МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2004

УДК 539.3

© 2004 г. Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН, Е. И. ШИФРИН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОМ ВКЛЮЧЕНИИ. ПОЛНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ

Рассматривается задача об изотропном упругом пространстве, содержащем изотропное упругое включение. С помощью обобщения метода Эшелби построены новые интегральные уравнения относительно компонент тензора напряжений внутри включения. Детально разобран частный случай плоской задачи и эллиптического включения. Здесь получены явные аналитические выражения для компонент тензора напряжений как внутри, так и вне включения. Предельными переходами построены решения для эллиптической полости и абсолютно жесткого эллиптического включения. Упрощенные выражения для напряжений в случае круговых включений получены из общих формул в качестве частного случая. Во всех тех частных случаях, для которых аналитические выражения для напряжений представлены в литературе, проведено сравнение полученных решений с известными результатами.

1. Постановка задачи. Предположим, что в изотропном упругом пространстве имеется изотропное упругое включение, занимающее область G. Обозначим упругие постоянные матрицы через λ_M, μ_M, а включения через λ_I, μ_I. Предположим также, что между матрицей и включением имеется полное сцепление.

Рассмотрим задачу определения напряженно-деформированного состояния во включении и матрице в условиях, когда на бесконечности заданы постоянные деформации e_{ij}^A. Для строгой математической формулировки задачи введем следующие обозначения. Пусть $\mathbf{u}^{\mathrm{I}}(x) = (u_1^{\mathrm{I}}(x), u_2^{\mathrm{I}}(x), u_3^{\mathrm{I}}(x))$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in G$ – вектор перемещений во включении, а $\mathbf{u}^M(x) = (u_1^M(x), u_2^M(x), u_3^M(x))$, $x \notin G$ – вектор перемещений в матрице. Деформации выражаются через перемещения следующим образом:

$$e_{ij}^{\mathrm{I}}(x) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{\mathrm{I}}(x) + u_{j,i}^{\mathrm{I}}(x)), \quad x \in G; \quad e_{ij}^M(x) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^M(x) + u_{j,i}^M(x)), \quad x \notin G \tag{1.1}$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука (δ_{ij} – символ Кронекера):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\mathrm{I}}(x) &= \lambda_I\theta^{\mathrm{I}}(x)\delta_{ij} + 2\mu_I e_{ij}^{\mathrm{I}}(x), \quad \theta^{\mathrm{I}}(x) = \sum_{k=1}^{3} e_{kk}^{\mathrm{I}}(x), \quad x \in G \\ \sigma_{ij}^M(x) &= \lambda_M\theta^M(x)\delta_{ij} + 2\mu_M e_{ij}^M(x), \quad \theta^M(x) = \sum_{k=1}^{3} e_{kk}^M(x), \quad x \notin G \end{aligned} \tag{1.2}$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\sigma_{ij,j}^{\mathrm{I}}(x) = 0, \quad x \in G, \quad \sigma_{ij,j}^M(x) = 0, \quad x \notin G \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

Здесь и ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Полное сцепление между матрицей и включением выражается следующими равенствами

$$u_i^{\mathrm{I}}(x') = u_i^M(x'), \quad \sigma_{ij}^{\mathrm{I}}(x')n_j(x') = \sigma_{ij}^M(x')n_j(x'), \quad x' \in \partial G \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

где ∂G – граница области G; $\mathbf{n}(x') = (n_1(x'), n_2(x'), n_3(x'))$ – единичный вектор внешней для области G нормали к ∂G в точке x'.

Условия на бесконечности принимают вид

$$\lim_{x\to\infty} e_{ij}^M(x) = e_{ij}^A, \quad e_{ij}^A = \mathrm{const} \tag{1.5}$$

Задача (1.1)–(1.5) может быть приведена к интегральным уравнениям различным образом, см. например [1, 2]. В случае, когда включение G является эллиптическим цилиндром или эллипсоидом задача допускает аналитическое решение, причем напряженное состояние во включении оказывается однородным. Плоская задача для эллиптического включения была решена в [3] методом теории функций комплексной переменной. Задача об эллипсоидальном включении решена в [4] путем сведения ее к задаче о фазовых превращениях, происходящих в эллипсоидальной области однородного упругого пространства.

Заметим, однако, что в [3] компоненты тензора напряжений не вычислены, а представлены лишь комплексные потенциалы, включающие некоторые постоянные, определяемые из системы линейных алгебраических уравнений. Кроме того, потенциалы для матрицы записаны как функции, зависящие от переменной в области, конформно отображаемой на исходную. В силу этого для получения аналитических выражений для компонентов тензора напряжений в матрице необходимо преодолеть определенные технические трудности.

В [4] при решении задачи об эллипсоидальном включении вычислены компоненты тензора напряжений во включении, а аналитические выражения для напряжений в матрице не получены.

В публикуемой статье, используя обобщение подхода Эшелби, данное в [5], построим новый тип интегральных уравнений рассматриваемой задачи для включения произвольной формы. В случае плоской задачи и эллиптического включения, с помощью результатов [5] получены явные аналитические выражения для компонентов тензора напряжений как во включении, так и в матрице.

2. Вывод интегральных уравнений. Обозначим $\sigma_{ij}^{\mathrm{I}A} = \lambda_I\theta^A\delta_{ij} + 2\mu_I e_{ij}^A$, $\sigma_{ij}^{MA} = \lambda_M\theta^A\delta_{ij} + 2\mu_M e_{ij}^A$, $\theta^A = \sum_{k=1}^3 e_{kk}^A$. Определим функции

$$\sigma_{ij}^A(x) = \begin{cases} \sigma_{ij}^{\mathrm{I}A}, & x \in G \\ \sigma_{ij}^{MA}, & x \notin G \end{cases}, \quad \sigma_{ij}(x) = \begin{cases} \sigma_{ij}^{\mathrm{I}}(x), & x \in G \\ \sigma_{ij}^M(x), & x \notin G \end{cases}$$

В силу (1.3) и условий сцепления (1.4), справедливо равенство

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad x \in R^3 \tag{2.1}$$

Представим $\sigma_{ij}(x)$ в виде

$$\sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij}^A(x) + \sigma_{ij}^0(x) \tag{2.2}$$

Заметим, что в силу (2.2), условий на бесконечности (1.5) и определения функции $\sigma_{ij}^A(x)$, имеем

$$\lim_{x\to\infty} \sigma_{ij}^0(x) = 0 \tag{2.3}$$

Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть

$$\chi(x) = \begin{cases} \chi_1, & x \in G \\ \chi_2, & x \notin G \end{cases}$$

где χ_1, χ_2 – постоянные.

Справедливо равенство

$$\chi_{,j} = -(\chi_1 - \chi_2) n_j(x')\delta(\partial G) \tag{2.4}$$

где $\delta(\partial G)$ – дельта-функция, сосредоточенная на ∂G.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^3)$ – основная функция. По определению производной от обобщенной функции, имеем

$$\begin{aligned}(\chi_{,j}, \varphi) &= -(\chi, \varphi_{,j}) = -\chi_1 \int_G \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx - \chi_2 \int_{R^3 \setminus G} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\chi_1 \int_{\partial G} \varphi(x') n_j(x') dS - \\ &- \chi_2 \int_{\partial G} \varphi(x') \nu_j(x') dS = -(\chi_1 - \chi_2) \int_{\partial G} \varphi(x') n_j(x') dS\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $\mathbf{v}(x') = (\nu_1(x'), \nu_2(x'), \nu_3(x'))$ – единичный вектор нормали к ∂G, внешней по отношению к области $R^3 \setminus G$, то есть $\mathbf{v}(x') = -\mathbf{n}(x')$.

Равенство (2.5) как раз и означает справедливость равенства (2.4). Из уравнений (2.1), представления (2.2) и равенства (2.4) следует

$$\begin{aligned}&\sigma^0_{ij,j} - (t_i^{IA} - t_i^{MA})\delta(\partial G) = 0 \\ &t_i^{IA}(x') = \sigma_{ij}^{IA} n_j(x'), \quad t_i^{MA}(x') = \sigma_{ij}^{MA} n_j(x')\end{aligned} \tag{2.6}$$

Обозначим деформации, соответствующие напряжениям σ^0_{ij}, через e^0_{ij}. В силу закона Гука (1.2), имеем

$$e^0_{ij}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\mu_I}\left[\sigma^0_{ij}(x) - \dfrac{\nu_I}{1+\nu_I}\Theta^0(x)\delta_{ij}\right], & x \in G \\ \dfrac{1}{2\mu_M}\left[\sigma^0_{ij}(x) - \dfrac{\nu_M}{1+\nu_M}\Theta^0(x)\delta_{ij}\right], & x \notin G \end{cases} \tag{2.7}$$

Здесь $\Theta^0(x) = \sum_{k=1}^3 \sigma^0_{kk}(x)$, ν_I и ν_M – коэффициенты Пуассона материалов включения и матрицы соответственно.

