xz. Решение (3.1), удовлетворяющее условию

$$w(x, \pm 0) = \delta(x) \tag{3.2}$$

где $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака, имеет вид

$$w_{2f} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\beta|z|}}e^{-x^2/4\beta|z|} \tag{3.3}$$

где индекс "$2f$" означает "двумерное фундаментальное решение". То, что (3.3) удовлетворяет (3.1) и (3.2), легко проверяется непосредственно. Так же можно убедиться в том, что

$$\partial w_{2f}/\partial|z| = \beta\partial^2 w_{2f}/\partial x^2 \tag{3.4}$$

Продолжим теперь рассмотрение полуплоскости $z > 0$. Пусть на границе этой полуплоскости $z = 0$ задано некоторое распределение прогиба

$$w(x, 0) = w_0(x) \tag{3.5}$$

где функция $w_0(x)$ предполагается достаточно быстро исчезающей при $x \to \pm\infty$. Тогда, с учетом (3.1)–(3.3) и линейности задачи, находим, что распределение прогиба в полуплоскости $z > 0$, обращающееся в (3.5) при $z \to 0$, имеет вид

$$w(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{2f}(x-\xi, z)w_0(\xi)d\xi, \quad z > 0 \tag{3.6}$$

Этим оправдан термин "двумерное фундаментальное решение", использованный выше для w_{2f}.

Из (2.2) и (3.6), с учетом (3.4), находим распределение нормального к слоям напряжения в полуплоскости

$$\sigma_{zz}(x, z) = \sigma_{zz}^{(0)} + E_a\beta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 w_{2f}(x-\xi, z)}{\partial\xi^2}w_0(\xi)d\xi \tag{3.7}$$

Выполнение в (3.7) двукратного интегрирования по частям дает

$$\sigma_{zz}(x, z) = \sigma_{zz}^{(0)} + E_a\beta\int_{-\infty}^{+\infty} w_{2f}(x-\xi, z)w_0''(\xi)d\xi \tag{3.8}$$

где штрих означает производную. Далее, принимая во внимание, что (3.3) обращается в (3.2) при $z \to 0$, из (3.8) находим

$$\sigma_{zz}(x,0) = \sigma_{zz}^{0} + E_a\beta w_0''(x) \tag{3.9}$$

Это и есть основное граничное соотношение, упомянутое выше (при сопоставлении (3.9) с (3.11) в [2] надо учесть, что в обозначениях [2] $q = -\sigma_{zz}$, $q_0 = -\sigma_{zz}^{(0)}$).

3.2. Частная граничная двумерная задача. Обозначим $\sigma_{zz}^{d} = \sigma_{zz}(x,z) - \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}(x,z) + p_0$. Рассмотрим следующую смешанную граничную задачу:

$$\sigma_{zz}^{d}(x,0) = s(x), \quad |x| \le a; \quad w(x,0) = 0, \quad |x| > a \tag{3.10}$$

где $s(x)$ – некоторая заданная функция. Из первого равенства в (3.10) и из (3.9) можно получить выражение для второй производной от прогиба по x. Следовательно, сам прогиб можно найти путем двукратного интегрирования правой части этого выражения и удовлетворения двум условиям исчезновения прогиба при $x = \pm a$. В результате, учитывая также второе равенство в (3.10), находим распределение прогиба по всей границе $z = 0$. Выражения для распределений прогиба и напряжения по нормали к слоям в полуплоскости $z > 0$ можно теперь найти подстановкой найденного распределения прогиба по всей границе $z = 0$, т.е. $w_0(x)$, в (3.6) и (3.7) соответственно, приняв при этом во внимание (3.3).

В качестве примера рассмотрим случай $s(x) = s = \text{const}$. Отсюда и из (3.10), (3.9) (выполнив интегрирование), очевидно, находим

$$w_0(x) = \frac{s}{2E_a\beta}(x^2 - a^2), \quad |x| \le a; \quad w_0(x) = 0, \quad |x| > a \tag{3.11}$$

Распределение прогиба в полуплоскости $z > 0$ получается подстановкой (3.11) в (3.6), с учетом (3.3), что (после очевидных преобразований) дает

$$w(x,z) = \frac{s}{4E_a\beta^{3/2}\sqrt{\pi z}}\int_{x-a}^{x+a} e^{-\frac{\xi^2}{4\beta z}}(\xi^2 - 2\xi x + x^2 - a^2)\,d\xi \tag{3.12}$$

откуда (подробности см. в Приложении) находим

$$\begin{aligned} w(x,z) = \frac{s}{2E_a}\Biggl\{&\left(z + \frac{x^2 - a^2}{2\beta\sqrt{\pi}}\right)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{\beta z}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{\beta z}}\right)\right] - \\ &- 8\sqrt{\frac{z}{\pi\beta}}\,e^{-\frac{x^2+a^2}{4\beta z}}\left[a\operatorname{ch}\left(\frac{ax}{2\beta z}\right) - x\operatorname{sh}\left(\frac{ax}{2\beta z}\right)\right]\Biggr\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $\operatorname{erf}\xi$ – функция ошибок.

