

УДК 539.3

© 2004 г. К.Ф. ЧЕРНЫХ

АНИЗОТРОПНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ

При создании предельно простой (но без потери общности) теории упругости наиболее сложным является учет нелинейности и анизотропии. В монографии [1] были рассмотрены ортотропный и трансверсально-анизотропный материалы. В статье рассматривается общий случай анизотропии (кристаллы, текстуры, ортотропный и трансверсально-анизотропный материалы). Используются модели редуцированного стандартного и мало-сжимаемого материалов, позволяющие получать точные решения анизотропных нелинейных краевых задач.

1. Комплексные зависимости. В работах [1–6] использовались комплексные (прямоугольные декартовы) координаты материальной точки до $(\zeta, \bar{\zeta})$ и после (z, \bar{z}) деформации

$$\zeta = x_1^{\circ} + ix_2^{\circ}, \quad \bar{\zeta} = x_1^{\circ} - ix_2^{\circ}, \quad z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2$$

дифференцирование по ним

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^{\circ}} - i \frac{\partial}{\partial x_2^{\circ}} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^{\circ}} + i \frac{\partial}{\partial x_2^{\circ}} \right)$$

и комплексные компоненты тензора

$$\begin{aligned} T_1 &= t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}), & T_2 &= t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21}) \\ T_3 &= t_{13} + it_{23}, & T_4 &= t_{31} + it_{32}, & T_5 &= t_{33} \end{aligned} \quad (1.1)$$

При рассмотрении нелинейных анизотропных проблем удобно рассматривать комплексные компоненты тензора деформации Коши – Лагранжа, связанные с комплексными компонентами тензора дисторсии соотношениями [1]:

$$\begin{aligned} C_1^{\circ} &= 2 \left(\frac{\partial z \bar{\partial z}}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta} + \frac{\partial z \bar{\partial z}}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \right) + 4 \frac{\partial x_3 \bar{\partial x}_3}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}, & C_2^{\circ} &= 4 \left[\frac{\partial z \bar{\partial z}}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta} + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \right)^2 \right] \\ C_3^{\circ} &= \frac{\bar{\partial z} \partial z}{\partial \bar{\zeta} \partial x_3^{\circ}} + \frac{\partial z \bar{\partial z}}{\partial \zeta \partial x_3^{\circ}} + 2 \frac{\bar{\partial x}_3 \partial x_3}{\partial \bar{\zeta} \partial x_3^{\circ}}, & C_5^{\circ} &= \frac{\partial z \bar{\partial z}}{\partial x_3^{\circ} \partial x_3^{\circ}} + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_3^{\circ}} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. Кристаллические классы и текстуры. Известно, что существуют 32 кристаллических класса, отнесенных к 7 кристаллическим системам (сингониям). Все они сведены в табл. 1 (I – кристаллографическая система, 2 – номер класса по Гроту, 3 – класс по номенклатуре Федоровского института, 4 – порождающие элементы симметрии). В третьем ее столбце помещены порождающие элементы симметрии, комбинации которых позволяют получить все преобразования симметрии кристаллического класса. В четвертом столбце помещены порождающие элементы, позволяющие с дополнительным преобразованием инверсии, выполняющимся для рассматриваемого тензора 4-го ранга, добиться того же. В третьем и четвертом столбцах точка сопровождается плоскостью сим-

Таблица 1

1	2	3	4	
Триклинная	1	Примитивный	1	2
	2	Центральная	2	1
Моноклинная	3	Аксиальная	2	2
	4	Планальная	m	2
Ромбическая	5	Планаксиальная	$2 : m$	$2 : 2$
	6	Аксиальный	$2 : 2$	$2 : 2$
	7	Планальный	$2 \cdot m$	$2 : 2$
Тетрагональная	8	Планаксиальный	$m \cdot 2 : m$	$2 : 2$
	9	Гироидо-примитивный	4	4
	10	Примитивный	4	4
	11	Гироидо-планальный	$4 \cdot m$	$4 : 2$
	12	Аксиальный	$4 : 2$	$4 : 2$
	13	Центральный	$4 : m$	4
	14	Планальный	$4 \cdot m$	$4 : 2$
Ромбоэдрическая (тригональная)	15	Планаксиальный	$m \cdot 4 : m$	$4 : 2$
	16	Примитивный	3	3
	17	Аксиальный	6	3
	18	Центральный	$3 : 2$	$3 : 2$
	19	Планальный	$3 \cdot m$	$3 : 2$
Гексагональная	20	Планаксиальный	$6 \cdot m$	$3 : 2$
	21	Гироидо-примитивный	$3 : m$	6
	22	Гироидо-планальный	$m \cdot 3 : m$	$6 : 2$
	23	Примитивный	6	6
	24	Аксиальный	$6 : 2$	$6 : 2$
	25	Центральный	$6 : m$	6
	26	Планальный	$6 \cdot m$	$6 : 2$
Кубическая	27	Планаксиальный	$m \cdot 6 : m$	$6 : 2$
	28	Примитивный	$2/3$	$2/3$
	29	Аксиальный	$4/3$	$4/3$
	30	Центральный	$2/6$	$2/3$
	31	Планальный	$4/3$	$4/3$
	32	Планаксиальный	$4/6$	$4/3$

метрии, параллельную оси симметрии, а двоеточие – перпендикулярную ей. Косая черта сопровождается следующей за ней осью симметрии, равнонаклоненную к координатным осям. Кроме перечисленных кристаллических классов имеются 7 классов-текстур (t), сведенных в табл. 2. При этом во второй строке приведены их порождающие элементы, а в третьей – порождающие элементы, дающие вкпе с преобразованием

Таблица 2

t	1	2	3	4	5	6	7
g	∞	$\infty : m$	$\infty : m$	$m \cdot \infty : m$	$\infty : 2$	∞/∞	$\infty/\infty \cdot m$
g_0	∞			$\infty : 2$		∞/∞	

инверсии все преобразования текстуры. Текстуры, как видно из приведенной таблицы, имеют среди своих элементов симметрии ось симметрии бесконечного порядка (∞). Ортогруппными называют материалы, имеющие три взаимно ортогональные плоскости симметрии. Трансверсально-изотропные материалы характеризуются наличием оси симметрии бесконечного порядка. Согласно табл. 2 трансверсальной изотропией обладают все текстуры.

3. Нелинейная анизотропия. Инвариантные блоки и базисные инварианты. Комплексные компоненты симметричного тензора второго ранга при повороте вокруг третьей координатной оси на угол $\omega_3 = \omega$ преобразуются [1, 5] по формулам

$$C_1^{\circ\omega} = C_1^{\circ}, \quad C_2^{\circ\omega} = e^{-i2\omega} C_2^{\circ}, \quad C_3^{\circ\omega} = e^{-i\omega} C_3^{\circ}, \quad C_5^{\circ\omega} = C_5^{\circ} \quad (3.1)$$

Отсюда следует, что при любой величине поворота имеют место инвариантные относительно рассматриваемого поворота величины

$$\begin{aligned} C_1^{\circ} &= c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ}, & C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ} &= (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 + 4c_{12}^{\circ 2}, & C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ} &= c_{13}^{\circ 2} + c_{23}^{\circ 2} \\ C_2^{\circ} \bar{C}_3^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ} C_3^{\circ 2} &= 2(c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})(c_{13}^{\circ 2} - c_{23}^{\circ 2}) + 8c_{12}^{\circ} c_{23}^{\circ} c_{13}^{\circ}, & C_5^{\circ} &= c_{33}^{\circ} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Полученные величины будем называть инвариантными блоками, поскольку (как выяснится ниже) они либо являются инвариантами для кристаллических классов, текстур и анизотропных материалов, либо служат их составными частями (блоками).