Обозначим перемещения, отвечающие деформациям $e^0_{ij}(x)$, через $\mathbf{u}^0(x) = (u^0_1(x), u^0_2(x), u^0_3(x))$. Следовательно

$$e^0_{ij}(x) = \frac{1}{2}(u^0_{i,j}(x) + u^0_{j,i}(x)) \tag{2.8}$$

Аналогично Эшелби [4] заменим исходную задачу для кусочно-однородного тела задачей для однородного пространства, в области G которого происходят фазовые превращения. Примем, что материал всего пространства имеет модули упругости λ_M и μ_M и коэффициент Пуассона ν_M. В этом случае полные деформации $e^0_{ij}(x)$ складываются из силовых деформаций $e^F_{ij}(x)$, связанных с напряжениями $\sigma^0_{ij}(x)$ законом Гука с упругими постоянными λ_M, μ_M и коэффициентом Пуассона ν_M, и деформаций, определяемых фазовыми превращениями $e^P_{ij}(x)$. Таким образом

$$e^0_{ij}(x) = e^F_{ij}(x) + e^P_{ij}(x) \tag{2.9}$$

$$e^F_{ij}(x) = \frac{1}{2\mu_M}\left[\sigma^0_{ij}(x) - \frac{\nu_M}{1+\nu_M}\Theta^0(x)\delta_{ij}\right], \quad x \in R^3 \tag{2.10}$$

Из (2.7), (2.9) и (2.10) следует

$$\begin{gathered} e^P_{ij}(x) = 0, \quad x \notin G \\ e^P_{ij}(x) = \frac{1}{2\mu_I}\left[\sigma^0_{ij}(x) - \frac{\nu_I}{1+\nu_I}\Theta^0(x)\delta_{ij}\right] - \frac{1}{2\mu_M}\left[\sigma^0_{ij}(x) - \frac{\nu_M}{1+\nu_M}\Theta^0(x)\delta_{ij}\right], \quad x \in G \end{gathered} \tag{2.11}$$

Обозначим через $\sigma^P_{ij}(x)$ тензор, связанный с тензором $e^P_{ij}(x)$ законом Гука с постоянными λ_M и μ_M:

$$\sigma^P_{ij}(x) = \lambda_M\theta^P(x)\delta_{ij} + 2\mu_M e^P_{ij}(x), \quad \theta^P(x) = \sum_{k=1}^{3} e^P_{kk}(x) \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) следует, что тензор $\sigma^P_{ij}(x)$ связан с тензором $\sigma^0_{ij}(x)$ следующим образом

$$\begin{gathered} \sigma^P_{ij}(x) = 0, \quad x \notin G \\ \sigma^P_{ij}(x) = \frac{\mu_M}{\mu_I}\sigma^0_{ij}(x) + \frac{\mu_M(\nu_M - \nu_I)}{\mu_I(1+\nu_I)(1-2\nu_M)}\Theta^0(x)\delta_{ij} - \sigma^0_{ij}(x), \quad x \in G \end{gathered} \tag{2.13}$$

Определим также тензор $\sigma^d_{ij}(x)$, связанный с тензором $e^0_{ij}(x)$ законом Гука с упругими постоянными λ_M и μ_M, и назовем его тензором фиктивных напряжений

$$\sigma^d_{ij}(x) = \lambda_M\theta^0(x)\delta_{ij} + 2\mu_M e^0_{ij}(x), \quad \theta^0(x) = \sum_{k=1}^{3} e^0_{kk}(x)$$

Из (2.7) следует, что это равенство может быть переписано в виде

$$\begin{gathered} \sigma^d_{ij}(x) = \sigma^0_{ij}(x), \quad x \notin G \\ \sigma^d_{ij}(x) = \frac{\mu_M}{\mu_I}\sigma^0_{ij}(x) + \frac{\mu_M(\nu_M - \nu_I)}{\mu_I(1+\nu_I)(1-2\nu_M)}\Theta^0(x)\delta_{ij}, \quad x \in G \end{gathered} \tag{2.14}$$

Из (2.13) и (2.14), имеем

$$\sigma^0_{ij}(x) = \sigma^d_{ij}(x) - \sigma^P_{ij}(x) \tag{2.15}$$

Подставив (2.15) в (2.6), получим

$$\sigma^{d}_{ij,j}-\sigma^{P}_{ij,j}-(t^{IA}_{i}-t^{MA}_{i})\delta(\partial G) = 0 \tag{2.16}$$

Заметим, что для $\varphi(x)\in C^{\infty}_{0}(R^3)$:

$$(\sigma^{P}_{ij,j},\varphi)=-(\sigma^{P}_{ij},\varphi_{,j})=-\int\limits_{G}\sigma^{p}_{ij}(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}dx=-\int\limits_{G}\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma^{P}_{ij}(x)\varphi(x))dx+\int\limits_{G}\sigma^{P}_{ij,j}(x)\varphi(x)dx=$$
$$=\int\limits_{G}\sigma^{P}_{ij,j}(x)\varphi(x)dx-\int\limits_{\partial G}\sigma^{P}_{ij}(x')n_j(x')\varphi(x')dS \tag{2.17}$$

Из равенства (2.17) следует, что

$$\begin{aligned}
&\sigma^{P}_{ij,j}(x) = \overset{*}{\sigma}{}^{P}_{ij,j}(x)-t^{P}_{i}(x')\delta(\partial G)\\
&t^{P}_{i}(x') = \sigma^{P}_{ij}(x')n_j(x'),\quad x'\in\partial G\\
&\overset{*}{\sigma}{}^{P}_{ij,j}(x) = \begin{cases}\sigma^{P}_{ij,j}(x), & \text{при}\quad x\in G\\ 0, & \text{при}\quad x\notin G\end{cases}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Подставив (2.18) в (2.16), получим

$$\sigma^{d}_{ij,j}(x)-\overset{*}{\sigma}{}^{P}_{ij,j}(x)+t^{P}_{i}(x')\delta(\partial G)+(t^{MA}_{i}-t^{IA}_{i})\delta(\partial G) = 0 \tag{2.19}$$

Поскольку, согласно определению, тензор $\sigma^{d}_{ij}(x)$ связан с тензором $\overset{0}{e}_{ij}(x)$ законом Гука с упругими постоянными λ_M и μ_M, а тензор $\overset{0}{e}_{ij}(x)$ выражается через вектор-функцию $\mathbf{u}^0(x)$ в соответствии с (2.8), фиктивные напряжения выражаются через $\mathbf{u}^0(x)$:

$$\sigma^{d}_{ij}(x) = \lambda_M\theta^0(x)\delta_{ij}+\mu_M(\overset{0}{u}_{i,j}(x)+\overset{0}{u}_{j,i}(x)) \tag{2.20}$$

Подставив (2.20) в (2.19), получим систему уравнений

$$\mu_M\Delta u^0_i(x)+(\lambda_M+\mu_M)\theta^0_{,i}(x)-\overset{*}{\sigma}{}^{P}_{ij,j}(x)+t^{P}_{i}(x')\delta(\partial G)+(t^{MA}_{i}-t^{IA}_{i})\delta(\partial G) = 0 \tag{2.21}$$

Уравнения (2.21) являются обычными уравнениями Ламе во всем пространстве с объемными силами

$$F_i(x) = -\overset{*}{\sigma}{}^{P}_{ij,j}(x)+t^{P}_{i}(x')\delta(\partial G)+(t^{MA}_{i}-t^{IA}_{i})\delta(\partial G)$$

В силу условий (2.3) и соотношений (2.7), имеем

$$\lim_{x\to\infty}\overset{0}{e}_{ij}(x) = 0 \tag{2.22}$$

Учитывая (2.22), можно принять

$$\lim_{x\to\infty}u^0_i(x) = 0 \tag{2.23}$$

В случае, когда внутри включения реализуется однородное напряженное состояние ($\overset{0}{\sigma}_{ij}(x)=\mathrm{const}$, $x\in G$), из (2.13) следует, что функции $\sigma^{P}_{ij}(x)$ также постоянны внутри G.

