МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2004

УДК 539.3

© 2004 г. А. А. КУЛИКОВ, С. Н. НАЗАРОВ

ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ О ПРЯМОЛИНЕЙНОМ РАЗВИТИИ ТРЕЩИН

Установлено, что процессы квазистатического прямолинейного распространения трещин в плоских ортотропных алгебраически эквивалентных средах протекают подобно. Сформулирован принцип соответствия, относящийся к средам, упругие и прочностные свойства которых связаны одним и тем же аффинным преобразованием. Обнаружены связи показателей сингулярностей напряжений для анизотропных клинов с зажатыми и свободными сторонами. Обсуждаются конкретные примеры.

1. Алгебраические преобразования задач теории упругости. Пусть G – плоское анизотропное однородное тело. Вводя столбцы $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, 2^{1/2}\sigma_{12})^T$ и $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2^{1/2}\varepsilon_{12})^T$ напряжений и деформаций [1, 2], записываем закон Гука в матричной (а не тензорной) форме $\sigma = A\varepsilon$, где A – симметрическая положительно определенная 3×3 – матрица жесткости, T – знак транспонирования. Если $u = (u_1, u_2)^T$ – вектор смещений, то

$$\varepsilon = \varepsilon(u;x) = D(\nabla_x)u(x)$$

$$D(\nabla_x)^T = \left\| \begin{matrix} \partial_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1 \end{matrix} \right\|, \quad \nabla_x = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

В матричной записи задача о деформации тела G, выглядит так:

$$D(-\nabla_x)^T A D(\nabla_x)u(x) = f(x), \quad x \in G \tag{1.1}$$

$$D(n(x))^T A D(\nabla_x)u(x) = g(x), \quad x \in B_\sigma \tag{1.2}$$

$$u(x) = h(x), \quad x \in B_u \tag{1.3}$$

Здесь $n(x)$ – единичный вектор внешней нормали к границе ∂G в точке x, т.е. матрица $D(n)$ получается из $D(\nabla_x)$ заменой производных ∂_i на компоненты нормали n_i. Кроме того, f – объемные силы; g – усилия, действующие на часть B_σ границы ∂G; а h – внешние смещения дуги $B_u = \partial G \setminus \bar{B}_\sigma$. Все векторы интерпретируются как столбцы в $\mathbf{R}^2$.

Пусть m – неособенная 2×2-матрица, $d = \det m > 0$. Сделаем замену координат

$$x \mapsto \mathbf{x} = mx \tag{1.4}$$

Используя полужирные литеры для обозначения величин в новых координатах, имеем [2]:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mu^{-1}(m^T)^{-1} n(m^{-1}\mathbf{x}), \quad \mu(\mathbf{x}) = \left|(m^T)^{-1} n(m^{-1}\mathbf{x})\right|$$

$$mD(\nabla_x)^T = D(\nabla_\mathbf{x})^T Q, \quad Q = \left\| \begin{matrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 & 2^{1/2} m_{11} m_{12} \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 & 2^{1/2} m_{21} m_{22} \\ 2^{1/2} m_{11} m_{21} & 2^{1/2} m_{12} m_{22} & m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21} \\ \nabla_\mathbf{x} = (m^T)^{-1} \nabla_x & & \end{matrix} \right\|$$

Примем обозначения

$$\mathbf{A} = QAQ^T, \quad \mathbf{G} = mG, \quad \mathbf{B}_\sigma = mB_\sigma, \quad \mathbf{B}_\mathbf{u} = mB_u \tag{1.5}$$

$$\mathbf{f} = mf, \quad \mathbf{g} = \mu^{-1} mg, \quad \mathbf{h} = (m^T)^{-1} h \tag{1.6}$$

$$\mathbf{u} = (m^T)^{-1} u, \quad \sigma(\mathbf{u}) = Q\sigma, \quad \varepsilon(\mathbf{u}) = (Q^T)^{-1} \varepsilon \tag{1.7}$$

В результате задача (1.1) – (1.3) преобразуется в задачу о деформации нового тела G, причем его упругие свойства описываются матрицей $\mathbf{A}$, а внешние воздействия – формулами (1.6):

$$D(-\nabla_\mathbf{x})^T \mathbf{A} D(\nabla_\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{G}$$

$$D(\mathbf{n}(\mathbf{x}))^T \mathbf{A} D(\nabla_\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{B}_\sigma \tag{1.8}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{B}_\mathbf{u} \tag{1.9}$$

Упругие материалы с матрицами A и $\mathbf{A}$ называются *алгебраически эквивалентными* [2]. Как установлено в [2, 3], для любой матрицы A найдется преобразование m, подчиненное условию $\det m = 1$ и такое, что матрица $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{jk})$ из (1.5) соответствует ортотропному материалу с осью симметрии четвертого порядка, т.е.

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{22}, \quad \mathbf{A}_{31} = \mathbf{A}_{32} = 0 \tag{1.10}$$

Кроме того, можно соблюсти условие $\mathbf{A}_{11} \geq \mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{33}$ [3].