Рассмотрим подробнее порождающие элементы симметрии (см. последний столбец в табл. 1 и последнюю строку в табл. 2). Так для поворотной оси второго порядка (2) имеем согласно (3.1) ($\omega = 2\pi/2 = \pi$)

$$(2): C_1^{\circ\omega} = C_1^{\circ}, \quad C_2^{\circ\omega} = C_2^{\circ}, \quad C_3^{\circ\omega} = -C_3^{\circ}, \quad C_5^{\circ\omega} = C_5^{\circ}$$

Для поворотной оси четвертого порядка (4) имеем

$$(4): C_1^{\circ\omega} = C_1^{\circ}, \quad C_2^{\circ\omega} = -C_2^{\circ}, \quad C_3^{\circ\omega} = -iC_3^{\circ}, \quad C_5^{\circ\omega} = C_5^{\circ}$$

Для поворотной оси третьего порядка (3)

$$(3): C_1^{\circ\omega} = C_1^{\circ}, \quad C_2^{\circ\omega} = e^{-i2\pi/3} C_2^{\circ}, \quad C_3^{\circ\omega} = e^{-i\pi/3} C_3^{\circ}, \quad C_6^{\circ\omega} = C_5^{\circ}$$

Наконец, для поворотной оси шестого порядка (6)

$$(6): C_1^{\circ\omega} = C_1^{\circ}, \quad C_2^{\circ\omega} = e^{-i2\pi/6} C_2^{\circ}, \quad C_3^{\circ\omega} = e^{-i\pi/6} C_3^{\circ}, \quad C_5^{\circ\omega} = C_5^{\circ}$$

При поперечной оси поворота второго порядка (у нас второй координатной оси (2)): имеем замены индексов (1 \rightarrow -1, 3 \rightarrow -3), и согласно формулам (1.1):

$$(2): C_1^{\circ\omega} = C_1^{\circ}, \quad C_2^{\circ\omega} = \bar{C}_2^{\circ}, \quad C_3^{\circ\omega} = \bar{C}_3^{\circ}, \quad C_5^{\circ\omega} = C_5^{\circ}$$

Для равнонаклоненной к координатным осям оси поворота третьего порядка (3) координатные оси переходят друг в друга, что отвечает циклической перестановке индексов

$$(3): 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

При преобразованиях отражении в координатных плоскостях m_i ($i = 1, 2, 3$) имеем $i = 1$ ($1 \rightarrow -1$)

$$c_{11}^{o^m} = c_{11}^o, \quad c_{22}^{o^m} = c_{22}^o, \quad c_{33}^{o^m} = c_{33}^o, \quad c_{12}^{o^m} = -c_{12}^o, \quad c_{23}^{o^m} = c_{23}^o, \quad c_{13}^{o^m} = -c_{13}^o$$

$$(m_1) C_1^{o^m} = C_1^o, \quad C_2^{o^m} = \bar{C}_2^o, \quad C_3^{o^m} = -\bar{C}_3^o, \quad C_5^{o^m} = C_5^o$$

$i = 2$ ($2 \rightarrow -2$)

$$c_{11}^{o^m} = c_{11}^o, \quad c_{22}^{o^m} = c_{22}^o, \quad c_{33}^{o^m} = c_{33}^o, \quad c_{12}^{o^m} = -c_{12}^o, \quad c_{23}^{o^m} = -c_{23}^o, \quad c_{13}^{o^m} = c_{13}^o$$

$$(m_2) C_1^{o^m} = C_1^o, \quad C_2^{o^m} = \bar{C}_2^o, \quad C_3^{o^m} = C_3^o, \quad C_5^{o^m} = C_5^o$$

$i = 3$ ($3 \rightarrow -3$)

$$c_{11}^{o^m} = c_{11}^o, \quad c_{22}^{o^m} = c_{22}^o, \quad c_{33}^{o^m} = c_{33}^o, \quad c_{12}^{o^m} = c_{12}^o, \quad c_{23}^{o^m} = -c_{23}^o, \quad c_{13}^{o^m} = -c_{13}^o$$

$$(m_3) C_1^{o^m} = C_1^o, \quad C_2^{o^m} = C_2^o, \quad C_3^{o^m} = -C_3^o, \quad C_5^{o^m} = C_5^o$$

Используя полученные зависимости, получим базовые инварианты, при помощи которых можно получить (возводя в степень, перемножая и комплексно сопрягая их) все инварианты. Кроме того ограничимся только однородными инвариантами степени не выше 3 (по компонентам).

Так для моноклинной сингонии имеем (см. здесь и ниже порождающие элементы симметрии в последнем столбце табл. 1 и в последней строке табл. 2) с учетом соотношений (2) следующие инварианты

$$C_1^o, C_2^o, C_3^o, C_3^o \bar{C}_3^o, C_5^o \quad (c_{11}^o, c_{22}^o, c_{33}^o, c_{12}^o, c_{13}^o, c_{23}^o, c_{13}^o, c_{23}^o) \quad (3.3)$$

Для триклинной сингонии эти инварианты следует согласовать с преобразованиями (:2). В результате приходим к инвариантам

$$C_1^o, C_2^o + \bar{C}_2^o, C_2^o \bar{C}_2^o, C_3^o + \bar{C}_3^o, C_3^o \bar{C}_3^o, C_5^o \quad (c_{11}^o, c_{22}^o, c_{33}^o, c_{12}^o, c_{23}^o, c_{13}^o, c_{13}^o c_{23}^o) \quad (3.4)$$

Для тетрагональной сингонии воспользуемся соотношениями (4). В результате находим для кристаллических классов 9, 10, 13:

$$C_1^o, C_2^o, C_2^o \bar{C}_2^o, C_3^o \bar{C}_3^o, C_2^o C_3^o, C_2^o \bar{C}_3^o, C_5^o \quad \left(c_{11}^o + c_{22}^o, c_{33}^o, (c_{11}^o - c_{22}^o)^2, c_{12}^o, (c_{11}^o - c_{22}^o)c_{12}^o, c_{13}^o + c_{23}^o, (c_{11}^o - c_{22}^o)(c_{13}^o - c_{23}^o), c_{12}^o c_{23}^o c_{13}^o, (c_{11}^o - c_{22}^o)c_{13}^o c_{23}^o, c_{12}^o(c_{13}^o - c_{23}^o) \right) \quad (3.5)$$

Для кристаллических классов 11, 12, 14, 15 полученные инварианты необходимо согласовать с преобразованиями (:2). В результате приходим к инвариантам

$$C_1^o, C_2^o \bar{C}_2^o, C_3^o \bar{C}_3^o, C_2^o \bar{C}_3^o + \bar{C}_2^o C_3^o, C_5^o \quad (c_{11}^o - c_{22}^o, c_{33}^o, (c_{11}^o - c_{22}^o)^2, c_{12}^o, (c_{11}^o - c_{22}^o)(c_{13}^o - c_{23}^o), c_{12}^o c_{23}^o c_{13}^o) \quad (3.6)$$