В силу этого уравнения (2.21) принимают вид

$$\mu_M \Delta u_i^0(x) + (\lambda_M + \mu_M)\theta_{,i}^0(x) + t_i^P(x')\delta(\partial G) + (t_i^{MA} - t_i^{IA})\delta(\partial G) = 0 \tag{2.24}$$

В общем случае уравнения (2.21) приводятся к системе интегральных уравнений. Обозначим через $T_{ij}^k(x)$ напряжения в упругом пространстве с постоянными Ламе λ_M, μ_M и коэффициентом Пуассона ν_M, отвечающие действию сосредоточенной силы, приложенной в начале координат и направлений вдоль оси x_k, то есть

$$T_{ij,j}^k(x) + \delta_{ik}\delta(x) = 0 \tag{2.25}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция.

Из (2.21) и (2.25) следует

$$\sigma_{ij}^d(x) = -\int_G T_{ij}^k(x-y)\sigma_{km,m}^P(y)dy + \int_{\partial G} T_{ij}^k(x-y')t_k^P(y')dS + \int_{\partial G} T_{ij}^k(x-y')(t_k^{MA}(y') - t_k^{IA}(y'))dS \tag{2.26}$$

Перепишем уравнения (2.26) в несколько иной форме. Заметим, что

$$\int_G T_{ij}^k(x-y)\sigma_{km,m}^P(y)dy = \int_G (T_{ij}^k(x-y)\sigma_{km}^P(y))_{,m}dy - \int_G \frac{\partial T_{ij}^k(x-y)}{\partial y_m}\sigma_{km}^P(y)dy =$$
$$= \int_{\partial G} T_{ij}^k(x-y')\sigma_{km}^P(y')n_m(y')dS + \int_G \frac{\partial T_{ij}^k(x-y)}{\partial x_m}\sigma_{km}^P(y)dy = \tag{2.27}$$
$$= \int_{\partial G} T_{ij}^k(x-y')t_k^P(y')dS + \int_G \frac{\partial T_{ij}^k(x-y)}{\partial x_m}\sigma_{km}^P(y)dy$$

Из (2.26) и (2.27) следует

$$\sigma_{ij}^d(x) = -\int_G \frac{\partial T_{ij}^k(x-y)}{\partial x_m}\sigma_{km}^P(y)dy + \int_{\partial G} T_{ij}^k(x-y')(t_k^{MA}(y') - t_k^{IA}(y'))dS \tag{2.28}$$

Воспользовавшись тем, что внутри области G напряжения $\sigma_{ij}^P(x)$ и $\sigma_{ij}^d(x)$ выражаются через напряжения $\sigma_{ij}^0(x)$ в соответствии с (2.13), (2.14), получим

$$\frac{\mu_M}{\mu_I}\sigma_{ij}^0(x) + \frac{\mu_M(\nu_M - \nu_I)}{\mu_I(1+\nu_I)(1-2\nu_M)}\Theta^0(x)\delta_{ij} = -\int_G \frac{\partial T_{ij}^k(x-y)}{\partial x_m} \times$$
$$\times\left(\frac{\mu_M}{\mu_I}\sigma_{km}^0(y) + \frac{\mu_M(\nu_M - \nu_I)}{\mu_I(1+\nu_I)(1-2\nu_M)}\Theta^0(y)\delta_{km} - \sigma_{km}^0(y)\right)dy + \tag{2.29}$$
$$+ \int_{\partial G} T_{ij}^k(x-y')(t_k^{MA}(y') - t_k^{IA}(y'))dS, \quad x \in G$$

Решая уравнения (2.29), находим напряжения $\sigma_{ij}^{0}(x)$ внутри G. После этого по формуле (2.13) находим $\sigma_{ij}^{P}(x)$ внутри G. Далее, подставляя найденные функции $\sigma_{ij}^{P}(x)$ в правую часть равенства (2.28) и беря $x \notin G$, находим $\sigma_{ij}^{d}(x)$ вне G. С учетом того, что $\sigma_{ij}^{d}(x) = \sigma_{ij}^{0}(x)$ вне G (см. (2.14)) задача оказывается полностью решенной.

3. Аналитическое решение задачи о включении в виде эллиптического цилиндра. Предположим, что область G является эллиптическим цилиндром, ось которого совпадает с осью x_3. Сечение G плоскостью, перпендикулярной оси x_3, обозначим через D. По предположению область D является эллипсом $D = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 \le 1\}$.

Положим также, что среди заданных на бесконечности деформаций e_{ij}^{A} отличными от нуля являются только деформации e_{11}^{A}, e_{12}^{A} и e_{22}^{A}. В этом случае реализуются условия плоской деформации. Кроме того, как известно, напряжения внутри включения оказываются однородными [3, 4]. Таким образом, справедливы уравнения (2.24), которые в плоском случае принимают вид

$$\begin{gathered}\mu_M \Delta u_i^0(x) + (\lambda_M + \mu_M)\theta_{,i}^0(x) + t_i^P(x')\delta(\partial D) + (t_i^{MA}(x') - t_i^{IA}(x'))\delta(\partial D) = 0 \\ x = (x_1, x_2), \quad x' = (x_1', x_2') \in \partial D \quad (i = 1, 2)\end{gathered} \tag{3.1}$$

Согласно результатам [5] (формула (4.1)) выражения для фиктивных напряжений внутри включения имеют вид

$$\sigma_{11}^{d} = -\frac{1}{2(1-\nu_M)}\frac{1}{(a_1+a_2)}\left\{(\sigma_{11}^{P} + \sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA})a_2\left[-2(1-\nu_M) - \frac{a_1}{a_1+a_2}\right] + \right.$$

$$\left. + (\sigma_{22}^{P} + \sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA})a_1\left(\frac{a_2}{a_1+a_2} - 2\nu_M\right)\right\}$$

$$\sigma_{12}^{d} = \frac{\sigma_{12}^{P} + \sigma_{12}^{MA} - \sigma_{12}^{IA}}{2(1-\nu_M)}\left\{1 - 2\nu_M + \frac{a_1^2 + a_2^2}{(a_1+a_2)^2}\right\} \tag{3.2}$$

$$\sigma_{22}^{d} = -\frac{1}{2(1-\nu_M)}\frac{1}{(a_1+a_2)}\left\{(\sigma_{11}^{P} + \sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA})a_2\left(\frac{a_1}{a_1+a_2} - 2\nu_M\right) + \right.$$

$$\left. + (\sigma_{22}^{P} + \sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA})a_1\left[-2(1-\nu_M) - \frac{a_2}{a_1+a_2}\right]\right\}$$

Подставим выражения (2.13), (2.14) во второе из равенств (3.2). В результате получим

$$\frac{\mu_M}{\mu_I}\sigma_{12}^{0} = \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I}\sigma_{12}^{0}\frac{1}{2(1-\nu_M)} \times$$

$$\times \frac{[(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2]}{(a_1+a_2)^2} + \frac{(\sigma_{12}^{MA} - \sigma_{12}^{IA})}{2(1-\nu_M)}\frac{[(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2]}{(a_1+a_2)^2}$$

Отсюда находим величину σ_{12}^0 внутри включения

$$\sigma_{12}^0 = \frac{\mu_I(\sigma_{12}^{MA} - \sigma_{12}^{IA})[(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2]}{2\mu_M a_1 a_2 + \mu_I[(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2]} \qquad (3.3)$$

Для получения выражений для σ_{11}^0 и σ_{22}^0 необходимо решить систему уравнений, следующих из первого и третьего уравнений (3.2). Подставив в первое из уравнений (3.2) выражения (2.13), (2.14), и учитывая, что при плоской деформации внутри включения $\Theta^0 = (1+\nu_I)(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0)$, получим

$$\frac{\mu_M}{\mu_I}\sigma_{11}^0 + \frac{\mu_M(\nu_M - \nu_I)}{\mu_I(1-2\nu_M)}(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0) =$$

$$= -\frac{1}{2(1-\nu_M)}\frac{1}{(a_1+a_2)}\left\{\left[\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I}\sigma_{11}^0 + \frac{\mu_M(\nu_M-\nu_I)}{\mu_I(1-2\nu_M)}(\sigma_{11}^0+\sigma_{22}^0)\right]\times\right.$$

$$\left.\times a_2\left[-2(1-\nu_M) - \frac{a_1}{a_1+a_2}\right] + \left[\frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_I}\sigma_{22}^0 + \frac{\mu_M(\nu_M-\nu_I)}{\mu_I(1-2\nu_M)}(\sigma_{11}^0+\sigma_{22}^0)\right]a_1\left(\frac{a_2}{a_1+a_2} - 2\nu_M\right)\right\} -$$

$$-\frac{1}{2(1-\nu_M)}\frac{1}{(a_1+a_2)}\left\{(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA})a_2\left[-2(1-\nu_M) - \frac{a_1}{a_1+a_2}\right] + (\sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA})a_1\left(\frac{a_2}{a_1+a_2} - 2\nu_M\right)\right\}$$