Введенные алгебраические преобразования можно привлечь для изучения особенностей вблизи вершин трещин и угловых вырезов – замена координат (1.4) не влияет на показатели λ сингулярностей. В то же время направление и длина трещины-отрезка изменяются, однако такие энергетические характеристики, как упругая энергия и инвариантные интегралы, приобретают разве лишь постоянные множители. Это обстоятельство указывает на возможное сходство квазистатических процессов разрушения для алгебраически эквивалентных сред, и далее устанавливается, что вариационно-асимптотическая модель [4–6] этих процессов в ортотропных телах G и $\mathbf{G}$ приводят к подобным решениям. Значения предельных нагрузок, вызывающих рост трещин, связывают посредством критических значений K_{1c} и $\mathbf{K}_{1c}$ коэффициентов интенсивности напряжений (КИН), после чего каких-либо свободных констант для подгонки не остается. Заметим то, что вариационное неравенство, описывающее рост трещин, содержит разнообразные характеристики как самого тела с трещиной, так и наведенного в нем напряженного состояния, однако алгебраический пересчет этих характеристик оказывается согласованным с их позициями в математической постановке задачи разрушения.

Модели [5, 6] относятся к прямолинейному росту трещины, вызванному разрывной модой напряженного состояния, и поэтому детализированная проверка принципа соответствия производится при условиях упругой и геометрической симметрии тел G и $\mathbf{G}$. В принципе упругая и прочностная анизотропии тел независимы (см. [7, 8] и др.), т.е. распространение принципа соответствия на анизотропные тела требует предположений о связи их прочностных свойств посредством алгебраических преобразований. Если случилось, что такая связь имеет место, то из принципа соответствия выводится, например, условие прямолинейного развития трещины.

Отметим, что преобразования (1.4) и (1.5) – (1.7) приводят к перемещению мод и поэтому названное условие содержит линейную комбинацию КИН K_1 и K_2 и в случае произвольной анизотропии отличается от очевидного на первый взгляд равенства $K_2 = 0$.

2. Сингулярные составляющие напряженного состояния вблизи трещины. Для прогнозирования разрушения нужно знать характеристики напряженного состояния, как локальные, отвечающие вершинам трещины $O^\alpha(\alpha = 1, 2)$, так и глобальные, связанные с общей геометрией тела. Канонические определения этих характеристик требуют специальной нормировки степенных решений $X^{i,k}$, $Y^{i,k}$ модельной задачи в плоскости с полубесконечным разрезом

$$
\begin{aligned}
X^{i,k}(x^\alpha) &= r_\alpha^{k-1/2}\Phi^{i,k}(\varphi_\alpha) \quad (k = 1, 2, \ldots)\\
Y^{i,k}(x^\alpha) &= r_\alpha^{-k+1/2}\Psi^{i,k}(\varphi_\alpha) \quad (\alpha, i = 1, 2)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Здесь x^α и $(r_\alpha, \varphi_\alpha)$ – декартовы и полярные координаты, отнесенные к вершине O^α; $r_\alpha = |x^\alpha|$, $\varphi_\alpha \in (-\pi, \pi)$. Нормировку *энергетических* решений $X^{i,k}$ приспособим к силовым критериям разрушения, что согласно [9, 10], выражается формулами

$$
\sigma_{tt}(X^{i,1}) = (2\pi r)^{-1/2}\delta_{i,1}, \quad \sigma_{tl}(X^{i,1}) = (2\pi r)^{-1/2}\delta_{i,2}
\tag{2.2}
$$

$$
\partial_l X^{i,k} = (k-3/2)X^{i,k-1}, \quad \partial_l = l^T\nabla_x
\tag{2.3}
$$

Через t и l обозначены единичные векторы, нормальный и касательный к трещине. Нормировка *сингулярных* решений связывается с инвариантным интегралом (квадратичной антисимметрической формой)

$$
q_\alpha(X, Y) = \int_{T_\alpha}\{X^TD(n)^TA\varepsilon(Y) - Y^TD(n)^TA\varepsilon(X)\}ds_x
\tag{2.4}
$$

Здесь T_α – произвольный контур, соединяющий берега трещины и охватывающий вершину O^α. Сингулярные решения можно подчинить условиям биортогональности [9, 10]:

$$
q_\alpha(X^{i,k}, Y^{j,m}) = \delta_{i,j}\delta_{k,m}
\tag{2.5}
$$

Подчеркнем, что из (2.3), (2.5) и формулы $q_\alpha(\partial_l X, Y) = -q_\alpha(X, \partial_l Y)$ [11], выполняющейся для любых решений X и Y модельной задачи, вытекают равенства

$$
\partial_l Y^{i,k-1} = -(k-3/2)Y^{i,k}
\tag{2.6}
$$

Заметив, что производная вдоль трещины любого степенного решения остается степенным решением с уменьшенным на единицу показателем, имеем

$$
\partial_l X^{i,1} = -\sum_{m=1}^{2} P_{im}Y^{m,1} \quad (i = 1, 2)
\tag{2.7}
$$

Тождество (2.7) определяет 2×2-матрицу P, которая является единственной характеристикой материала и направления трещины, возникающей в интегральных и дифференциальных соотношениях для степенных решений (2.1). Матрица P симметрическая и положительно определенная [11, 9]. Если объемные силы гладкие, а берега трещины свободны от напряжений, то для решения u задачи (1.1) – (1.3) справедливо асимптотическое представление вблизи вершины O^α:

$$u(X^\alpha) = s^\alpha + S^\alpha x^\alpha + \sum_{i=1}^{2} \{K_i^\alpha r_\alpha^{1/2} \Phi^{1,i}(\varphi_\alpha) + k_i^\alpha r_\alpha^{3/2} \Phi^{2,i}(\varphi_\alpha)\} + O(r_\alpha^2)$$

Множители K_i^α – коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), k_i^α – коэффициенты при младших сингулярностях напряжений ("младшие" КИН). Столбец s^α и 2×2-матрица S^α входят в гладкую составляющую решения и при прямолинейном устойчивом развитии трещины не оказывают влияния на процесс разрушения.