Для классов 16, 17 тригональной сингонии имеем согласно преобразованиям (3) следующие инварианты

$$\begin{aligned}
 & C_1^{\circ}, C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}, C_2^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ 2}, C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ}, C_2^{\circ} C_3^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ} \bar{C}_3^{\circ 2}, C_2^{\circ} \bar{C}_3^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ} C_3^{\circ 2}, C_2^{\circ} C_3^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ} \bar{C}_3^{\circ 2}, C_5^{\circ} \\
 & c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 + 4c_{12}^{\circ 2}, c_{13}^{\circ 2} + c_{23}^{\circ 2}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 c_{12}^{\circ} - 4c_{12}^{\circ 3}, \\
 & 2[(c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 (c_{13}^{\circ 2} - c_{23}^{\circ 2}) + 4c_{12}^{\circ} c_{23}^{\circ} c_{13}^{\circ}], c_{12}^{\circ} (c_{13}^{\circ 2} - c_{23}^{\circ 2}) - (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ}) c_{13}^{\circ} c_{23}^{\circ}, \\
 & (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ}) [(c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 - 12c_{12}^{\circ 2}]
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

После согласования с преобразованием (:2) получаем отсюда для классов 18, 19, 20

$$\begin{aligned}
 & C_1^{\circ}, C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}, C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ}, C_2^{\circ 3} + \bar{C}_2^{\circ 3}, C_2^{\circ} \bar{C}_3^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ} C_3^{\circ 2}, C_5^{\circ} \\
 & \left(\begin{aligned}
 & c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 + 4c_{12}^{\circ 2}, c_{13}^{\circ 2} + c_{23}^{\circ 2}, \\
 & [(c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 (c_{13}^{\circ 2} - c_{23}^{\circ 2}) + 4c_{12}^{\circ} c_{23}^{\circ} c_{13}^{\circ}], (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^3 - 12(c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ}) c_{12}^{\circ 2}
 \end{aligned} \right)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для классов 21, 23, 25 гексагональной сингонии находим, при учете соотношений (6), инварианты

$$\begin{aligned}
 & C_1^{\circ}, C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}, C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ}, C_2^{\circ} \bar{C}_3^{\circ 2}, C_5^{\circ} \\
 & \left(\begin{aligned}
 & c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 + 4c_{12}^{\circ 2}, c_{13}^{\circ 2} + c_{23}^{\circ 2}, \\
 & [(c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ}) (c_{13}^{\circ 2} - c_{23}^{\circ 2}) + 4c_{12}^{\circ} c_{23}^{\circ} c_{13}^{\circ}], c_{12}^{\circ} (c_{13}^{\circ} - c_{23}^{\circ}) - (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ}) c_{23}^{\circ} c_{13}^{\circ}
 \end{aligned} \right)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

После согласования этих величин с преобразованиями (:2) получаем инварианты для классов 22, 24, 26, 27

$$\begin{aligned}
 & C_1^{\circ}, C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}, C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ}, C_2^{\circ} \bar{C}_3^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ} C_3^{\circ 2}, C_5^{\circ} \\
 & \left(\begin{aligned}
 & c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 + 4c_{12}^{\circ 2}, c_{13}^{\circ 2} + c_{23}^{\circ 2}, \\
 & [(c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ}) (c_{13}^{\circ 2} - c_{23}^{\circ 2}) + 4c_{12}^{\circ} c_{23}^{\circ} c_{13}^{\circ}]
 \end{aligned} \right)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Для кубической сингонии, имеющий в составе порождающих элементов симметрии равнонаклоненную поворотную ось третьего порядка, необходимо удовлетворить циклической замене индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Так для классов 28, 30 из соотношений (2) и (1.1) находим удовлетворяющие циклической перестановке индексов: единственную линейную комбинацию

$$I_C = C_1^{\circ} + C_5^{\circ} = c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ} + c_{33}^{\circ} \tag{3.11}$$

и пять квадратичных

$$\begin{aligned}
 & 1/2 C_1^{\circ 2} - 1/8 (C_2^{\circ} + \bar{C}_2^{\circ}) + C_5^{\circ 2} = c_{11}^{\circ 2} + c_{22}^{\circ 2} + c_{33}^{\circ 2} \\
 & 1/4 C_1^{\circ 2} - 1/16 (C_2^{\circ} + \bar{C}_2^{\circ})^2 + C_1^{\circ} C_5^{\circ} = c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} + c_{22}^{\circ} c_{33}^{\circ} + c_{11}^{\circ} c_{33}^{\circ} \\
 & C_1^{\circ} C_5^{\circ} - 1/16 (C_2^{\circ} - \bar{C}_2^{\circ})^2 + C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ} = c_{12}^{\circ 2} + c_{23}^{\circ 2} + c_{13}^{\circ 2}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \Pi_C &= 1/4 (C_1^{\circ 2} - C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}) - C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ} + C_1^{\circ} C_5^{\circ} = \\ &= (c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} + c_{22}^{\circ} c_{33}^{\circ} + c_{11}^{\circ} c_{33}^{\circ}) - (c_{12}^{\circ 2} + c_{23}^{\circ 2} + c_{13}^{\circ 2}) \\ (C_1^{\circ} + C_5^{\circ})^2 &= (c_{11}^{\circ 2} + c_{22}^{\circ 2} + c_{33}^{\circ 2}) + 2(c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} + c_{22}^{\circ} c_{33}^{\circ} + c_{11}^{\circ} c_{33}^{\circ}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

В выписанные пять выражений входят всего три симметричные комбинации компонент. Сохраним первую и четвертую. Можно было бы оставить и пятую. Но она следует из (3.11). Поскольку рассматриваются лишь первично-образующие инварианты, ее следует опустить. Далее, имеем четыре кубических выражения:

$$\begin{aligned} \Pi_C &= 1/4 (C_1^{\circ 2} - C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}) C_5^{\circ} - 1/2 C_1^{\circ} C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ} + 1/4 (C_2^{\circ} \bar{C}_3^{\circ} + \bar{C}_2^{\circ} C_3^{\circ 2}) = \\ &= c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} c_{33}^{\circ} + 2c_{12}^{\circ} c_{23}^{\circ} c_{13}^{\circ} - (c_{33}^{\circ} c_{12}^{\circ 2} + c_{11}^{\circ} c_{23}^{\circ 2} + c_{22}^{\circ} c_{13}^{\circ 2}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$1/4 C_1^{\circ 2} C_5^{\circ} - 1/16 (C_2^{\circ} + \bar{C}_2^{\circ})^2 C_5^{\circ} = c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} c_{33}^{\circ} \quad (3.15)$$

$$-1/16 (C_2^{\circ} - \bar{C}_2^{\circ}) (C_3^{\circ 2} - \bar{C}_3^{\circ 2}) = c_{12}^{\circ} c_{23}^{\circ} c_{13}^{\circ},$$

$$\begin{aligned} 1/16 (C_2^{\circ} - \bar{C}_2^{\circ})^2 C_5^{\circ} - 1/8 (C_2^{\circ} + \bar{C}_2^{\circ}) (C_3^{\circ 2} + \bar{C}_3^{\circ 2}) + 1/2 C_1^{\circ} C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ} = \\ = c_{11}^{\circ} c_{23}^{\circ 2} + c_{22}^{\circ} c_{13}^{\circ 2} + c_{33}^{\circ} c_{12}^{\circ 2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

содержащих лишь три симметричные комбинации компонент. Выберем из них первые три. Для классов 21, 23, 25 следует вместо набора (3.3) использовать набор (3.5). Но последний “более узкий”, так что для новых классов не может быть новых инвариантов. С другой стороны, инварианты (3.11)–(3.15) записываются через составляющие набора (3.5). Тем самым выписанными инвариантами обладают все классы кубической сингонии.