Собирая коэффициенты при σ_{11}^0 и σ_{22}^0, получим

$$\frac{2a_1\mu_M(1-\nu_1) + 2a_2\mu_I(1-\nu_M) - (\mu_M-\mu_I)\dfrac{a_1a_2}{a_1+a_2}}{2\mu_I(1-\nu_M)(a_1+a_2)}\sigma_{11}^0 +$$

$$+\frac{2a_1(\mu_I\nu_M - \mu_M\nu_I) + (\mu_M-\mu_I)\dfrac{a_1a_2}{a_1+a_2}}{2\mu_I(1-\nu_M)(a_1+a_2)}\sigma_{22}^0 = -\frac{1}{2(1-\nu_M)}\frac{1}{(a_1+a_2)}\times$$

$$\times\left\{(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA})a_2\left[-2(1-\nu_M) - \frac{a_1}{a_1+a_2}\right] + (\sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA})a_1\left(\frac{a_2}{a_1+a_2} - 2\nu_M\right)\right\}$$

После очевидных упрощений приходим к равенству

$$\left\{2a_1\mu_M(1-\nu_I) + 2a_2\mu_I(1-\nu_M) - (\mu_M-\mu_I)\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\right\}\sigma_{11}^0 + \left\{2a_1(\mu_I\nu_M - \mu_M\nu_I) +\right.$$

$$\left. + (\mu_M-\mu_I)\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\right\}\sigma_{22}^0 = \mu_I\left\{(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA})a_2\left[2(1-\nu_M) + \frac{a_1}{a_1+a_2}\right] + \right. \qquad (3.4)$$

$$\left. + (\sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA})a_1\left(2\nu_M - \frac{a_2}{a_1+a_2}\right)\right\}$$

Аналогичным образом из третьего из уравнений (3.2) получим

$$\left\{2a_2(\mu_I\nu_M-\mu_M\nu_I)+(\mu_M-\mu_I)\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\right\}\sigma_{11}^0+\left\{2a_2\mu_M(1-\nu_I)+2a_1\mu_I(1-\nu_M)-\right.$$

$$\left.-(\mu_M-\mu_I)\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\right\}\sigma_{22}^0=\mu_I\left\{(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{11}^{IA})a_2\left(2\nu_M-\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)+\right. \qquad (3.5)$$

$$\left.+(\sigma_{22}^{MA}-\sigma_{22}^{IA})a_1\left[2(1-\nu_M)+\frac{a_1}{a_1+a_2}\right]\right\}$$

Решая систему уравнений (3.4), (3.5) относительно σ_{11}^0, σ_{22}^0, находим их величины внутри эллипса D. Для сокращения записи введем некоторые обозначения:

$$T=a_1\mu_M+a_2\mu_I,\quad S=a_1\mu_I+a_2\mu_M$$

$$L_{211}=a_2(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{11}^{IA}),\quad L_{122}=a_1(\sigma_{22}^{MA}-\sigma_{22}^{IA})$$

$$R_0=-TS-\mu_I(a_1T+a_2S)(1-2\nu_M)+\mu_M\nu_I(a_1S+a_2T)+(a_1+a_2)^2\mu_M\mu_I\nu_I(1-2\nu_M)$$

$$R_1=\mu_I\{-2(1-\nu_M)SL_{211}-a_1\mu_I(1-2\nu_M)(L_{211}+L_{122})+(1-2\nu_M)SL_{122}+$$
$$+\mu_M\nu_I[a_2+(a_1+a_2)(1-2\nu_M)]L_{211}-\mu_M\nu_I[a_1+(a_1+a_2)(1-2\nu_M)]L_{122}\}$$

$$R_2=\mu_I\{-2(1-\nu_M)TL_{122}-a_2\mu_I(1-2\nu_M)(L_{211}+L_{122})+(1-2\nu_M)TL_{211}-$$
$$-\mu_M\nu_I[a_2+(a_1+a_2)(1-2\nu_M)]L_{211}+\mu_M\nu_I[a_1+(a_1+a_2)(1-2\nu_M)]L_{122}\}$$

С учетом введенных обозначений напряжения σ_{11}^0 и σ_{22}^0 внутри эллипса, определяемые из уравнений (3.4), (3.5), записываются в виде

$$\sigma_{11}^0=R_1/R_0,\quad \sigma_{22}^0=R_2/R_0 \qquad (3.6)$$

Из (2.13) и (3.6) следует, что внутри эллипса

$$\sigma_{ij}^P=\frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_I}\sigma_{ij}^0+\frac{\mu_M(\nu_M-\nu_I)}{\mu_I(1-2\nu_M)}(\sigma_{11}^0+\sigma_{22}^0)\delta_{ij}=\frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_I}\sigma_{ij}^0+$$

$$+\frac{\mu_M(\nu_M-\nu_I)}{\mu_I(1-2\nu_M)}\frac{(R_1+R_2)}{R_0}\delta_{ij}=\frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_I}\sigma_{ij}^0+\frac{\mu_M(\nu_M-\nu_I)}{1-2\nu_M}\frac{H}{R_0}\delta_{ij} \qquad (3.7)$$

$$H=-2(1-\nu_M)(SL_{211}+TL_{122})-\mu_I(1-2\nu_M)(a_1+a_2)(L_{211}+L_{122})+$$
$$+(1-2\nu_M)(SL_{122}+TL_{211})$$

Зная величины σ_{ij}^P внутри эллипса, можно получить выражения для фиктивных напряжений $\sigma_{ij}^d=\sigma_{ij}^0$ вне эллипса. Согласно [5] (формула (4.2)), и с учетом уравнений (3.1), имеем вне эллипса

$$\sigma_{11}^0 = -\frac{1}{(1-\nu_M)}\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\frac{1}{\rho^2}\left\{(\sigma_{11}^P+\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{11}^{IA})\left[\left(2(1-\nu_M)+\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta))-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))\right]+(\sigma_{12}^P+\sigma_{12}^{MA}-\sigma_{12}^{IA})\frac{4a_1}{a_1+a_2}\left[\mathrm{Im}(\Phi(\rho,\theta))-\frac{a_2}{a_1+a_2}\mathrm{Im}(\Psi(\rho,\theta))\right]+$$

$$\left.+(\sigma_{22}^P+\sigma_{22}^{MA}-\sigma_{22}^{IA})\left[-\left(2\nu_M+\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta))+\frac{2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))\right]\right\}$$

$$\sigma_{12}^0 = -\frac{1}{(1-\nu_M)}\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\frac{1}{\rho^2}\left\{(\sigma_{11}^P+\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{11}^{IA})\left[\left(1-2\nu_M+\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\mathrm{Im}(\Phi(\rho,\theta))-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\mathrm{Im}(\Psi(\rho,\theta))\right]+2(\sigma_{12}^P+\sigma_{12}^{MA}-\sigma_{12}^{IA})\left[\frac{2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))-\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\times\right.$$

$$\left.\times\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta))\right]+(\sigma_{22}^P+\sigma_{22}^{MA}-\sigma_{22}^{IA})\left[\left(1-2\nu_M-\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\times\right.\tag{3.8}$$

$$\left.\left.\times\mathrm{Im}(\Phi(\rho,\theta))+\frac{2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\mathrm{Im}(\Psi(\rho,\theta))\right]\right\}$$

$$\sigma_{22}^0 = -\frac{1}{(1-\nu_M)}\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\frac{1}{\rho^2}\left\{(\sigma_{11}^P+\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{11}^{IA})\left[\left(2\nu_M-\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta))+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))\right]+(\sigma_{12}^P+\sigma_{12}^{MA}-\sigma_{12}^{IA})\frac{4a_2}{a_1+a_2}\left[\mathrm{Im}(\Phi(\rho,\theta))+\frac{a_1}{a_1+a_2}\mathrm{Im}(\Psi(\rho,\theta))\right]+$$

$$\left.+(\sigma_{22}^P+\sigma_{22}^{MA}-\sigma_{22}^{IA})\left[\left(-2(1-\nu_M)+\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta))-\frac{2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))\right]\right\}$$

$$y_1 = \rho\cos\theta,\quad y_2 = \rho\sin\theta,\quad y_i = x_i/a_i,\quad (i=1,2),\quad \Phi(\rho,\theta) = \frac{2e^{2i\theta}}{R(1+w+R)},$$

$$w = e^{2i\theta}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)$$

причем здесь подразумевается главное значение корня

$$R = \sqrt{1-2uw+w^2},\quad \sqrt{1} = 1,\quad u = 2/\rho^2-1,$$

$$\Psi(\rho,\theta) = \frac{-2e^{4i\theta}[(w-u)(1+w+2R)+R^2]}{R^3(1+w+R)^2}$$

Напомним, что окончательные выражения для напряжений получаются следующим образом:

Внутри эллиптического включения

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{I}} = \sigma_{ij}^{0} + \sigma_{ij}^{\mathrm{I}A} \tag{3.9}$$

где σ_{ij}^{0} задаются (3.3), (3.6).