Выражение для распределения напряжения по нормали к слоям в полуплоскости $z > 0$ получается подстановкой (3.11) в (3.8), с учетом (3.3), и после очевидных преобразований приобретает вид

$$\sigma_{zz}(x,z) = -p_0 + \frac{s}{2\sqrt{\pi\beta z}}\int_{x-a}^{x+a} e^{-\frac{\xi^2}{4\beta z}}d\xi = -p_0 + \frac{s}{\sqrt{\pi}}\int_{1/2(x-a)/\sqrt{\beta z}}^{1/2(x+a)/\sqrt{\beta z}} e^{-t^2}dt \tag{3.14}$$

откуда находим

$$\sigma_{zz}(x, z) = -p_0 + \frac{1}{2}s\left[\mathrm{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{\beta z}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{\beta z}}\right)\right] \tag{3.15}$$

Таким образом, выражения (3.13) и (3.15) дают искомые распределения прогиба и напряжения, нормального к слоям внутри полуплоскости сплошной среды, эквивалентной рассматриваемой многослойной структуре.

4. Полупространство. *4.1. Основное граничное соотношение для трехмерного случая.* Рассмотрим полупространство $z > 0$. Прежде всего, необходимо найти фундаментальное решение. Это решение получено в [5].

Таким образом, надо найти решение (2.1) при $z > 0$, удовлетворяющее следующему граничному условию при $z = 0$:

$$w_{3f}(x, y, +0) = \delta(x, y) \tag{4.1}$$

где справа стоит двумерная дельта-функция в плоскости $z = 0$, а индекс "$3f$" означает "трехмерное фундаментальное решение". При этом искомое решение должно исчезать на бесконечности. Это решение, очевидно, осесимметрично, т.е. может быть представлено как функция одних лишь цилиндрических координат $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, z. Поэтому для отыскания указанного решения уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\beta^2\Delta_2^2 w_{3f} - \frac{\partial^2 w_{3f}}{\partial z^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \quad w_{3f} = w_{3f}(r, z) \tag{4.2}$$

Здесь Δ_2 – двумерный оператор Лапласа, записанный в цилиндрических координатах для осесимметричного случая. Чтобы решить уравнение (4.2), применим преобразование Ханкеля (см., например, [6]). С этой целью используем преобразование Ханкеля нулевого порядка

$$\overline{w}(z) = \int_0^\infty rJ_0(kr)w_{3f}(r, z)dr \tag{4.3}$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка. Отсюда, учитывая, что $w_{3f}(r, z)$ исчезает при $r \to \infty$, находим

$$\int_0^\infty rJ_0(kr)\Delta_2 w_{3f}dr = -k^2\overline{w} \tag{4.4}$$

$$\int_0^\infty rJ_0(kr)\Delta_2^2 w_{3f}dr = -k^4\overline{w} \tag{4.5}$$

Из (4.2), с учетом (4.3)–(4.5), следует

$$d^2\overline{w}/dz^2 - \beta^2\overline{w} = 0 \tag{4.6}$$

Решение уравнения (4.6), исчезающее при $z \to \infty$, имеет вид

$$\overline{w} = Ce^{-\alpha z}, \quad \alpha = k^2\beta \tag{4.7}$$

где C – постоянная интегрирования, которая должна быть определена из (4.1).