Для текстуры (табл. 2), согласно соотношениям (3.2), имеем инварианты

$$\begin{aligned} I_C &= c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} c_{33}^{\circ}, C_5^{\circ} = c_{33}^{\circ}, C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ} = c_{13}^{\circ 2} + c_{23}^{\circ 2} \\ \Pi_C &= 1/4 (C_1^{\circ 2} - C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}) - C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ} + C_1^{\circ} C_5^{\circ} = \\ &= (c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} + c_{22}^{\circ} c_{33}^{\circ} + c_{11}^{\circ} c_{33}^{\circ}) - (c_{12}^{\circ 2} + c_{23}^{\circ 2} + c_{13}^{\circ 2}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \Pi_C &= 1/4 (C_1^{\circ 2} - C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}) C_5^{\circ} + 1/2 C_1^{\circ} C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ} + 1/4 (C_2^{\circ} \bar{C}_3^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ} C_3^{\circ 2}) = \\ &= c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} c_{33}^{\circ} + 2c_{12}^{\circ} c_{23}^{\circ} c_{13}^{\circ} - (c_{33}^{\circ} c_{12}^{\circ 2} + c_{11}^{\circ} c_{23}^{\circ 2} + c_{22}^{\circ} c_{13}^{\circ 2}) \end{aligned}$$

Наличие боковой оси (:2) не изменяет выписанных инвариантов, справедливых поэтому и для текстур $\infty:2$. Для текстур ∞/∞ имеют место любые поворотные оси, в том числе и равнонаклоненная ось третьего порядка. Совместность с последней приводит к замене инвариантов (3.17) на следующие: I_C, Π_C, Π_C , справедливые и для гиротропных, изотропных материалов.

Для ортотропного материала имеют место три элемента симметрии: отображения в плоскостях m_i ($i = 1, 2, 3$), для которых имеем (см. $(m_1), (m_2), (m_3)$) общие инварианты

$$\begin{aligned} C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ} + \bar{C}_2^{\circ}, C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}, C_3^{\circ 2} + \bar{C}_3^{\circ 2}, C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ}, \Pi_C, (J) \\ (c_{11}^{\circ}, c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, c_{12}^{\circ 2}, c_{23}^{\circ 2}, c_{13}^{\circ 2}, J) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Для трансверсально-изотропного материала, имеющего третью координатную ось в качестве поворотной бесконечного порядка, имеем после замены в (3.2) кубического инварианта на Π_C , следующие инварианты:

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}, C_3^{\circ} \bar{C}_3^{\circ}, \Pi_C, (J) \quad (3.19)$$

$$(c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 + 4c_{12}^{\circ 2}, c_{13}^{\circ 2} + c_{23}^{\circ 2}, J)$$

Естественно, что получены не все, а только изначально-образующие инварианты. Инвариантами являются любые их комбинации, со списком которых можно познакомиться в [7]. Отметим также, что для практического использования при нелинейном подходе полученных инвариантов, по-видимому, вполне достаточно.

4. Нелинейная плоская задача. Рассмотрим обобщенную плоскую задачу, отвечающую преобразованию комплексных координат

$$z = z(\zeta, \bar{\zeta}), \quad x_3 = \lambda x_3^{\circ} \quad (4.1)$$

где λ – (постоянная) кратность удлинения в направлении третьей координатной оси.

С учетом этих выражений выпишем базисные инварианты плоской задачи, заменяя при этом инварианты $\Pi_C = J^2$ на отвечающий плоской задаче

$$J = \lambda \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \right)$$

При этом согласно соотношениям (3.3)–(3.16) имеем, полагая $C_3^{\circ} = c_{13}^{\circ} = c_{23}^{\circ} = 0$:

для моноклинной сингонии

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ}, (J) \quad (c_{11}^{\circ}, c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, c_{12}^{\circ}) \quad (4.2)$$

для триклинной

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ}, C_2^{\circ} + \bar{C}_2^{\circ}, C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}, (J) \quad (c_{11}^{\circ}, c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, c_{12}^{\circ 2}) \quad (4.3)$$

для тетрагональной (классы 9, 10, 13)

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ 2}, C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}, (J) \quad (4.4)$$

$$(c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2, c_{12}^{\circ 2} (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ}) c_{12}^{\circ})$$

(классы 11, 12, 14, 15)

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ 2} + \bar{C}_2^{\circ 2}, C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}, (J) \quad (c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2, c_{12}^{\circ 2}) \quad (4.5)$$

для тригональной (классы 16, 17)

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}, C_2^{\circ 3}, (J)$$

$$\left(\begin{array}{l} c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 + 4c_{12}^{\circ 2}, \\ (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ}) \left[(c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 - 12c_{12}^{\circ 2}, c_{12}^{\circ} \left[3(c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 - 4c_{12}^{\circ 2} \right] \right] \end{array} \right) \quad (4.6)$$

(классы 18, 19, 20)

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}, C_2^{\circ 3} + \bar{C}_2^{\circ 3}, (J) \quad (4.7)$$

$$(c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 + 4c_{12}^{\circ 2}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^3 - 12(c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ}) c_{12}^{\circ 2})$$

для гексагональной

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ} \overline{C_2^{\circ}}, (J) \quad (c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 + 4c_{12}^{\circ 2}) \quad (4.8)$$

для кубической

$$\begin{aligned} I_C \equiv C_1^{\circ} + C_5^{\circ}, \quad 1/2 C_1^{\circ 2} - 1/8 (C_2^{\circ} + \overline{C_2^{\circ}})^2 + C_5^{\circ 2}, \quad \Pi_C \equiv 1/4 (C_1^{\circ 2} - C_2^{\circ} \overline{C_2^{\circ}}) + C_1^{\circ} C_5^{\circ} \\ 1/4 C_1^{\circ 2} C_5^{\circ} - 1/16 (C_2^{\circ} + \overline{C_2^{\circ}})^2 C_5^{\circ}, (J), \quad (4.9) \\ (c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ} + c_{33}^{\circ}, c_{11}^{\circ 2} + c_{22}^{\circ 2} + c_{33}^{\circ 2}, c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} + c_{22}^{\circ} c_{33}^{\circ} + c_{33}^{\circ} c_{11}^{\circ}, c_{11}^{\circ} c_{22}^{\circ} c_{33}^{\circ}, J) \end{aligned}$$

для ортотропного материала

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ} + \overline{C_2^{\circ}}, C_2^{\circ} \overline{C_2^{\circ}}, (J) \quad (c_{11}^{\circ}, c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, c_{12}^{\circ 2}, J) \quad (4.10)$$

для трансверсально-изотропного материала

$$C_1^{\circ}, C_5^{\circ}, C_2^{\circ} \overline{C_2^{\circ}}, (J) \quad (c_{11}^{\circ} + c_{22}^{\circ}, c_{33}^{\circ}, (c_{11}^{\circ} - c_{22}^{\circ})^2 + 4c_{12}^{\circ 2}, J) \quad (4.11)$$

В приведенных зависимостях символом (J) обозначен “вторичный”, но часто более удобный инвариант, связанный с “первичными” соотношением $J = \sqrt{C_1^{\circ 2} - C_2^{\circ} \overline{C_2^{\circ}}}$.