Весовые функции $z^{i,\alpha}$ [12, 13] предназначены для вычисления КИН

$$K_i^\alpha = \int_G f^T z^{i,\alpha} dx + \int_{B_\sigma} g^T z^{i,\alpha} ds_x - \int_{B_u} h^T D(n)^T AD(\nabla_x) z^{i,\alpha} ds_x$$

Они являются неэнергетическими решениями однородной задачи (1.1) – (1.3) и допускают вблизи O^β ($\beta = 1, 2$) разложения

$$z^{i,\alpha}(x) = \delta_{\alpha,\beta} r_\beta^{-1/2} \Psi^{i,1}(\varphi_\beta) + a^{i,\alpha,\beta} + \sum_{m=1}^{2} C_{\alpha\beta}^{im} r_\beta^{1/2} \Phi^{m,1}(\varphi_\beta) + O(r_\beta), \quad r_\beta \to 0 \tag{2.8}$$

Величины $C_{\alpha\beta}^{im} = C_{\alpha\beta}^{im}(G, A)$, интерпретируемые как КИН весовых функций, суть основные среди упоминавшихся в разд. 2 глобальных характеристик тела с трещиной. Верны равенства [9–11]:

$$C_{\alpha\beta}^{im} = C_{\beta\alpha}^{im} = C_{\alpha\beta}^{mi} \tag{2.9}$$

3. Преобразование сингулярных составляющих при замене координат. Переход к координатам $\mathbf{x}$ из (1.4) изменяет длины радиус-вектора $\mathbf{r}_\alpha$ и касательного вектора $\mathbf{l}$ к трещине, а также производную вдоль трещины

$$\mathbf{r}_\alpha = \mu_l r_\alpha, \quad \mathbf{l} = \mu_l^{-1} ml, \quad \partial_\mathbf{l} = \mu_l^{-1} \partial_l, \quad \mu_l = |ml| \tag{3.1}$$

Согласно (1.7) столбцы $(m^T)^{-1} X^{i,k}$ и $(m^T)^{-1} Y^{i,k}$ остаются степенными решениями модельной задачи, отвечающей трещине $\mathbf{M}$ и матрице жесткости $\mathbf{A}$. Тем не менее, условия нормировки (2.2) – (2.7) могут быть нарушены и поэтому требуется корректировка преобразованных степенных решений. Как будет проверено ниже

$$\mathbf{q}_\alpha((m^T)^{-1} X, (m^T)^{-1} Y) = d^{-1} q_\alpha(X, Y)$$

Таким образом, при умножении $\mathbf{X}^{i,k}$ и $\mathbf{Y}^{i,k}$ на $d^{-1/2}$ наследуются соотношения биортогональности (2.5). Обращаясь к формулам (1.7), видим, что

$$\begin{gathered} \sigma_{tt}(u) = \mu_t^2 \sigma_{\mathbf{tt}}(\mathbf{u}), \quad \sigma_{tl}(u) = \mu_t \mu_l a(m, l) \sigma_{\mathbf{tl}}(\mathbf{u}) + \mu_t^2 b(m, l) \sigma_{\mathbf{tt}}(\mathbf{u}) \\ a(m, l) = |ml|^{-2}, \quad b(m, l) = -|ml|^{-2} (mt)^T ml, \quad \mu_t = \left|(m^T)^{-1} t\right| = d^{-1} \mu_l \end{gathered} \tag{3.2}$$

Итак, алгебраические преобразования сохраняют условия (2.2), если положить

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{1,1} &= (d\mu_l)^{1/2}\{\mu_t^2(m^T)^{-1}X^{1,1} + c(m,l)a(m,l)(m^T)^{-1}X^{2,1}\}\\ \mathbf{X}^{2,1} &= (d\mu_l)^{1/2}(m^T)^{-1}X^{2,1}, \quad c(m,l) = \mu_t a(m,l)^{-1}b(m,l)\end{aligned} \tag{3.3}$$

Соответствующая перестройка нужна и для неэнергетических решений

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^{1,1} &= d(d\mu_l)^{-1/2}\mu_t^{-2}(m^T)^{-1}Y^{1,1}\\ \mathbf{Y}^{2,1} &= d(d\mu_l)^{-1/2}\{a(m,l)^{-1}(m^T)^{-1}Y^{2,1} - c(m,l)\mu_t^{-2}(m^T)^{-1}Y^{1,1}\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

При этом для $m = n = 1$ и $i, j = 1, 2$ верны аналогичные (2.5) равенства

$$\mathbf{q}_\alpha(\mathbf{X}^{i,k}, \mathbf{Y}^{j,m}) = \delta_{i,j}\delta_{k,m} \tag{3.5}$$