Примем во внимание что, согласно (4.1), $w_{3f} \to \delta(x, y)$ при $z \to 0$. При этом область интегрирования в (4.3) безгранично уменьшается. Поэтому, $J_0(kr)$ в подынтегральном выражении (4.3) можно заменить единицей, так что интеграл в (4.3) можно заменить деленным на 2π интегралом от w_{3f}, взятым по всей плоскости $z = \text{const}$ (при условии, что постоянная здесь достаточна мала). Перейдя далее к пределу при $z \to 0$ и приняв во внимание (4.1), находим

$$\lim_{z \to 0} \overline{w}(z) = \frac{1}{2\pi} \tag{4.8}$$

Таким образом, из (4.7) и (4.8) находим

$$\overline{w} = {}^1\!/_2 e^{-\alpha z}/\pi \tag{4.9}$$

Отсюда, применив формулу обращения преобразования Ханкеля [6], находим

$$w_{3f}(r, z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J_0(kr)ke^{-\beta k^2 z}dk \tag{4.10}$$

Далее, воспользовавшись формулой (см. [7], формула 4.434.3):

$$\int_0^\infty J_0(kr)ke^{-\beta k^2 z}dk = \frac{1}{2\beta z}e^{-r^2/4\beta z} \tag{4.11}$$

из (4.10) находим

$$w_{3f}(r, z) = \frac{1}{4\pi\beta z}e^{-r^2/4\beta z} \tag{4.12}$$

Выведем теперь основное граничное соотношение. Из (4.9), с учетом (4.7), находим

$$d\overline{w}/dz = -\beta k^2 \overline{w} \tag{4.13}$$

Приняв во внимание, что (см. (4.4)) величина $-k^2\overline{w}$ представляет собой преобразование Ханкеля нулевого порядка от $\Delta_2 w_{3f}$, находим

$$\partial w_{3f}/\partial z = \beta\Delta_2 w_{3f} \tag{4.14}$$

Пусть теперь задано некоторое распределение прогиба на границе $z = 0$ полупространства $z > 0$:

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y) \tag{4.15}$$

Здесь предполагается, что $w_0(x, y)$ исчезает достаточно быстро при $(x^2 + y^2) \to \infty$. Тогда, учтя (4.1), (4.2) и линейность рассматриваемой задачи, находим, что распределение прогиба внутри полупространства (т.е. при $z > 0$), обращающееся в (4.15) при $z \to 0$, имеет вид

$$w(x, y, z) = \iint\limits_{z=0} w_{3f}(x-\xi, y-\eta)w_0(\xi, \eta)d\xi d\eta \tag{4.16}$$

Формула (4.16) оправдывает термин “трехмерное фундаментальное решение”, использованный выше для w_{3f}.

Из (2.2) и (4.16), с учетом (4.14), следует, что распределение нормального к слоям напряжения имеет вид

$$\sigma_{zz}(x, z) = \sigma_{zz}^{(0)} + E_a\beta\iint\limits_{z=0} \Delta_2 w_{3f}(x-\xi, y-\eta, z)w_0(\xi, \eta)d\xi d\eta \tag{4.17}$$

Здесь, очевидно, можно считать, что оператор Δ_2 действует на ξ и η. Применим теперь к (4.17) вторую теорему Грина (для двумерного случая) [8]:

$$\oint\limits_{\Gamma}(U_1 \mathrm{grad} U_2 - U_2 \mathrm{grad} U_1)dl = \iint\limits_{S}(U_1\Delta_2 U_2 - U_2\Delta_2 U_1)dS$$

где $U_1(x, y)$ and $U_2(x, y)$ – некоторые функции; S – замкнутая область на плоскости x, y, величина dS – элемент площади на этой плоскости, Γ – контур указанной области и dl – элемент дуги этого контура. Далее, приняв во внимание, что прогиб w_0 предполагается достаточно быстро исчезающим на бесконечности, вследствие чего контурный интеграл можно тоже считать исчезающим на бесконечности, находим

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = \sigma_{zz}^{(0)} + E_a\beta\iint\limits_{z=0} w_{3f}(x-\xi, y-\eta, z)\Delta_2 w_0(\xi, \eta)d\xi d\eta \tag{4.18}$$

Перейдя в (4.18) к пределу при $z \to 0$, и приняв во внимание (4.1), находим

$$\sigma_{zz}(x, y, 0) = \sigma_{zz}^{(0)} + E_a\beta\Delta w_0(x, y) \tag{4.19}$$

Это и есть искомое основное граничное соотношение для трехмерного случая.