5. Редуцированный стандартный материал для ортотропного материала и триклинной сингонии. Для редуцированного стандартного материала в соотношениях (4.2)–(4.11) следует сохранить лишь квадратичные (по компонентам) инварианты, рассматривая тем самым упругие потенциалы вида

$$\begin{aligned} \Phi = BJ + A_1 C_1^{\circ} + A_2 (C_2^{\circ} + \overline{C_2^{\circ}}) + A_3 C_5^{\circ} = \\ = B\lambda \left(\frac{\partial z \overline{\partial z}}{\partial \xi \overline{\partial \xi}} - \frac{\partial z \overline{\partial z}}{\partial \xi \overline{\partial \xi}} \right) + A_1 2 \left(\frac{\partial z \overline{\partial z}}{\partial \xi \overline{\partial \xi}} + \frac{\partial z \overline{\partial z}}{\partial \xi \overline{\partial \xi}} \right) + A_2 4 \left(\frac{\partial z \overline{\partial z}}{\partial \xi \overline{\partial \xi}} + \frac{\partial z \overline{\partial z}}{\partial \xi \overline{\partial \xi}} \right) + A_3 \lambda^2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

где B, A_1, A_2, A_3 – положительные постоянные. Подстановка этого выражения в соотношения [2–5]

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial z / \partial \xi)}, \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial z / \partial \xi)} \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33} = \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial x_3 / \partial x_3^{\circ})} \end{aligned} \quad (5.2)$$

дает для рассматриваемого сжимаемого материала

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 = 2(B\lambda + 2A_1) \frac{\partial z}{\partial \xi} + 8A_2 \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 = 2(-B\lambda + 2A_1) \frac{\partial z}{\partial \xi} + 8A_2 \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33} = B \left(\frac{\partial z \overline{\partial z}}{\partial \xi \overline{\partial \xi}} - \frac{\partial z \overline{\partial z}}{\partial \xi \overline{\partial \xi}} \right) + 2A_3 \lambda \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_i$ – комплексные компоненты (вспомогательного) тензора номинальных напряжений.

Подстановка полученных выражений в однородное уравнение равновесия [1]:

$$\frac{\partial\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{\partial\bar{\zeta}} + \frac{\partial\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{\partial\zeta} = 0 \quad (5.4)$$

приводит к разрешающему уравнению

$$A_2 \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta^2} + A_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} + A_2 \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{\zeta}^2} = 0$$

При этом согласно соотношениям (4.2)–(4.11) в полученных зависимостях следует положить:

для тетрагональной, тригональной, гексагональной сингоний и трансверсально-изотропного материала

$$A_2 = 0 \quad (5.5)$$

для кубической сингонии

$$A_2 = 0, \quad A_3 = 2A_1 \quad (5.6)$$

Рассмотрим вначале случай триклинной сингонии и ортотропного материала. Для этого представим разрешающее уравнение в виде

$$D_1 D_2 z = 0, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} - \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial \zeta} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \quad (5.7)$$

Сопоставление этих двух уравнений приводит к корням

$$\alpha_1 = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2^2}}{2A_2}, \quad \alpha_2 = \frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2^2}}{2A_2} \quad (5.8)$$

Расчленим уравнение (5.7), полагая $D_1 \varphi = 0$, $D_2 z = \varphi$. Последовательно интегрируя эту систему, находим

$$\varphi = f_1'(\zeta + \alpha_1 \bar{\zeta}), \quad z = \frac{f_1(\zeta + \alpha_1 \bar{\zeta})}{\alpha_1 - \alpha_2} + f_2(\zeta + \alpha_2 \bar{\zeta})$$

где f_1, f_2 – произвольные функции своих аргументов. Вводя новые аргументы и функции

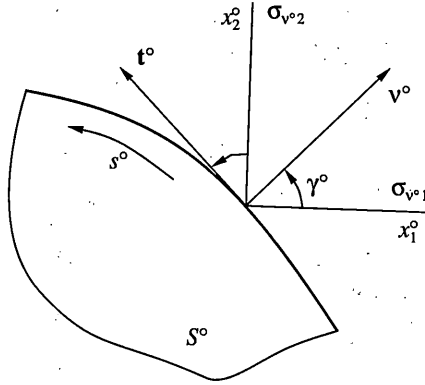
$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \zeta + \alpha_1 \bar{\zeta}, & \zeta_2 &= \zeta + \alpha_2 \bar{\zeta} \\ \frac{f_1(\zeta + \alpha_1 \bar{\zeta})}{\alpha_1 - \alpha_2} &= \int \Phi(\zeta_1) d\zeta_1, & f_2(\zeta + \alpha_2 \bar{\zeta}) &= \int \overline{\Psi(\zeta_2)} \zeta_2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

имеем

$$z = \int \Phi(\zeta_1) d\zeta_1 + \int \overline{\Psi(\zeta_2)} d\zeta_2 \quad (5.10)$$

$$\partial z / \partial \zeta_1 = \Phi(\zeta_1), \quad \partial z / \partial \bar{\zeta}_2 = \overline{\Psi(\zeta_2)} \quad (5.11)$$

$$\partial z / \partial \zeta = \Phi(\zeta_1) + \overline{\Psi(\zeta_2)}, \quad \partial z / \partial \bar{\zeta} = \alpha_1 \Phi(\zeta_1) + \alpha_2 \overline{\Psi(\zeta_2)} \quad (5.12)$$



Фигура

Теперь выражения (5.3) могут быть записаны в виде

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 = 2(k_{11}\Phi(\zeta_1) + \overline{k_{12}\Psi(\zeta_2)}), \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 = 2(k_{21}\Phi(\zeta_1) + \overline{k_{22}\Psi(\zeta_2)}) \quad (5.13)$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33} = B[|\Phi(\zeta_1) + \overline{\Psi(\zeta_2)}|^2 - |\alpha_1\Phi(\zeta_1) + \alpha_2\overline{\Psi(\zeta_2)}|^2] + 2A_3\lambda$$

$$k_{11} = 2A_1 + 4\alpha_1A_2 + B\lambda, \quad k_{12} = 2A_1 + 4\overline{\alpha_2}A_2 + B\lambda \quad (5.14)$$

$$k_{21} = 2\alpha_1A_1 + 4\overline{A_2} - B\lambda\alpha_1, \quad k_{22} = 2A_1\overline{\alpha_2} + 4A_2 - B\lambda\overline{\alpha_2}$$

Для выражений (5.13) граничные условия [1–4] записываются в виде: *статическое* (фигура)

$$[k_{11}\Phi(\zeta_1) + \overline{k_{12}\Psi(\zeta_2)}]e^{i\gamma^0} + [k_{21}\Phi(\zeta_1) + \overline{k_{22}\Psi(\zeta_2)}]e^{i\gamma^0} = e^{i\gamma^0} [\sigma_{\nu^0\nu^0}(s^0) + i\sigma_{\nu^0t^0}(s^0)] \quad (5.15)$$

дисторсионное

$$(\Phi(\zeta_1) + \overline{\Psi(\zeta_2)})e^{i\gamma^0} - (\alpha_1\Phi(\zeta_1) + \alpha_2\overline{\Psi(\zeta_2)})e^{-i\gamma^0} = -idz(s^0)/ds^0 \quad (5.16)$$

более удобное, чем традиционное геометрическое [1–4]. Здесь $z(s^0)$ – заданное на граничном контуре значение комплексной координаты z .