Сохранение связей (2.3) и (2.6) позволяет построить остальные степенные решения $\mathbf{X}^{i,k}$, $\mathbf{Y}^{i,k}$, подчиненные (3.5). Наконец, соотношение (2.7), записанное для новых решений, определяет новую матрицу P, элементы которой вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{11} &= \mu_t^4 P_{11} + 2c(m,l)\mu_t^2 a(m,l)P_{12} + c(m,l)^2 a(m,l)^2 P_{22}\\ \mathbf{P}_{12} &= \mathbf{P}_{21} = \mu_t^2 a(m,l)P_{12} + c(m,l)a(m,l)^2 P_{22}, \quad \mathbf{P}_{22} = a(m,l)^2 P_{22}\end{aligned} \tag{3.6}$$

Заметим, что матрица $\mathbf{P}$ сохраняет симметричность и положительную определенность (впрочем, это следует также из общих соображений [9]).

В согласии с (3.3) КИН, обычные $\mathbf{K}_i^\alpha$ и младшие $\mathbf{k}_i^\alpha$, пересчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1^\alpha &= (d\mu_l)^{-1/2}\mu_t^{-2}K_1^\alpha, \quad \mathbf{K}_2^\alpha = (d\mu_l)^{-1/2}\{a(m,l)^{-1}K_2^\alpha - c(m,l)\mu_t^{-2}K_1^\alpha\}\\ \mathbf{k}_1^\alpha &= (d\mu_l)^{-3/2}\mu_t^{-2}k_1^\alpha, \quad \mathbf{k}_2^\alpha = (d\mu_l)^{-3/2}\{a(m,l)^{-1}k_2^\alpha - c(m,l)\mu_t^{-2}k_1^\alpha\}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Наконец, обратимся к весовым функциям. При учете соотношений (3.4) и (1.7) положим

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^{1,\alpha} &= d(d\mu_l)^{-1/2}\mu_t^{-2}(m^T)^{-1}z^{1,\alpha}\\ \mathbf{z}^{2,\alpha} &= d(d\mu_l)^{-1/2}\{a(m,l)^{-1}(m^T)^{-1}z^{2,\alpha} - c(m,l)\mu_t^{-2}(m^T)^{-1}z^{1,\alpha}\}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Величины $\mathbf{C}_{\alpha\beta}^{im}$ из подобных (2.8) формул для $\mathbf{z}^{i,\alpha}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\alpha\beta}^{11} &= \mu_t^{-4}\mu_l^{-1}C_{\alpha\beta}^{11}\\ \mathbf{C}_{\alpha\beta}^{12} &= \mathbf{C}_{\alpha\beta}^{21} = \mu_t^{-2}a(m,l)^{-1}\mu_l^{-1/2}C_{\alpha\beta}^{12} - c(m,l)\mu_t^{-4}\mu_l^{-1}C_{\alpha\beta}^{11}\\ \mathbf{C}_{\alpha\beta}^{22} &= a(m,l)^{-2}\mu_l^{-1}C_{\alpha\beta}^{22} - 2c(m,l)\mu_t^{-2}\mu_l^{-1}a(m,l)^{-1}C_{\alpha\beta}^{12} + c(m,l)^2\mu_t^{-4}\mu_l^{-1}C_{\alpha\beta}^{11}\end{aligned} \tag{3.9}$$

Подчеркнем, что свойства симметрии (2.9) для коэффициентов (3.9), обеспеченные нормировкой степенных решений $\mathbf{X}^{i,k}$ и $\mathbf{Y}^{i,k}$, вытекают также из аналогичных свойств коэффициентов $C_{\alpha\beta}^{im}$ в (2.8).

4. Вариационно-асимптотическая модель квазистатического роста трещины. На основе вариационного подхода к задачам механики разрушения [14, 15] в [4–6] были предложены асимптотические модели развития семейства трещин. В рамках силового критерия Ирвина опишем модель для одиночной трещины M, учитывая взаимодействие ее вершин. Постановки [5, 6] относятся к трещинам нормального разрыва, сохраняющим прямолинейность при развитии. Поэтому предположим, что ось x_1, направленная вдоль M, является осью симметрии, как геометрической, так и упругой. При этом $l = (1, 0)^T$, $t = (0, 1)^T$ и $A_{13} = A_{23} = 0$. Пусть $B_u = \varnothing$ и к внешней границе ∂G_0 тела $G = G_0 \backslash M$ приложена симметричная нагрузка

$$p^\tau = p^0 + \tau p' \tag{4.1}$$

Здесь τ – времениподобный параметр нагружения; объемные силы отсутствуют и берега трещины $M_\pm$ считаются свободными. Для КИН, отвечающих начальному положению трещины и нагрузке (4.1), справедливы формулы

$$K_1^\alpha = K_1^{\alpha 0} + \tau K_1^{\alpha\prime}, \quad k_1^\alpha = k_1^{\alpha 0} + \tau k_1^{\alpha\prime}, \quad K_2^\alpha = k_2^\alpha = 0$$