Вне эллиптического включения

$$\sigma_{ij}^{M} = \sigma_{ij}^{0} + \sigma_{ij}^{MA} \tag{3.10}$$

где σ_{ij}^{0} задаются (3.8).

Из полученного решения предельным переходом можно получить решения задач об эллиптической полости и абсолютно жестком эллиптическом включении.

Для построения решения в случае эллиптической полости рассмотрим предельный переход в полученных формулах при $\mu_I \to 0$. Прежде всего заметим, что из определения величин $\sigma_{ij}^{\mathrm{I}A}$ следует

$$\lim_{\mu_I \to 0} \sigma_{ij}^{\mathrm{I}A} = 0 \tag{3.11}$$

Из (3.7) и (3.3), имеем

$$\sigma_{12}^{P} = \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I}\sigma_{12}^{0} = (\mu_M - \mu_I)\frac{(\sigma_{12}^{MA} - \sigma_{12}^{\mathrm{I}A})[(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2]}{2\mu_M a_1 a_2 + \mu_I[(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2]}$$

Отсюда и из (3.11) в пределе при $\mu_I \to 0$, получим

$$\sigma_{12}^{P} = \frac{\sigma_{12}^{MA}[(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2]}{2a_1 a_2} \tag{3.12}$$

Введенные выше величины T, S, L_{211}, L_{122} в пределе принимают следующие значения: $T = a_1\mu_M$, $S = a_2\mu_M$, $L_{211} = a_2\sigma_{12}^{MA}$, $L_{122} = a_1\sigma_{22}^{MA}$. Подставив эти значения в выражение для R_0, получим

$$R_0 = -a_1 a_2 \mu_M^2 (1 - 2\nu_I) \tag{3.13}$$

Для величин R_1 и R_2 выпишем главные члены асимптотического разложения при $\mu_I \to 0$, получим

$$\begin{aligned} R_1 \approx \mu_I\mu_M\{&a_2\sigma_{11}^{MA}[a_1\nu_I(1-2\nu_M) - 2a_2(1-\nu_M)(1-\nu_I)] + \\ &+ a_1\sigma_{22}^{MA}[a_2(1-2\nu_M)(1-\nu_I) - 2a_1\nu_I(1-\nu_M)]\} \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} R_2 \approx \mu_I\mu_M\{&a_2\sigma_{11}^{MA}[a_1(1-2\nu_M)(1-\nu_I) - 2a_2\nu_I(1-\nu_M)] + \\ &+ a_1\sigma_{22}^{MA}[-2a_1(1-\nu_M)(1-\nu_I) + a_2\nu_I(1-2\nu_M)]\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Предельное значение H равно

$$H = \mu_M\{a_2\sigma_{11}^{MA}[a_1(1-2\nu_M)-2a_2(1-\nu_M)]+a_1\sigma_{22}^{MA}[a_2(1-2\nu_M)-2a_1(1-\nu_M)]\} \quad (3.16)$$

Из (3.6) и (3.13)–(3.15) находим главные члены асимптотического разложения величин σ_{11}^0 и σ_{22}^0 внутри эллипса при $\mu_I \to 0$:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^0 \approx &-\mu_I\{a_2\sigma_{11}^{MA}[a_1\nu_I(1-2\nu_M)-2a_2(1-\nu_M)(1-\nu_I)]+\\ &+a_1\sigma_{22}^{MA}[a_2(1-2\nu_M)(1-\nu_I)-2a_1\nu_I(1-\nu_M)]\}[a_1a_2\mu_M(1-2\nu_I)]^{-1}\end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^0 \approx &-\mu_I\{a_2\sigma_{11}^{MA}[a_1(1-2\nu_M)(1-\nu_I)-2a_2\nu_I(1-\nu_M)]+\\ &+a_1\sigma_{22}^{MA}[a_2\nu_I(1-2\nu_M)-2a_1(1-\nu_M)(1-\nu_I)]\}[a_1a_2(1-2\nu_I)\mu_M]^{-1}\end{aligned} \quad (3.18)$$

Из (3.13) и (3.16), имеем

$$\frac{H}{R_0} = -\frac{a_2\sigma_{11}^{MA}[a_1(1-2\nu_M)-2a_2(1-\nu_M)]+a_1\sigma_{22}^{MA}[a_2(1-2\nu_M)-2a_1(1-\nu_M)]}{a_1a_2\mu_M(1-2\nu_I)} \quad (3.19)$$

Из (3.7) и (3.17)–(3.19) получаем предельные значения величин σ_{11}^P и σ_{22}^p:

$$\sigma_{11}^P = -\frac{a_2\sigma_{11}^{MA}[a_1\nu_M(1-2\nu_M)-2a_2(1-\nu_M)^2]+a_1\sigma_{22}^{MA}(1-\nu_M)[a_2(1-2\nu_M)-2a_1\nu_M]}{a_1a_2(1-2\nu_M)} \quad (3.20)$$

$$\sigma_{22}^P = -\frac{a_2\sigma_{11}^{MA}(1-\nu_M)[a_1(1-2\nu_M)-2a_2\nu_M]+a_1\sigma_{22}^{MA}[a_2\nu_M(1-2\nu_M)-2a_1(1-\nu_M)^2]}{a_1a_2(1-2\nu_M)} \quad (3.21)$$

Заметим, что хотя величины σ_{11}^0 и σ_{22}^0 зависят от ν_I (см. формулы (3.17), (3.18)), предельные значения σ_{11}^P и σ_{22}^p (формулы (3.20), (3.21)), как и ожидалось, не зависят от ν_I.

Из (3.12), (3.20) и (3.21), имеем

$$\sigma_{12}^P+\sigma_{12}^{MA} = \frac{\sigma_{12}^{MA}(1-\nu_M)(a_1+a_2)^2}{a_1a_2} \quad (3.22)$$

$$\sigma_{11}^P+\sigma_{11}^{MA} = \\ = \frac{(1-\nu_M)\{a_2\sigma_{11}^{MA}[a_1(1-2\nu_M)+2a_2(1-\nu_M)]-a_1\sigma_{22}^{MA}[a_2(1-2\nu_M)-2a_1\nu_M]\}}{a_1a_2(1-2\nu_M)} \quad (3.23)$$

$$\sigma_{22}^P+\sigma_{22}^{MA} = \\ = \frac{(1-\nu_M)\{-a_2\sigma_{11}^{MA}[a_1(1-2\nu_M)-2a_2\nu_M]+a_1\sigma_{22}^{MA}[a_2(1-2\nu_M)+2a_1(1-\nu_M)]\}}{a_1a_2(1-2\nu_M)} \quad (3.24)$$