Поскольку функции найдены, то условные напряжения σ_{ij}^0 подсчитывают по формулам

$$\Sigma_1^0 \equiv \sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 = \mathbf{Re} \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 \right)$$

$$\Sigma_2^0 \equiv \sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0 + i2\sigma_{12}^0 = \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 \quad (5.17)$$

$$\sigma_{33}^0 = \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33}$$

величины в правых частях которых заменяются их выражениями из (5.12)–(5.13).

Рассмотрим комплексные плоскости ζ_1, ζ_2 с отверстиями, содержащими соответственно точки $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0$, и примем представления (при больших ζ):

$$\Phi(\zeta_1) = a_0 + \Phi_0(\zeta_1), \quad \Phi_0(\zeta_1) = \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \frac{a_{-3}}{\zeta^3} + \dots \quad (5.18)$$

$$\Psi(\zeta_2) = b_0 + \Psi_0(\zeta_2), \quad \Psi_0(\zeta_2) = \frac{b_{-2}}{\zeta^2} + \frac{b_{-3}}{\zeta^3} + \dots$$

обеспечивающие в рассматриваемых бесконечных областях конечность напряжений, самоуравновешенность нагрузки на контурах отверстий и однозначность смещений.

Подставляя выписанные представления в соотношения (5.17), (5.12) и устремляя ζ_1 и ζ_2 к ∞ , получаем с учетом (5.9):

$$\Sigma_1^{\infty} = \frac{\bar{a}_0 + b_0}{|a_0 + \bar{b}_0|} (k_{11}a_0 + k_{12}\bar{b}_0) + \frac{a_0 + \bar{b}_0}{|a_0 + \bar{b}_0|} (k_{11}\bar{a}_0 + k_{12}b_0)$$

$$\Sigma_2^{\infty} = \frac{\bar{a}_0 + b_0}{|a_0 + \bar{b}_0|} 2(k_{21}a_0 + k_{22}\bar{b}_0), \quad e^{i\omega^{\infty}} = \frac{a_0 + \bar{b}_0}{|a_0 + \bar{b}_0|}$$

Отсюда и находим

$$a_0 = \frac{e^{i\omega^{\infty}} (k_{22}\Sigma_1^{\infty} - k_{12}\Sigma_2^{\infty})}{2(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})}, \quad b_0 = \frac{e^{-i\omega^{\infty}} (-k_{21}\Sigma_1^{\infty} + k_{11}\Sigma_2^{\infty})}{2(k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})} \quad (5.19)$$

Далее, линеаризация выражений (5.3) приводит к линеаризованному закону упругости

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_{11}^0 &= 2(A_1 + 2A_2)e_{11} + B(e_{22} + e_{33}) \\ \sigma_{22} - \sigma_{22}^0 &= 2(A_1 - 2A_2)e_{22} + B(e_{11} + e_{33}) \\ \sigma_{33} - \sigma_{33}^0 &= B(e_{11} + e_{22}) + 2A_3e_{33}, \quad \sigma_{12} = 2(2A_1 - B)e_{12} \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0$ – предварительные напряжения. Сопоставление полученных выражений с соотношениями закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E_1e_{11} + \sqrt{E_1E_2}v_{12}e_{22} + \sqrt{E_1E_3}v_{13}e_{33} \\ \sigma_{22} &= \sqrt{E_1E_3}v_{12}e_{11} + E_2e_{22} + \sqrt{E_2E_3}v_{23}e_{33} \\ \sigma_{33} &= \sqrt{E_1E_3}v_{13}e_{11} + \sqrt{E_2E_3}v_{23}e_{22} + E_3e_{33}, \quad \sigma_{12} = 2E_4e_{12} \end{aligned} \quad (5.21)$$

дает

$$A_1 = 1/4(E_1 + E_2), \quad A_2 = 1/8(E_1 - E_2), \quad A_3 = 1/2E_3, \quad (5.22)$$

$$B = \sqrt{E_1E_3}v_{13} = \sqrt{E_2E_3}v_{23}$$

$$\sigma_{11}^0 = E_1 + \sqrt{E_1E_2}v_{12}, \quad \sigma_{22}^0 = E_2 + \sqrt{E_1E_2}v_{12}, \quad \sigma_{33}^0 = E_3 + \sqrt{E_1E_2}v_{12} \quad (5.23)$$

предварительные напряжения, а

$$v_{23} = v_{13}\sqrt{E_1/E_2}, \quad E_4 = (E_1 - 2\sqrt{E_1E_2}v_{12} + E_2) \quad (5.24)$$

Здесь и ниже используются симметричные коэффициенты Пуассона, введенные с учетом симметрии модулей упругости следующими соотношениями: модули упруго-

сти E_{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) заменами индексов $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 12 \rightarrow 4, 23 \rightarrow 5, 13 \rightarrow 6$ сводятся к величинам E_{mn} ($m, n = 1, \dots, 6$). Симметричные коэффициенты Пуассона вводятся соотношениями $E_{mn} = \sqrt{E_m E_n} \nu_{mn}$ ($\nu_{mn} = 1$). Об использовании и преимуществах симметричных коэффициентов Пуассона сказано в [1–4].

Полученные зависимости позволяют распространить на кристаллы триклинной сингонии полученные в [1] решения задач для плоскости с эллиптическим отверстием и прямолинейным разрезом.

6. Трансверсально-изотропный материал. Тетрагональная, тригональная, гексагональная и кубическая сингонии. Для перечисленных материалов и сингоний разрешающее уравнение (5.5) приводится с учетом условий (5.6) к гармоническому уравнению $\partial^2 z / \partial \zeta \partial \bar{\zeta} = 0$. Из него и соотношения (5.1), (5.2) следует

$$z = \int \Phi(\zeta) d\zeta + \int \overline{\Psi(\bar{\zeta})} d\bar{\zeta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \Phi(\zeta), \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \overline{\Psi(\bar{\zeta})} \quad (6.1)$$

Остальные соотношения предыдущего раздела заменяются более простыми:

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 &= 2(B\lambda + 2A_1)\Phi(\zeta) \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 &= 2(-B\lambda + 2A_1)\overline{\Psi(\bar{\zeta})} \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33} &= B(|\Phi(\zeta)|^2 - |\Psi(\bar{\zeta})|^2) + 2A_3\lambda \end{aligned} \quad (6.2)$$

Функции Гурса – Колосова определяются из статического граничного условия

$$\begin{aligned} k_{11}\Phi(\zeta)e^{i\gamma^\circ} + k_{22}\overline{\Psi(\bar{\zeta})}e^{-i\gamma^\circ} &= [\sigma_{\nu^\circ\nu^\circ}(s^\circ) + i\sigma_{\nu^\circ t^\circ}(s^\circ)]e^{i\gamma^\circ} \\ k_{11} &= B\lambda + 2A_1, \quad k_{22} = -B\lambda + 2A_1 \end{aligned} \quad (6.3)$$

либо из дисторсионного

$$\Phi(\zeta)e^{i\gamma^\circ} - \overline{\Psi(\bar{\zeta})}e^{-i\gamma^\circ} = -i \frac{dz(s^\circ)}{ds^\circ} \quad (6.4)$$

$$a_0 = \frac{e^{i\omega^\circ}}{2k_{11}}(\sigma_{11}^{\circ\infty} + \sigma_{22}^{\circ\infty}), \quad b_0 = \frac{e^{-i\omega^\circ}}{2k_{22}}(\sigma_{11}^{\circ\infty} - \sigma_{22}^{\circ\infty} - i2\sigma_{12}^{\circ\infty}) \quad (6.5)$$

Линеаризованный закон упругости принимает вид

$$\sigma_{11} - \sigma_{11}^0 = 2A_1 e_{11} + B(e_{22} + e_{33}), \quad \sigma_{22} - \sigma_{22}^0 = 2A_2 e_{22} + B(e_{33} + e_{11}) \quad (6.6)$$

$$\sigma_{33} - \sigma_{33}^0 = 2A_3 e_{33} + B(e_{11} + e_{22}), \quad \sigma_{12} = (-B + 2A_1)e_{12}$$

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = B + 2A_1, \quad \sigma_{33}^0 = B \quad (6.7)$$

предварительные напряжения.