Трещина предполагается раскрытой, т.е., в частности, $K_1^\alpha > 0$ при $\tau \in [0, \tau_0]$. Пусть $M(\tau)$ – трещина в момент τ и $h_\alpha(\tau)$ – смещение вершин $Q^\alpha(\tau)$ относительно начального положения $O^\alpha = O^\alpha(0)$. Асимптотические формулы, полученные в [9, 10], приводят к такому выражению для КИН $K_1^\alpha(\tau)$ в вершине $O^\alpha(\tau)$ при нагрузке $p(\tau)$:

$$K_1^\alpha(\tau) = K_1^{\alpha 0} + \tau K_1^{\alpha\prime} + 2^{-1} h_\alpha(\tau) k_1^{\alpha 0} + P_{11} \sum_\beta C_{\alpha\beta}^{11} K_1^{\beta 0} + O(\tau^2 + h_1(\tau)^2 + h_2(\tau)^2)$$

Применим критерий Ирвина в его апостериорной формулировке, т.е. в каждый момент τ рассматривая как неподвижные, так и смещающиеся вершины:

$$\begin{aligned} & h_\alpha(\tau) \ge 0 \\ & h_\alpha(\tau) = 0 \Rightarrow K_1^\alpha(\tau) \le K_{1c} \\ & h_\alpha(\tau) > 0 \Rightarrow K_1^\alpha(\tau) = K_{1c} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Первое из условий означает, что трещина не может зарастать, а второе (третье) требует, чтобы в неподвижной (смещающейся) вершине КИН не превосходил критического значения K_{1c} (был равен K_{1c}). Последнее равенство вытекает из невозможности роста трещины в случае $K_1^\alpha(\tau) < K_{1c}$. Как обычно (см. [15, 4–6] и др.), эти соотношения преобразуем в вариационную задачу: требуется найти столбец

$$H(\tau) = (h_1(\tau) K_{1c}^{-1} K_1^{10}, h_2(\tau) K_{1c}^{-1} K_1^{20})^T \in (\overline{\mathbf{R}}_+)^2 \tag{4.3}$$

удовлетворяющий при всех пробных столбцах X неравенству

$$P_{11} \langle C' H(\tau), H(\tau) - X \rangle + \langle N H(\tau), H(\tau) - X \rangle \ge \langle F(\tau), H(\tau) - X \rangle \forall X \in (\overline{\mathbf{R}}_+)^2 \tag{4.4}$$

Поясним обозначения. Включение (4.3) означает, что обе компоненты столбца $H(\tau)$ неотрицательны; P_{11} – элемент матрицы P, фигурирующей в (2.7); $C' = (C_{\alpha\beta}^{11})$ – симметрическая 2×2-матрица, составленная из коэффициентов в разложении (2.8) весовых функций $z^{1,\alpha}$; N – диагональная матрица размером 2×2 и $F(\tau)$ – столбец:

$$N_{\alpha\alpha} = (2K_1^{\alpha 0})^{-1} k_1^{\alpha 0}, \quad N_{12} = N_{21} = 0, \quad F_\alpha(\tau) = 1 - K_{1c}^{-1}(K_1^{\alpha 0} + \tau K_1^{\alpha\prime})$$

Исследование вариационного неравенства (4.4) и истолкование его решений приведены в [5, 6]. В случае устойчивого квазистатического роста решение (4.3) является единственным и допускает оценку $|H(\tau)| \le \mathrm{const}|F(\tau)_-|$, т.е. оказывается малым при малых τ; здесь $z_\pm = 2^{-1}(|z| \pm z)$.

Замена (1.4) с диагональной матрицей $m = \mathrm{diag}\{m_l, m_t\}$ сохраняет геометрическую и упругую симметрии тела $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \backslash \mathbf{M}$ с матрицей жесткости $\mathbf{A}$ (см. (1.5)). Пусть $\mathbf{K}_{1c}$ – критический КИН для материала, заполняющего $\mathbf{G}$, и $\kappa = \mathbf{K}_{1c}/K_{1c}$. Нормировав нагрузку, приложенную к поверхности $\partial\mathbf{G}_0$ и полученную из (4.1) согласно (1.6), находим, что в силу (3.7) и (3.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^\tau &= \kappa m_l m_t^{-3/2} \mu^{-1} m p^\tau \\ \mathbf{K}_1^{\alpha 0} &= \kappa K_1^{\alpha 0}, \quad \mathbf{K}_1^{\alpha\prime} = \kappa K_1^{\alpha\prime}, \quad \mathbf{k}_1^{\alpha 0} = \kappa m_l^{-1} k_1^{\alpha 0} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Поскольку величина $b(m, l)$ из (3.2) оказывается нулевой благодаря строению матрицы m (векторы ml и ml ортогональны), соотношения (3.6) и (3.9) упрощаются,

$$\mathbf{P}_{11} = m_t^{-4} P_{11}, \quad \mathbf{C}' = m_t^4 m_l^{-1} C' \tag{4.6}$$