Подставив (3.11) и (3.22)–(3.24) в (3.8), получим выражения для функций $\sigma_{ij}^0(x)$, отвечающих задаче об эллиптической полости

$$\sigma_{11}^0 = -\frac{1}{(a_1+a_2)^2}\frac{1}{\rho^2}\left\{a_2\sigma_{11}^{MA}\left[(4a_1+2a_2)\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta)) - \frac{4a_1a_2}{a_1+a_2}\mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))\right] + a_1\sigma_{22}^{MA}\times\right.$$

$$\times\left[-2a_1\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta)) + \frac{4a_1a_2}{a_1+a_2}\mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))\right] +$$

$$\left. + 4a_1(a_1+a_2)\sigma_{12}^{MA}\left[\mathrm{Im}(\Phi(\rho,\theta)) - \frac{a_2}{a_1+a_2}\mathrm{Im}(\Psi(\rho,\theta))\right]\right\}$$

$$\sigma_{12}^0 = -\frac{1}{(a_1+a_2)^2}\frac{1}{\rho^2}\left\{a_2\sigma_{11}^{MA}\left[2a_1\mathrm{Im}(\Phi(\rho,\theta)) - \frac{4a_1a_2}{a_1+a_2}\mathrm{Im}(\Psi(\rho,\theta))\right] +\right.$$

$$+ a_1\sigma_{22}^{MA}\left[2a_2\mathrm{Im}(\Phi(\rho,\theta)) + \frac{4a_1a_2}{a_1+a_2}\mathrm{Im}(\Psi(\rho,\theta))\right] + \tag{3.25}$$

$$\left. + 2(a_1+a_2)\sigma_{12}^{MA}\left[\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}\mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta)) - (a_1-a_2)\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta))\right]\right\}$$

$$\sigma_{22}^0 = -\frac{1}{(a_1+a_2)^2}\frac{1}{\rho^2}\left\{a_2\sigma_{11}^{MA}\left[2a_2\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta)) + \frac{4a_1a_2}{a_1+a_2}\mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))\right] +\right.$$

$$+ a_1\sigma_{22}^{MA}\left[-(2a_1+4a_2)\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta)) - \frac{4a_1a_2}{a_1+a_2}\mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))\right] +$$

$$\left. + 4a_2(a_1+a_2)\sigma_{12}^{MA}\left[\mathrm{Im}(\Phi(\rho,\theta)) - \frac{a_1}{a_1+a_2}\mathrm{Im}(\Psi(\rho,\theta))\right]\right\}$$

Напряжения в пространстве, ослабленном полостью, имеющей форму эллиптического цилиндра, вычисляются по формуле

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^{MA} \tag{3.26}$$

где σ_{ij}^0 задаются согласно (3.25).

Особенно простой вид формулы (3.25) приобретают на границе эллиптической полости ($x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1$). Здесь $\rho = 1$, $u = 1$ и, следовательно, $R = 1 - w$.

Обозначив для краткости $(a_1 - a_2)/(a_1 + a_2) = c$, получим

$$\Phi(1,\theta) = \frac{e^{2i\theta}}{1-w} = \frac{e^{2i\theta} - c}{1 - 2c\cos 2\theta + c^2} \tag{3.27}$$

$$\Psi(1,\theta) = \frac{e^{4i\theta}}{(1-w)^2} = \frac{(e^{2i\theta} - c)^2}{(1 - 2c\cos 2\theta + c^2)^2} = \frac{e^{4i\theta} - 2ce^{2i\theta} + c^2}{(1 - 2c\cos 2\theta + c^2)^2} \tag{3.28}$$

Из (3.27) и (3.28), имеем

$$\operatorname{Re}(\Phi(1,\theta)) = \frac{\cos 2\theta - c}{1 - 2c\cos 2\theta + c^2}, \quad \operatorname{Im}(\Phi(1,\theta)) = \frac{\sin 2\theta}{1 - 2c\cos 2\theta + c^2} \tag{3.29}$$

$$\operatorname{Re}(\Psi(1,\theta)) = \frac{\cos 4\theta - 2c\cos 2\theta + c^2}{(1 - 2c\cos 2\theta + c^2)^2}, \quad \operatorname{Im}(\Psi(1,\theta)) = \frac{\sin 4\theta - 2c\sin 2\theta}{(1 - 2c\cos 2\theta + c^2)^2} \tag{3.30}$$

Подставив $\rho = 1$ и (3.29), (3.30) в (3.25), получим выражения для σ_{ij}^0 на границе эллиптической полости. Рассмотрим выражение $\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0$ на этой границе. Из (3.25), имеем

$$\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 = \frac{4}{a_1 + a_2}[(a_1\sigma_{22}^{MA} - a_2\sigma_{11}^{MA})\operatorname{Re}(\Phi(1,\theta)) - (a_1 + a_2)\sigma_{12}^{MA}\operatorname{Im}(\Phi(1,\theta))] \tag{3.31}$$

Подставив (3.29) в (3.31), получим

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 = \frac{4}{(a_1 + a_2)}\frac{1}{(1 - 2c\cos 2\theta + c^2)}\times \\ \times[(a_1\sigma_{22}^{MA} - a_2\sigma_{11}^{MA})(\cos 2\theta - c) - (a_1 + a_2)\sigma_{12}^{MA}\sin 2\theta]\end{gathered} \tag{3.32}$$

Обозначим через τ и n – касательное и нормальное направления к эллиптическому контуру в точке, соответствующей параметру θ. Поскольку, согласно краевым условиям, $\sigma_{nn} = \sigma_{\tau n} = 0$, имеет место равенство

$$\sigma_{\tau\tau} = \sigma_{\tau\tau} + \sigma_{nn} = \sigma_{11} + \sigma_{22} \tag{3.33}$$

Из (3.26) и (3.33) следует

$$\sigma_{\tau\tau} = \sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{11}^{MA} + \sigma_{22}^{MA} \tag{3.34}$$

Подставив (3.32) в (3.34), окончательно получим

$$\begin{gathered}\sigma_{\tau\tau} = \frac{1}{(a_1 + a_2)(1 - 2c\cos 2\theta + c^2)}\{\sigma_{11}^{MA}[4a_2c + (a_1 + a_2)(1 + c^2) - 2(a_1 + a_2)\cos 2\theta] + \\ + \sigma_{22}^{MA}[-4a_1c + (a_1 + a_2)(1 + c^2) + 2(a_1 + a_2)\cos 2\theta] - 4(a_1 + a_2)\sigma_{12}^{MA}\sin 2\theta\}\end{gathered} \tag{3.35}$$

Рассмотрим различные частные случаи. При всестороннем растяжении $\sigma_{11}^{MA} = \sigma_{22}^{MA} = \sigma$, $\sigma_{12}^{MA} = 0$. В результате формула (3.35) принимает вид

$$\sigma_{\tau\tau} = \frac{\sigma 2(1 - c^2)}{1 - 2c\cos 2\theta + c^2} \tag{3.36}$$

В случае растяжения вдоль оси x_2, имеем $\sigma_{22}^{MA} = \sigma$, $\sigma_{11}^{MA} = \sigma_{12}^{MA} = 0$, и формула (3.35) принимает вид

$$\sigma_{\tau\tau} = \frac{\sigma(2\cos 2\theta + 1 + c^2 - 4a_1c/(a_1 + a_2))}{1 - 2c\cos 2\theta + c^2} = \frac{\sigma(2\cos 2\theta + 1 - 2c - c^2)}{1 - 2c\cos 2\theta + c^2} \tag{3.37}$$

В случае, если растяжение осуществляется вдоль оси, образующей угол θ_0 с положительным направлением оси x_1, получим

$$\sigma_{11} = \sigma\cos^2\theta_0, \quad \sigma_{22} = \sigma\sin^2\theta_0, \quad \sigma_{12} = \sigma\sin\theta_0\cos\theta_0 \tag{3.38}$$

Подстановка (3.38) в (3.35) приводит к выражению

$$\sigma_{\tau\tau} = \frac{\sigma}{(a_1+a_2)(1-2c\cos 2\theta+c^2)}\{4a_2c\cos^2\theta_0 - 4a_1c\sin^2\theta_0 + (a_1+a_2)(1+c^2) -$$
$$-2(a_1+a_2)\cos 2\theta\cos^2\theta_0 + 2(a_1+a_2)\cos 2\theta\sin^2\theta_0 - 4(a_1+a_2)\sin 2\theta\sin\theta_0\cos\theta_0\} =$$
$$= \frac{\sigma}{(a_1+a_2)(1-2c\cos 2\theta+c^2)}\{2a_2c(1+\cos 2\theta_0) - 2a_1c(1-\cos 2\theta_0) +$$
$$+(a_1+a_2)(1+c^2) - 2(a_1+a_2)\cos 2\theta\cos 2\theta_0 - 2(a_1+a_2)\sin 2\theta\sin 2\theta_0\}$$

Отсюда окончательно получаем

$$\sigma_{\tau\tau} = \frac{\sigma(1-c^2+2c\cos 2\theta_0 - 2\cos 2(\theta-\theta_0))}{1-2c\cos 2\theta+c^2} \tag{3.39}$$

Решение задачи об эллиптической полости при различных видах нагружения хорошо известно (см., например [6–9]). Отметим, однако, что явные выражения для компонент тензора напряжений приводятся, как правило, только на границе эллиптической полости. При представлении решения внутри области в основном ограничиваются аналитической записью комплексных потенциалов. Полученные для напряжений $\sigma_{\tau\tau}$ на контуре отверстия выражения (3.36), (3.37) и (3.39) совпадают с соответствующими выражениями, приведенными в указанных выше книгах.