4.2. Частная трехмерная граничная задача. Обозначим $\sigma_{zz}^{d} = \sigma_{zz}(x, y, z) - \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}(x, y, z) + p_0$. Рассмотрим следующую смешанную граничную задачу:

$$\sigma_{zz}^{d}(x, y, 0) = s(x, y), \quad (x, y) \in S; \quad w(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \notin S \tag{4.20}$$

где $s(x, y)$ – заданная функция в области S на плоскости $z = 0$. Из (4.19) и первого равенства в (4.20) находим выражение для $\Delta_2 w_0$ в области S. Сам прогиб находится отсюда путем интегрирования уравнения Пуассона при условии, что на контуре области S прогиб исчезает. В результате, с учетом также второго равенства в (4.20), распределение прогиба становится известным на всей границе полуплоскости $z = 0$. Выражения для самого прогиба и для напряжения, нормального к слоям внутри полупространства $z > 0$, можно найти, с учетом (4.12), путем подстановки прогиба, найденного на всей границе полуплоскости, т.е. $w_0(x, y)$, в (4.16) и (4.18) соответственно.

Рассмотрим осесимметричный случай, когда S представляет собой круг радиуса a и $s(r) = s = \mathrm{const}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Тогда, из (4.19), приняв во внимание второе равенство в (4.2), находим

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_0}{dr}\right) = \frac{s}{\beta E_a}, \quad r \le a; \quad w_0 = 0, \quad r > a \tag{4.21}$$

Отсюда, выполнив интегрирование, находим

$$w_0(r) = -\frac{s}{4\beta E_a}(a^2 - r^2) \quad (r \le a), \quad w_0(r) = 0 \quad (r > a) \quad (z = 0) \tag{4.22}$$

Для решения задачи при $z > 0$, когда на границе $z = 0$ прогиб задан посредством (4.22), удобно применить преобразование Ханкеля нулевого порядка. При $z = 0$ это преобразование (см. (4.22)) имеет вид

$$\bar{w}_0 = -\frac{s}{4\beta E_a}\int_0^a r(a^2 - r^2)J_0(kr)dr \tag{4.23}$$

откуда (см. [9], таблица 8.6–2) следует

$$\bar{w}_0 = -\frac{sa}{2\beta E_a k^3}[2J_1(ka) - kaJ_0(ka)] \tag{4.24}$$

где J_1 – функция Бесселя первого порядка. Выражение (4.7) можно рассматривать как преобразование Ханкеля для данной задачи. Соответственно, постоянная интегрирования C должна теперь определяться из (4.24). Таким образом, преобразование Ханкеля искомого решения имеет вид

$$\bar{w} = -\frac{sa}{2\beta E_a k^3}e^{-\beta k^2 z}[2J_1(ka) - kaJ_0(ka)] \tag{4.25}$$

Распределение прогиба в полуплоскости $z > 0$ находится из (4.25) при помощи формулы обращения для преобразования Ханкеля

$$w(r, z) = -\frac{sa}{2\beta E_a}\int_0^\infty \frac{1}{k^3}e^{-\beta k^2 z}[2J_1(ka) - kaJ_0(ka)]J_0(kr)dk \tag{4.26}$$

Распределение нормального к слоям напряжения находится из (2.2) и (4.26), с учетом вышеприведенного равенства $\sigma_{zz}^{(0)} = -p_0$:

$$\sigma_{zz}(r, z) = -p_0 + \frac{sa}{2\beta}\int_0^\infty \frac{1}{k}e^{-\beta k^2 z}[2J_1(ka) - kaJ_0(ka)]J_0(kr)dk \tag{4.27}$$

Интегралы в (4.26) и (4.27), очевидно, сходятся при $k \to \infty$. Их сходимость при $k \to 0$ обеспечивается в силу хорошо известных свойств функций Бесселя нулевого и первого порядка [7], благодаря которым подынтегральное выражение в (4.26) имеет конечный предел, а подынтегральное выражение в (4.27) исчезает при $k \to 0$.

Отметим, что выражение (4.27) можно преобразовать с помощью формулы (20) главы 7 из [10]. Однако, получающееся выражение представляется не более удобным для проведения вычислений и анализа, чем (4.27) и поэтому здесь не приводится.

При помощи (2.2) прогиб можно выразить в виде

$$w(r, z) = w_0(r) + \frac{1}{E_a}\int_0^z [\sigma_{zz}(r, \zeta) + p_0]d\zeta \tag{4.28}$$

где $\sigma_{zz}(r, z)$ находится из (4.27). Выражение (4.28) может быть удобным для вычисления прогиба после того, как найдено нормальное к слоям напряжение.

Таким образом, выражения (4.26) и (4.27) дают искомые распределения прогиба и нормального к слоям напряжения внутри полупространства сплошной среды, эквивалентной рассматриваемой многослойной структуре.