Формулы (4.5) и (4.6) позволяют сделать алгебраические преобразования в вариационном неравенстве (4.4). Сократив появляющийся общий множитель m_l^{-1}, получаем

$$\mathbf{P}_{11}\langle \mathbf{C}'\mathbf{H}(\tau), \mathbf{H}(\tau) - \mathbf{X}\rangle + \langle \mathbf{NH}(\tau), \mathbf{H}(\tau) - \mathbf{X}\rangle \ge \langle \mathbf{F}(\tau), \mathbf{H}(\tau) - \mathbf{X}\rangle \quad \forall \mathbf{X} \in (\overline{\mathbf{R}}_+)^2$$

$$\mathbf{N}_{\alpha\alpha} = m_t^{-1} N_{\alpha\alpha}, \quad \mathbf{N}_{12} = \mathbf{N}_{21} = 0, \quad \mathbf{F}_\alpha(\tau) = 1 - \mathbf{K}_{1c}^{-1}(\mathbf{K}_1^{\alpha 0} + \tau \mathbf{K}_1^{\alpha\prime})$$

$$\mathbf{H}(\tau) = m_l H(\tau)$$

5. Принципы соответствия. В п. 4 обнаружена тождественность двух вариационных неравенств: полученного алгебраическими преобразованиями из (4.4) и написанного на основе аналогичных (4.2) соотношений

$$\mathbf{h}_\alpha(\tau) \ge 0$$

$$\mathbf{h}_\alpha(\tau) = 0 \Rightarrow \mathbf{K}_1^\alpha(\tau) \le \mathbf{K}_{1c}$$

$$\mathbf{h}_\alpha(\tau) > 0 \Rightarrow \mathbf{K}_1^\alpha(\tau) = \mathbf{K}_{1c}$$

Это наблюдение обеспечивает следующий принцип подобия процессов квазистатического роста трещин вдоль главных осей ортотропии: в алгебраически эквивалентных телах G и $\mathbf{G}$, связанных аффинным преобразованием m и нагруженных усилиями (4.1) и (4.5) соответственно, отношения длин появляющихся отростков трещин $M(\tau)$ и $\mathbf{M}(\tau)$ совпадает с относительным удлинением m_l^{-1} трещины M при преобразовании m. Иными словами, в любой (малый) момент τ тела $G_0\backslash M(\tau)$ и $\mathbf{G}_0\backslash\mathbf{M}(\tau)$ подобны, причем коэффициент подобия m_l^{-1} не зависит от τ.

Наложенные условия геометрической и упругой симметрии фиксируют направление развития трещины и, тем самым, исключают из рассмотрения анизотропию прочностных свойств тел G и $\mathbf{G}$. Вообще говоря, никаких априорных связей между прочностными и упругими свойствами сред нет (ср. с [7, 8] и др.). Таким образом, при рассмотрении произвольных тел требуется еще одно допущение: при любом направлении развития трещины M в теле G его прочностные характеристики пропорциональны с постоянным коэффициентом к прочностным характеристикам тела $\mathbf{G}$ с трещиной $\mathbf{M}$, полученной из M преобразованием (1.4). В этом случае логично считать, что квазистатические процессы развития трещин протекают подобно. Подчеркнем, что сам факт подобия доказан строго лишь в условиях симметрии.

Пусть G – анизотропное тело, алгебраически эквивалентное телу $\mathbf{G}$ с изотропными прочностными свойствами. Трещина $\mathbf{M}$ растет прямолинейно в случае $\mathbf{K}_2 = 0$. Согласно формулам (3.7) последнее равенство преобразуется к виду

$$K_2 = a(m, l)c(m, l)\mu_t^{-2}K_1 \tag{5.1}$$

Формула (5.1) представляет собой условие прямолинейного роста трещины M в теле G.

Обнаруженное соответствие существенно использует элементарный факт: замена координат (1.4) сохраняет угол 2π при вершинах трещины. Аналогичное преобразование клина $G = \{x : r > 0, \varphi \in (a_0 - a, a_0 + a)\}$ изменяет как направление a_0 биссектрисы, так и полураствор угла a. Тем не менее, инвариантными остаются показатели λ и p степенно-логарифмических решений однородной задачи в клине G

$$r^\lambda \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!}(\log r)^k \Upsilon^{p-k}(\varphi)$$

Иными словами, показатели сингулярностей напряжений для алгебраически эквивалентных сред в вершинах клинов G и $\mathbf{G} = mG$, связанных преобразованием (1.4), оказываются одинаковыми. Поскольку однородные условия (1.2) и (1.3) преобразуются соответственно в однородные условия (1.8) и (1.9), сказанное верно для четырех краевых задач, нумеруемых индексами $i, j = 0, 1$, причем 0 отвечает зажатой, а 1 – свободной стороне. Пусть, например, $\lambda_{ij}(a_0, a, A)$ – показатель с наименьшей положительной вещественной частью для клина G с одной из четырех групп краевых условий на сторонах. Разность $1 - \lambda_{ij}(a_0, a, A)$ указывает порядок наибольшей сингулярности напряжений в вершине клина. Переход к клину $\mathbf{G} = mG$ с атрибутами $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}$ и матрицей жесткости $\mathbf{A}$, найденной согласно (1.5), сохраняет этот показатель для всех групп условий:

$$\lambda_{ij}(a_0, a, A) = \lambda_{ij}(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}, \mathbf{A}) \quad (i, j = 0, 1)$$

Таким образом, если известны зависимости $\lambda_{ij}(a_0, a, A)$ от a_0 и a для всех четырех задач в G, то для нахождения четырех показателей $\lambda_{ij}(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}, \mathbf{A})$ $(i, j = 0, 1)$ достаточно знать лишь один из них, а остальные три можно восстановить по относительному расположению графиков $\lambda_{ij}(a_0, a, A)$.