Имеют место следующие законы Гука:

для тетрагональной сингонии

$$\sigma_{11} = 1/2(2E_1 - \sqrt{E_1 E_2} \nu_{12} + E_2)e_{11} + 1/2(E_2 - \sqrt{E_1 E_2} \nu_{12})e_{22} + \sqrt{E_1 E_3} \nu_{13} e_{33}$$

$$\sigma_{22} = 1/2(E_2 - \sqrt{E_1 E_2} \nu_{12})e_{11} + 1/2(2E_1 - \sqrt{E_1 E_2} \nu_{12} + E_2)e_{22} + \sqrt{E_1 E_3} \nu_{13} e_{33}$$

$$\sigma_{33} = \sqrt{E_1 E_3} \nu_{13}(e_{11} + e_{22}) + E_3 e_{33}, \quad \sigma_{12} = 2E_4 e_{12}$$

для тригональной сингонии

$$\sigma_{11} = 1/4(2E_1 + \sqrt{E_1 E_2} v_{12} + E_2 + 2E_4)e_{11} + 1/4(3\sqrt{E_1 E_2} v_{12} + E_2 - 2E_4)e_{22} + \sqrt{E_1 E_3} v_{13} e_{33}$$

$$\sigma_{22} = 1/4(3\sqrt{E_1 E_2} v_{12} + E_2 - 2E_4)e_{11} + 1/4(2E_1 + \sqrt{E_1 E_2} v_{12} + E_2 + 2E_4)e_{22} + \sqrt{E_1 E_3} v_{13} e_{33}$$

$$\sigma_{33} = \sqrt{E_1 E_3} v_{13}(e_{11} + e_{22}) + E_3 e_{33}, \quad \sigma_{12} = 1/2(E_1 - \sqrt{E_1 E_3} v_{13} + 2E_4)e_{12}$$

для трансверсально-изотропного материала и гексагональной сингонии

$$\sigma_{11} = E_1(e_{11} + v_{12}e_{22}) + \sqrt{E_1 E_3} v_{13} e_{33}, \quad \sigma_{22} = E_1(e_{22} + v_{12}e_{11}) + \sqrt{E_1 E_3} v_{13} e_{33}$$

$$\sigma_{33} = \sqrt{E_1 E_3} v_{13}(e_{11} + e_{22}) + E_3 e_{33}, \quad \sigma_{12} = E_1(1 - v_{12})e_{12}$$

для кубической сингонии (классы 28, 30)

$$\sigma_{11} = E_1[e_{11} + v_{12}(e_{22} + e_{33})] + \sqrt{E_1 E_4}(v_{14} + v_{24})e_{12}$$

$$\sigma_{22} = E_1[e_{22} + v_{12}(e_{11} + e_{33})] + \sqrt{E_1 E_4}(v_{14} + v_{24})e_{12}$$

$$\sigma_{33} = E_1[e_{33} + v_{12}(e_{11} + e_{22})] + 2\sqrt{E_1 E_4} v_{34} e_{12}$$

$$\sigma_{12} = 1/2\sqrt{E_1 E_4}(v_{14} + v_{24})(e_{11} + e_{22}) + \sqrt{E_1 E_4} v_{34} e_{33} + 2E_4 e_{12}$$

(классы 29, 32, 31) ($v_{34} = 0, v_{24} = -v_{14}$)

$$\sigma_{11} = E_1[e_{11} + v_{12}(e_{22} + e_{33})], \quad \sigma_{22} = E_1[e_{22} + v_{12}(e_{11} + e_{33})]$$

$$\sigma_{33} = E_1[e_{33} + v_{12}(e_{11} + e_{22})], \quad \sigma_{12} = 2E_4 e_{12}$$

Сопоставление выписанных выражений с соотношениями (6.6), (6.7) приводит к следующим значениям постоянных:

для тетрагональной сингонии

$$A_1 = 1/4(2E_1 + E_2), \quad A_3 = 1/2 E_3, \quad B = 1/2 E_2, \quad v_{13} = 1/2 \sqrt{E_2/E_1}$$

$$\sigma_{11}^{\circ} = \sigma_{22}^{\circ} = 1/2(E_1 + E_2), \quad \sigma_{33}^{\circ} = 1/2 E_2$$

$$k_{11} = 1/2[2E_1 + (1 + \lambda)E_2], \quad k_{22} = 1/2[2E_1 + (1 - \lambda)E_2]$$

для тригональной сингонии

$$A_1 = 1/8(2E_1 + \sqrt{E_1 E_2} v_{12} + E_2 + 2E_4), \quad B = 1/4(3\sqrt{E_1 E_2} v_{12} + E_2 - 2E_4)$$

$$A_3 = 1/2 E_3, \quad v_{13} = (\sqrt{E_1 E_2} v_{12} + E_2 - 2E_4)/4\sqrt{E_1 E_3}$$

$$\sigma_{11}^{\circ} = \sigma_{22}^{\circ} = (1/2)E_2 + \sqrt{E_1 E_2} v_{12}, \quad \sigma_{33}^{\circ} = 3\sqrt{E_1 E_2} v_{12} + E_2 - 2E_4$$

$$\left. \begin{matrix} k_{11} \\ k_{22} \end{matrix} \right\} = 1/4(2E_1 + \sqrt{E_1 E_2} v_{12} + E_2 + 2E_4) \pm \frac{\lambda}{4}(3\sqrt{E_1 E_2} v_{12} + E_2 - 2E_4)$$

для гексагональной сингонии и трансверсально-изотропного материала

$$A_1 = 1/2 E_1, \quad B = E_1 \nu_{12}, \quad A_3 = 1/2 E_3, \quad \nu_{13} = \sqrt{E_1/E_3} \nu_{12}$$

$$\sigma_{11}^{\circ} = \sigma_{22}^{\circ} = E_1(1 + \nu_{12}), \quad \sigma_{33}^{\circ} = E_1 \nu_{12}$$

$$k_{11} = E_1(1 + \lambda \nu_{12}), \quad k_{22} = E_1(1 - \lambda \nu_{12})$$

для кубической сингонии

$$A_1 = 1/2 E_1, \quad B = E_1 \nu_{12}, \quad A_3 = 1/2 E_1; \quad E_4 = 1/2 E_1(1 - \nu_{12}),$$

(6.8)

$$\nu_{14} = \nu_{24} = \nu_{34} = 0$$

$$\sigma_{11}^{\circ} = \sigma_{22}^{\circ} = E_1(1 + \nu_{12}), \quad \sigma_{33}^{\circ} = E_1 \nu_{12}$$

$$k_{11} = E_1(1 + \lambda \nu_{12}), \quad k_{22} = E_1(1 - \lambda \nu_{12})$$

7. Малосжимаемые анизотропные материалы. Большинство конструкционных материалов (если не рассматривать пористые и ячеистые) малосжимаемы. Это дает возможность предложить модель малосжимаемого материала. Ее использование приводит к существенным упрощениям. В ряде случаев удается получить решения нелинейных краевых задач в конечном виде [1–6].