5. Приложение. Выведем выражение (3.13). Из (3.12) находим

$$w(x, z) = \frac{s}{4E_a\beta^{3/2}\sqrt{\pi z}}\left\{-\frac{\partial}{\partial(1/4\beta z)}\left(\int_{x-a}^{x+a} e^{-\xi^2/4\beta z}d\xi\right) - \right.$$

$$\left. -2x\int_{x-a}^{x+a}\xi e^{-\xi^2/4\beta z}d\xi + (x^2 - a^2)\int_{x-a}^{x+a} e^{-\xi^2/4\beta z}d\xi\right\}$$

$$w(x,z) = \frac{s}{4E_a\beta^{3/2}\sqrt{\pi z}}\left\{4\beta z^2\frac{\partial}{\partial z}\left(2\sqrt{\beta z}\int\limits_{(x-a)/2\sqrt{\beta z}}^{(x+a)/2\sqrt{\beta z}} e^{-t^2}dt\right) - 8x\beta z\int\limits_{(x-a)/2\sqrt{\beta z}}^{(x+a)/2\sqrt{\beta z}} te^{-t^2}dt +\right.$$

$$\left. + 2(x^2-a^2)\sqrt{\beta z}\int\limits_{(x-a)/2\sqrt{\beta z}}^{(x+a)/2\sqrt{\beta z}} e^{-t^2}dt\right\}$$

Следовательно

$$w(x,z) = \frac{sz^{3/2}}{2E_a}\sqrt{\pi\beta}\left\{\left(\sqrt{\frac{\pi\beta}{z}} + \frac{x^2-a^2}{2\sqrt{\beta}z^{3/2}}\right)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{\beta z}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{\beta z}}\right)\right] -\right.$$

$$\left. - \left\{\frac{8}{z}e^{-(x^2+a^2)/4\beta z}\left[a\operatorname{ch}\left(\frac{ax}{2\beta z}\right) - x\operatorname{sh}\left(\frac{ax}{2\beta z}\right)\right]\right\}\right.$$

откуда получается (3.13).

6. Заключение. Отметим следующие два момента.

1. Как видно из (3.11) и (4.22), тангенсы углов наклона касательных к распределениям прогиба соответственно на границах полуплоскости и полупространства изменяются скачком в концах или на контурах тех областей, где приложено заданное постоянное давление. Таким образом, в этих местах и вблизи них представлять рассматриваемую многослойную структуру при помощи эквивалентной ей сплошной среды становится недопустимым. Для исправления этого положения необходимо рассматривать указанную многослойную структуру как таковую внутри некоторого прилегающего к границе полуплоскости или полупространства суперслоя, содержащего несколько слоев этой структуры, и как эквивалентную сплошную среду – вне этого суперслоя. Число слоев многослойной структуры в суперслое должно выбираться так, чтобы вне указанного суперслоя было допустимо рассмотрение этой структуры при помощи эквивалентной ей сплошной среды, что означает выполнение условий (1) и (2) п. 2.

2. Для структур, содержащих между слоями настолько податливые прослойки, что допустимо пренебречь их изгибной жесткостью, а нагружение считать одноосным, применимо уравнение (2.1), где

$$E_a = EE_s/(\chi_s E + \chi E_s), \quad \chi_s = h_s/(h+h_s), \quad \chi = h/(h+h_s)$$

(E_s – модуль Юнга прослоек, h_s – их толщина). Этот приближенный результат для эффективного поперечного модуля структуры справедлив и, когда прослойки сцеплены со слоями, и, когда они могут скользить по слоям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00376).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sonntag G.* Die in Schichten gleicher Dicke reibungsfrei geschichtete Halbebene mit periodisch verteilter Randbelastung // Forsch. Geb. Ingenieurwesens. 1957. Bd. 23. H. 1/2. S. 3–8.
2. *Салганик Р.Д.* Приближение сплошной среды для описания деформирования слоистого массива // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 48–56.
3. *Салганик Р.Л.* Длинная упругая поверхностная волна, распространяющаяся между материалом и массивом слоев, работающих на изгиб // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 157–166.

4. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
5. *Салганик Р.Л., Глушкова Л.В.* Изгиб прямолинейных слоев, образующих полубесконечный массив, под действием заданного прогиба на границе. Симферополь 1988. 10 с. – Деп. Укр. НИИНТИ 27.09.1988., № 2476-Ук88.
6. *Трантер К.Дж.* Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гостехиздат, 1956. 204 с.
7. *Рыжик И.М., Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 464 с.
8. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Гостехиздат, 1954. 608 с.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 295 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.02.2003