5.1. Канонические упругие среды. Свойства аффинных преобразований, установленные в [2, 3], разбивают упругие среды на классы алгебраически эквивалентных. По доказанному в [2, 3] любая среда принадлежит классу, порожденному трехпараметрическим семейством ортотропных матриц жесткости с дополнительными свойствами (1.10). Класс эквивалентности, включающий изотропные среды (семейство, параметризуемое, например, модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν) содержит некоторые из ортотропных матриц. Так, преобразование (1.4) с диагональной матрицей $m = \mathrm{diag}\{\rho, \rho^{-1}\}$ переводит изотропную среду в ортотропную

$$\mathbf{A} = [1-\nu_{12}\nu_{21}]^{-1}\left\|\begin{matrix} E_1 & \nu_{21}E_1 & 0 \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21}) \end{matrix}\right\| \tag{5.2}$$

$$E_1 = \rho^4 E, \quad E_2 = \rho^{-4}E, \quad \nu_{12} = \rho^4\nu, \quad \nu_{21} = \rho^{-4}\nu, \quad G_{12} = G$$

При этом, помимо обычной связи $\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2$, модули Юнга E_1, E_2, коэффициенты Пуассона $\nu_{12}\nu_{21}$ и модуль сдвига G_{12} подчинены соотношению

$$G_{12} = [2(1+(\nu_{12}\nu_{21})^{1/2})]^{-1}(E_1E_2)^{1/2}$$

Последнее требование не выполняется, в частности, для ортотропного тела, у которого матрица жесткости $\mathbf{A} = \mathbf{E}\,\mathrm{diag}\{1, 1, 1\}$ пропорциональна единичной.

5.2. Одноосное растяжение плоскости с трещиной. Пусть изотропная плоскость с трещиной $G = \mathbf{R}^2\backslash M$ находится под действием растягивающих усилий p в направлении оси Ox_2; трещина M имеет длину $2a$ и составляет угол $\alpha \in [0; \pi/2]$ с той же осью. Коэффициенты интенсивности имеют вид [16]:

$$K_1(\alpha) = p\sqrt{\pi a}\sin^2\alpha, \quad K_2(\alpha) = p\sqrt{\pi a}\sin\alpha\cos\alpha$$

Сделаем преобразование $m = \mathrm{diag}\{\rho, \rho^{-1}\}$ и получим ортотропную плоскость с матрицей (5.2), причем длина $\mathbf{a}$ трещины $\mathbf{M}$ и угол β с осью $\mathbf{Ox}_2$ равны

$$\mathbf{a} = \mu_l a, \quad \beta = \mathrm{arctg}[\rho^2\mathrm{tg}\,\alpha]$$

Здесь μ_l из (3.1). Рассчитывая коэффициенты интенсивности $\mathbf{K}_1(\beta)$ и $\mathbf{K}_2(\beta)$ по формулам (3.7), получаем

$$\mathbf{K}_1(\beta) = p\sqrt{\pi\mathbf{a}}\rho^{-3}(\rho^4 + \mathrm{tg}^2\beta)^{3/2}\cos^3\beta$$

$$\mathbf{K}_2(\beta) = p\sqrt{\pi\mathbf{a}}\rho^3(\rho^4 + \mathrm{tg}^2\beta)^{-3/2}\{(1+\mathrm{tg}^2\beta)\sin\beta + \rho^{-1}(1-\rho^{-4})(\rho^4+\mathrm{tg}^2\beta)^{1/2}\mathrm{tg}\,\beta\sin^2\beta\}$$

5.3. Сильно выраженная анизотропия. В [17, 18] рассматривались ортотропные тела с матрицей жесткости, содержащей большой параметр $t = E_2/E_1 \gg 1$:

$$A = \left\|\begin{matrix} a & b & 0 \\ b & at & 0 \\ 0 & 0 & c \end{matrix}\right\|$$

Предложенная в этих работах процедура построения асимптотик по малому параметру $1/t$ во многом напоминает стандартный асимптотический анализ задачи о тонкой балке. Аналогия становится очевидной после применения преобразования (1.4) с матрицей $m = \mathrm{diag}\{1, t^{-1/4}\}$. В самом деле, прямоугольник $(-l_1, l_1) \times (-l_2, l_2)$ с соизмеримыми сторонами превращается в тонкий (относительная толщина составляет $t^{-1/4}l_2$), а матрица жесткости принимает вид

$$\mathbf{A}(t) = \left\|\begin{matrix} a & bt^{-1/2} & 0 \\ bt^{-1/2} & a & 0 \\ 0 & 0 & ct^{-1/2} \end{matrix}\right\| \tag{5.3}$$

При $t \to +\infty$ матрица (5.3) вырождается, однако, как известно (см. [19–22] и др.), ее элемент $\mathbf{A}_{33}(t) = ct^{-1/2} \to 0$ не участвует в формировании однородных уравнений деформации тонкой балки, и поэтому после описанных алгебраических преобразований результаты [17, 18] можно получить классическими методами.