Рассмотрим упругий потенциал

$$\Phi = \frac{E}{1 + \nu} \left[\alpha(J - 1) + \varphi \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|, \lambda \right) \right] \quad (7.1)$$

Здесь α – упругая постоянная, а $\varphi(\bullet)$ – функция инвариантов рассматриваемого анизотропного материала. В силу предположенной малой сжимаемости материала, относительное изменение объема $(J - 1)$ учитывается простейшим (линейным) образом. Согласно соотношениям (5.2) имеем

$$\{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_1 = \frac{E}{1 + \nu} \left[2\alpha\lambda + \frac{\partial \varphi / \partial \left| \partial z / \partial \zeta \right|}{\left| \partial z / \partial \zeta \right|} \right] \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (7.2)$$

$$\{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_2 = -\frac{E}{1 + \nu} 2\alpha\lambda \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad \{F^{-1} \cdot J \Sigma\}_{33} = \frac{E}{\nu + 1} \left[\alpha \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right]$$

Подставляя первые два из этих выражений в однородное уравнение равновесия (5.4), приходим к разрешающему уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[\frac{\partial z / \partial \zeta}{\left| \partial z / \partial \zeta \right|} \frac{\partial \varphi}{\partial \left| \partial z / \partial \zeta \right|} \right] = 0$$

откуда следует

$$\frac{\partial z / \partial \zeta}{\left| \partial z / \partial \zeta \right|} \frac{\partial \varphi}{\partial \left| \partial z / \partial \zeta \right|} = \xi^2(\zeta, \lambda) \quad (7.3)$$

где $\xi(\zeta, \lambda)$ – первая произвольная функция. Пусть

$$\xi(\zeta, \lambda) = |\xi(\zeta, \lambda)| e^{i\nu}, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right| e^{i\mu} \quad (7.4)$$

Подстановка этих выражений в (7.3) дает

$$e^{i\mu} = e^{i2\nu} = \xi(\zeta, \lambda) / \overline{\xi(\zeta, \lambda)} \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial \varphi \left(\left| \partial z / \partial \zeta \right|, \lambda \right)}{\partial \left| \partial z / \partial \zeta \right|} = \Omega \quad (7.6)$$

$$\Omega(\zeta, \bar{\zeta}; \lambda) = \xi(\zeta, \lambda) \overline{\xi(\zeta, \lambda)}$$

Представим решение функционального уравнения (7.6) в виде

$$\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| = \frac{\chi(\Omega, \lambda)}{\Omega} \quad (7.7)$$

где $\chi(\Omega, \lambda)$ – вторая произвольная функция. Подстановка выражений (7.7) и (7.5) во второе из соотношений (7.4) дает первое из следующих выражений ($' = \partial/\partial \zeta$):

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\chi(\Omega, \lambda)}{\xi^2(\zeta, \lambda)}, \quad z = \frac{\int \chi(\Omega, \lambda) d\zeta}{\xi^2(\zeta, \lambda)} + \eta(\zeta, \lambda) \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} = \int \frac{\partial \chi(\Omega, \lambda)}{\partial \bar{\zeta} \xi^2(\zeta, \lambda)} d\zeta + \eta'(\zeta, \lambda)$$

где $\eta(\zeta, \lambda)$ – третья произвольная функция.

Из полученных выражений, а также (5.2) следует также

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 &= \frac{E}{1+\nu} \left[2\alpha\lambda \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \xi^2(\zeta, \lambda) \right] \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 &= -\frac{E}{1+\nu} 2\alpha\lambda \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33} = \frac{E}{1+\nu} \left[\alpha \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right]$$

$$\Sigma_1^{\circ} \equiv \sigma_{11}^{\circ} + \sigma_{22}^{\circ} = \frac{E}{1+\nu} \left[2\alpha\lambda \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right| + \Omega \right]$$

$$\Sigma_2^{\circ} \equiv \sigma_{11}^{\circ} - \sigma_{22}^{\circ} + i2\sigma_{12}^{\circ} = -\frac{E}{1+\nu} 2\alpha\lambda \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \quad (7.10)$$

$$\sigma_{33}^{\circ} = \frac{E}{1+\nu} \left[\alpha \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right]$$

При рассмотрении анизотропных материалов для модели малосжимаемого материала “пригодны” лишь базисные инварианты C_1° , C_5° , $C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ}$ и J , выражающиеся через $|\partial z/\partial \zeta|$. Прежде всего, с учетом соотношений (1.2) и (4.1) находим

$$C_1^{\circ} = 2 \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 + \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \right) = 4 \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \frac{2}{\lambda} - \left\{ \frac{2}{\lambda} (J-1) \right\}$$

$$C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ} = 16 \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 = 16 \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 \left[\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \frac{1}{\lambda} - \left\{ \frac{1}{\lambda} (J-1) \right\} \right]$$

В силу предположенной малой сжимаемости материала в выписанных выражениях можно опустить малые члены в фигурных скобках, рассматривая тем самым инварианты

$$C_1^{\circ} = 4 \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \frac{2}{\lambda}, \quad \sqrt{C_2^{\circ} \bar{C}_2^{\circ} + 4\lambda^{-2}} = 4 \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \frac{2}{\lambda}, \quad C_5^{\circ} = \lambda^2, \quad J = \lambda \left(\left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \right)$$

и учитывая последний инвариант простейшим (линейным) образом. Используя эти инварианты, можно распространить полученные в результате на анизотропные материалы. Как и в изотропном случае [1] можно избавиться от квадратур в выражениях (7.8). Таким образом, для анизотропных материалов введено семейство решений, зависящих от трех произвольных функций: $\xi(\cdot)$, $\eta(\cdot)$, $\chi[\cdot]$.

Итак, приведенные в статье зависимости позволяют обобщить на анизотропные материалы результаты, полученные в [1–6]. Так, они дают возможность получать при нелинейном подходе точные решения сингулярных задач механики (сосредоточенные воздействия, хрупкое разрушение) и физики твердого тела (дефекты в кристаллах).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ведущих научных школ (НШ-2180.2003-1), гранта РФФИ (№ 02-01-01258) и гранта министерства образования (Е02-4.0-75).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Ч. 1. Теория. СПб.: Изд. СПбГ ун-та, 1999. 275 с.
2. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
3. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
4. Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука. Физматлит, 1996. 287 с.
5. Chernykh K.F. An Introduction to Modern Anisotropic Elasticity. N. Y.: Begell Publ. House, 1998. 248 p.
6. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Ч. 2. Приложения. СПб.: Изд. СПбГ ун-та, 2000. 195 с.
7. Теодосиу К. Упругие модели дефектов в кристаллах. М.: Мир, 1985. 352 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
6.06.2001