Проверим также наше решение на классической задаче о круговом отверстии. Пусть $a_1 = a_2 = a$, тогда $\rho = r/a$, $\theta = \varphi$, где r, φ – полярные координаты.

В этом случае формулы (3.25) принимают вид

$$\sigma_{11}^0 = -\frac{a^2}{2r^2}\{\sigma_{11}^{MA}[3\mathrm{Re}(\Phi(r,\varphi)) - \mathrm{Re}(\Psi(r,\varphi))] +$$
$$+\sigma_{22}^{MA}[-\mathrm{Re}(\Phi(r,\varphi)) + \mathrm{Re}(\Psi(r,\varphi))] + 2\sigma_{12}^{MA}[2\mathrm{Im}(\Phi(r,\varphi)) - \mathrm{Im}(\Psi(r,\varphi))]\}$$

$$\sigma_{12}^0 = -\frac{a^2}{2r^2}\{\sigma_{11}^{MA}[\mathrm{Im}(\Phi(r,\varphi)) - \mathrm{Im}(\Psi(r,\varphi))] + \tag{3.40}$$
$$+\sigma_{22}^{MA}[\mathrm{Im}(\Phi(r,\varphi)) + \mathrm{Im}(\Psi(r,\varphi))] + 2\sigma_{12}^{MA}\mathrm{Re}(\Psi(r,\varphi))\}$$

$$\sigma_{22}^0 = -\frac{a^2}{2r^2}\{\sigma_{11}^{MA}[\mathrm{Re}(\Phi(r,\varphi)) + \mathrm{Re}(\Psi(r,\varphi))] +$$
$$+\sigma_{22}^{MA}[-3\mathrm{Re}(\Phi(r,\varphi)) - \mathrm{Re}(\Psi(r,\varphi))] + 2\sigma_{12}^{MA}[2\mathrm{Im}(\Phi(r,\varphi)) + \mathrm{Im}(\Psi(r,\varphi))]\}$$

Заметим теперь, что для кругового отверстия радиуса a $u = 2a^2/r^2 - 1$, $w = 0$, $R = 1$ и потому

$$\Phi(r,\varphi) = e^{2i\varphi}, \quad \Psi(r,\varphi) = (3a^2/r^2 - 2)e^{4i\varphi} \tag{3.41}$$

Из (3.41) имеем

$$\mathrm{Re}(\Phi(r,\varphi)) = \cos 2\varphi, \quad \mathrm{Im}(\Phi(r,\varphi)) = \sin 2\varphi \tag{3.42}$$

$$\mathrm{Re}(\Psi(r,\varphi)) = (3a^2/r^2-2)\cos 4\varphi, \quad \mathrm{Im}(\Psi(r,\varphi)) = (3a^2/r^2-2)\sin 4\varphi \tag{3.43}$$

Подставив (3.42), (3.43) в (3.40), получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^0 &= -\frac{a^2}{2r^2}\left\{\sigma_{11}^{MA}\left[3\cos 2\varphi-\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right]+\sigma_{22}^{MA}\left[-\cos 2\varphi+\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right]+\right.\\
&\left.+2\sigma_{12}^{MA}\left[2\sin 2\varphi-\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\sin 4\varphi\right]\right\}\\
\sigma_{12}^0 &= -\frac{a^2}{2r^2}\left\{\sigma_{11}^{MA}\left[\sin 2\varphi-\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\sin 4\varphi\right]+\right.\\
&\left.+\sigma_{22}^{MA}\left[\sin 2\varphi+\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\sin 4\varphi\right]+2\sigma_{12}^{MA}\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right\}\\
\sigma_{22}^0 &= -\frac{a^2}{2r^2}\left\{\sigma_{11}^{MA}\left[\cos 2\varphi+\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right]+\right.\\
&\left.+\sigma_{22}^{MA}\left[-3\cos 2\varphi-\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right]+2\sigma_{12}^{MA}\left[2\sin 2\varphi+\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\sin 4\varphi\right]\right\}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Перейдем к полярным координатам. Как известно

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}+\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cos 2\varphi+\sigma_{12}\sin 2\varphi\\
\sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}-\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\cos 2\varphi-\sigma_{12}\sin 2\varphi\\
\sigma_{r\varphi} &= \sigma_{12}\cos 2\varphi-\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2}\sin 2\varphi
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Из (3.44) и (3.45), с учетом (3.26), имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA}}{2}+\frac{\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA}}{2}\cos 2\varphi+\sigma_{12}^{MA}\sin 2\varphi-\frac{a^2}{2r^2}\left\{\sigma_{11}^{MA}\left[1+\left(4-\frac{3a^2}{r^2}\right)\cos 2\varphi\right]+\right.\\
&\left.+\sigma_{22}^{MA}\left[1-\left(4-\frac{3a^2}{r^2}\right)\cos 2\varphi\right]+2\sigma_{12}^{MA}\left(4-\frac{3a^2}{r^2}\right)\sin 2\varphi\right\}\\
\sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA}}{2}-\frac{\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA}}{2}\cos 2\varphi-\sigma_{12}^{MA}\sin 2\varphi-\frac{a^2}{2r^2}\left\{\sigma_{11}^{MA}\left(-1+\frac{3a^2}{r^2}\cos 2\varphi\right)+\right.\\
&\left.+\sigma_{22}^{MA}\left(-1-\frac{3a^2}{r^2}\cos 2\varphi\right)+\sigma_{12}^{MA}\frac{6a^2}{r^2}\sin 2\varphi\right\}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{12}^{MA}\cos 2\varphi - \frac{\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA}}{2}\sin 2\varphi - \frac{a^2}{2r^2}\times$$

$$\times\left\{\sigma_{11}^{MA}\left(2-\frac{3a^2}{r^2}\right)\sin 2\varphi - \sigma_{22}^{MA}\left(2-\frac{3a^2}{r^2}\right)\sin 2\varphi - 2\sigma_{12}^{MA}\left(2-\frac{3a^2}{r^2}\right)\cos 2\varphi\right\}$$

Рассмотрим формулы (3.46) в различных частных случаях. Всестороннее растяжение ($\sigma_{11}^{MA} = \sigma_{22}^{MA} = \sigma$, $\sigma_{12}^{MA} = 0$). В этих условиях формулы (3.46) принимают вид

$$\sigma_{rr} = \sigma\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right),\quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right),\quad \sigma_{r\varphi} = 0 \tag{3.47}$$

Растяжение в направлении оси x_1 ($\sigma_{11}^{MA} = \sigma$, $\sigma_{22}^{MA} = \sigma_{12}^{MA} = 0$). В этом случае формула (3.46) приводится к виду

$$\begin{gathered}\sigma_{rr} = \frac{\sigma}{2}\left[\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\left(1-\frac{4a^2}{r^2}+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\right]\\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma}{2}\left[\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\right],\quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\sigma}{2}\left(1+\frac{2a^2}{r^2}-\frac{3a^4}{r^4}\right)\sin 2\varphi\end{gathered} \tag{3.48}$$

Сдвиг ($\sigma_{12}^{MA} = \sigma$, $\sigma_{11}^{MA} = \sigma_{22}^{MA} = 0$). Формулы (3.46) имеют вид

$$\begin{gathered}\sigma_{rr} = \sigma\left(1-\frac{4a^2}{r^2}+\frac{3a^4}{r^4}\right)\sin 2\varphi\\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\sigma\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\sin 2\varphi,\quad \sigma_{r\varphi} = \sigma\left(1+\frac{2a^2}{r^2}-\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\end{gathered} \tag{3.49}$$

Формулы (3.47)–(3.49) совпадают с решениями, представленными, например, в [6–10].