6. Инвариантные интегралы. Как следует из формул (1.4), (1.5) и (1.7), упругие энергии, запасенные телами G и $\mathbf{G}$, связаны равенством

$$W = 2^{-1}\int_G \varepsilon(u)^T A\varepsilon(u)dx = 2^{-1}d\int_{\mathbf{G}} \varepsilon(\mathbf{u})^T \mathbf{A}\varepsilon(\mathbf{u})dx = d\mathbf{W}$$

Такая же связь имеется для работ внешних сил и потенциальных энергий деформацией. Более того, в случае отсутствия массовых сил в теле и усилий на берегах трещины инвариантные интегралы $J(u, T_\alpha)$ и $\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{T}_\alpha)$, выражающие скорость высвобождения энергии при продвижении трещины, удовлетворяют соотношению

$$J(u, T_\alpha) = d\mu_l \mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{T}_\alpha)$$
$$J(u, T_\alpha) = \int_{T_\alpha} \{n^T l\varepsilon(u)^T A\varepsilon(u) - (\partial_l u)^T D(n)^T A\varepsilon(u)\}ds_x \tag{6.1}$$

Здесь T_α – тот же, что и в (2.4), контур, соединяющий берега $M_\pm$ трещины и охватывающий ее вершину Q^α, а $\mathbf{T}_\alpha = mT_\alpha$ – преобразованный контур (разумеется, равенство (6.1) выполняется при любом выборе T_α и $\mathbf{T}_\alpha$). Поскольку $2J(u, T_\alpha) = q_\alpha(\partial_l u, u)$ [11], равенство (6.1) обеспечивается аналогичным свойством формы q из (2.4):

$$q_\alpha(X, Y) = d\mathbf{q}_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \tag{6.2}$$

Дополнительный множитель μ_l в (6.1) возникает из-за преобразования (3.1) производной ∂_l. Для доказательства формулы (6.2) переходим к интегрированию по области R_α, ограниченной контуром T_α и участниками берегов $M_\pm$, производим алгебраические замены в двумерном интеграле, а затем возвращаемся к интегрированию по дуге $\mathbf{T}_\alpha$. Пусть χ – срезающая функция, равная единице около T_α и нулю в окрестности точки O^α, т.е. $q_\alpha(\chi X, \chi Y) = q_\alpha(X, Y)$. Воспользуемся алгебраическим тождеством

$$X^T D(n)^T = n^T D(X)^T$$

В результате получаем

$$q_\alpha(X, Y) = \int_{T_\alpha} \{n^T D(\chi X)^T A\varepsilon(\chi Y) - n^T D(\chi Y)^T A\varepsilon(\chi X)\}ds_x =$$
$$= \int_{R_\alpha} \nabla_x^T \{D(\chi X)^T A\varepsilon(\chi Y) - D(\chi Y)^T A\varepsilon(\chi X)\}dx =$$
$$= d\int_{\mathbf{R}_\alpha} \nabla_{\mathbf{x}}^T \{D(\chi\mathbf{X})^T \mathbf{A}\varepsilon(\chi\mathbf{Y}) - D(\chi\mathbf{Y})^T \mathbf{A}\varepsilon(\chi\mathbf{X})\}d\mathbf{x}$$

Повторяя выкладки в обратном порядке, преобразуем последний интеграл в выражение $\mathbf{q}_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00-01-00455) и Французско-русского центра по прикладной математике и информатике им. А.М. Ляпунова (проект 00-01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
2. *Алфутова Н.Б., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Алгебраическая эквивалентность плоских задач для ортотропных и анизотропных сред // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1991. Вып. 3. № 15. С. 64–68.
3. *Куликов А.А., Назаров С.А., Нарбут М.А.* Аффинные преобразования в плоской задаче анизотропной теории упругости // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2000. Вып. 2. № 8. С. 91–95.
4. *Назаров С.А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 152–160.
5. *Назаров С.А.* Взаимодействие трещин при хрупком разрушении. Силовой и энергетический подходы // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 484–496.
6. *Аргатов И.И., Назаров С.А.* Сравнение критериев Гриффитса и Ирвина для несимметрично растущей трещины в плоскости // Физ.-хим. механика материалов. 2000. Т. 36. № 4. С. 77–82.
7. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
8. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
9. *Назаров С.А.* Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 489–502.
10. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Критерии разрушения, асимптотические условия в вершинах трещин и самосопряженные решения оператора Ламе // Труды моск. матем. об-ва. 1996. Т. 57. С. 16–75.
11. *Назаров С.А.* Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1990. Вып. 1. С. 17–31.
12. *Bueckner H.F.* A novel principle for the computation of stress intensity factor // ZAMM. 1970. V. 50. № 9. P. 529–546.
13. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
14. *Морозов Е.М.* Вариационный принцип в механике разрушений // ДАН СССР. 1969. Т. 184. № 6. С. 1308–1311.
15. *Nemat-Nasser S., Sumi Y., Keer L.M.* Unstable grouth of tension cracks in brittle solids: Stable and unstable bifurcations, shap-through and imperfection sensitivitv // Int. J. Solids and Structures. 1980. V. 16. № 11. P. 1017–1033.
16. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. // М.: Наука, 1976. 573 с.
17. *Боган Ю.А.* Асимптотическое поведение краевых задач для упругого кольца, армированного очень жесткими волокнами // ПМТФ. 1980. № 6. С. 118–122.
18. *Боган Ю.А.* Некоторые вариационные задачи с малым параметром в теории упругости // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 604–607.
19. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
20. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. С. 360.
21. *Шойхет Б.А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 5. С. 914–924.
22. *Назаров С.А.* Асимптотический анализ произвольно анизотропной пластины переменной толщины (пологой оболочки) // Мат. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 129–159.

С.-Петербург

Поступила в редакцию 23.07.2001