Для получения решения задачи об абсолютно жестком эллиптическом включении в формулах (3.8) следует перейти к пределу при $\mu_I \to \infty$. Из определения величин σ_{12}^{MA} и σ_{12}^{IA} следует

$$\sigma_{12}^{IA} = \frac{\mu_I}{\mu_M}\sigma_{12}^{MA} \tag{3.50}$$

Из (3.7) и (3.50), имеем

$$\sigma_{12}^{P}+\sigma_{12}^{MA}-\sigma_{12}^{IA} = \frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_I}\sigma_{12}^{0}+\frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_M}\sigma_{12}^{MA} = \frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_I\mu_M}(\mu_M\sigma_{12}^{0}+\mu_I\sigma_{12}^{MA}) \tag{3.51}$$

Подставив в (3.51) формулу (3.3) и воспользовавшись (3.50), получим

$$\sigma_{12}^{P}+\sigma_{12}^{MA}-\sigma_{12}^{IA} = \frac{(\mu_M-\mu_I)\sigma_{12}^{MA}(a_1+a_2)^2 2(1-\nu_M)}{2\mu_M a_1 a_2+\mu_I[(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2+a_1^2+a_2^2]}$$

Отсюда следует

$$\lim_{\mu_I \to \infty} (\sigma_{12}^P + \sigma_{12}^{MA} - \sigma_{12}^{IA}) = -\frac{2(1-\nu_M)(a_1+a_2)^2 \sigma_{12}^{MA}}{(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2} \tag{3.52}$$

Из (3.7), имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^P + \sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA} &= \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_I}\sigma_{11}^0 + \frac{\mu_M(\nu_M - \nu_I)}{1-2\nu_M}\frac{H}{R_0} + \sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA} = \\ &= \frac{\mu_M}{\mu_I}\sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^{MA} + \frac{\mu_M(\nu_M - \nu_I)}{1-2\nu_M}\frac{H}{R_0} - (\sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^{IA})\end{aligned} \tag{3.53}$$

Из определения величин S, T, L_{211}, L_{122}, R_0 и H следует, что при $\mu_I \to \infty$:

$$\begin{aligned}&S \approx a_1\mu_I, \quad T \approx a_2\mu_I, \quad L_{211} \approx -a_2\sigma_{11}^{IA}, \quad L_{122} \approx -a_1\sigma_{22}^{IA} \\ &R_0 \approx -a_1a_2(3-4\nu_M)\mu_I^2, \quad H \approx a_1a_2(3-4\nu_M)\mu_I(\sigma_{11}^{IA} + \sigma_{22}^{IA})\end{aligned} \tag{3.54}$$

Поскольку

$$\sigma_{11}^{IA} + \sigma_{22}^{IA} = \frac{2\mu_I}{1-2\nu_I}\theta^A, \quad \sigma_{11}^{MA} + \sigma_{22}^{MA} = \frac{2\mu_M}{1-2\nu_M}\theta^A$$

имеем

$$\sigma_{11}^{IA} + \sigma_{22}^{IA} = \frac{\mu_I}{\mu_M}\frac{(1-2\nu_M)}{(1-2\nu_I)}(\sigma_{11}^{MA} + \sigma_{22}^{MA}) \tag{3.55}$$

Из (3.54) и (3.55), получаем

$$\lim_{\mu_I \to \infty} \frac{\mu_M(\nu_M - \nu_I)}{1-2\nu_M}\frac{H}{R_0} = -\frac{(\nu_M - \nu_I)}{1-2\nu_I}(\sigma_{11}^{MA} + \sigma_{22}^{MA}) \tag{3.56}$$

Согласно (3.6) и (3.54), имеем

$$\sigma_{11}^0 = R_1/R_0 \approx -\sigma_{11}^{IA} \tag{3.57}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{IA} &= \lambda_I\theta^A + 2\mu_I e_{11}^A = \frac{2\mu_I\nu_I}{1-2\nu_I}\theta^A + 2\mu_I e_{11}^A = 2\mu_I\left\{\frac{\nu_I}{(1-2\nu_I)}\frac{(1-2\nu_M)}{2\mu_M}\times\right. \\ &\left.\times(\sigma_{11}^{MA} + \sigma_{22}^{MA}) + \frac{1}{2\mu_M}[(1-\nu_M)\sigma_{11}^{MA} - \nu_M\sigma_{22}^{MA}]\right\}\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\sigma_{11}^{IA} = \frac{\mu_I}{\mu_M}\frac{1}{(1-2\nu_I)}\{(1-\nu_I-\nu_M)\sigma_{11}^{MA} + (\nu_I - \nu_M)\sigma_{22}^{MA}\} \tag{3.58}$$

Из (3.57) и (3.58), имеем

$$\lim_{\mu_I \to \infty} \frac{\mu_M}{\mu_I}\sigma_{11}^0 = -\frac{1}{(1-2\nu_I)}\{(1-\nu_I-\nu_M)\sigma_{11}^{MA} + (\nu_I - \nu_M)\sigma_{22}^{MA}\} \tag{3.59}$$

Подставив (3.56) и (3.59) в (3.53), получим

$$\lim_{\mu_I\to\infty}(\sigma_{11}^{P}+\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{11}^{IA}) = -\lim_{\mu_I\to\infty}(\sigma_{11}^{0}+\sigma_{11}^{IA}) \tag{3.60}$$

Из (3.57) видно, что главный член разложения $(\sigma_{11}^{0}+\sigma_{11}^{IA})$ при $\mu_I\to\infty$ сокращается и нужно искать следующий член разложения. Из (3.6) следует, что

$$(\sigma_{11}^{0}+\sigma_{11}^{IA}) = \frac{R_1+\sigma_{11}^{IA}R_0}{R_0} \tag{3.61}$$

Подставив в числитель дроби в (3.61) выражения для R_1 и R_0 и сохранив главные не сокращающиеся члены при $\mu_I\to\infty$, получим

$$\begin{gathered}R_1+\sigma_{11}^{IA}R_0\approx\mu_I\{-a_1a_2\mu_I(3-4\nu_M)\sigma_{11}^{MA}+\mu_M\sigma_{11}^{IA}[-2(1-\nu_M)a_1^2+\\+\nu_I(a_1^2+a_1(a_1+a_2)(1-2\nu_M))]+\mu_M\sigma_{22}^{IA}[-a_1a_2(1-2\nu_M)+\nu_I(a_1^2+a_1(a_1+a_2)(1-2\nu_M))]\}\end{gathered} \tag{3.62}$$

Аналогично (3.58), имеем

$$\sigma_{22}^{IA} = \frac{\mu_I}{\mu_M}\frac{1}{(1-2\nu_I)}\{(\nu_I-\nu_M)\sigma_{11}^{MA}+(1-\nu_I-\nu_M)\sigma_{22}^{MA}\} \tag{3.63}$$

Подставим (3.58) и (3.63) в (3.62). В результате получим

$$\begin{gathered}R_1+\sigma_{11}^{IA}R_0\approx\mu_I^2\{-a_1a_2(3-4\nu_M)\sigma_{11}^{MA}+[-2(1-\nu_M)^2a_1^2+\\+a_1a_2\nu_M(1-2\nu_M)]\sigma_{11}^{MA}+[2(1-\nu_M)\nu_Ma_1^2-a_1a_2(1-2\nu_M)(1-\nu_M)]\sigma_{22}^{MA}\}\end{gathered}$$

После упрощений имеем

$$\begin{gathered}R_1+\sigma_{11}^{IA}R_0\approx\mu_I^2(1-\nu_M)\times\\\times\{[-2(1-\nu_M)a_1^2+(2\nu_M-3)a_1a_2]\sigma_{11}^{MA}+[2\nu_Ma_1^2-(1-2\nu_M)a_1a_2]\sigma_{22}^{MA}\}\end{gathered} \tag{3.64}$$

Из (3.60), (3.61), (3.54) и (3.64) следует

$$\begin{gathered}\lim_{\mu_I\to\infty}(\sigma_{11}^{P}+\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{11}^{IA}) = (1-\nu_M)\{[-2(1-\nu_M)a_1^2+(2\nu_M-3)a_1a_2]\sigma_{11}^{MA}+\\+[2\nu_Ma_1^2-(1-2\nu_M)a_1a_2]\sigma_{22}^{MA}\}/\{a_1a_2(3-4\nu_M)\}\end{gathered} \tag{3.65}$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{gathered}\lim_{\mu_I\to\infty}(\sigma_{22}^{P}+\sigma_{22}^{MA}-\sigma_{22}^{IA}) = (1-\nu_M)\{[2\nu_Ma_2^2-(1-2\nu_M)a_1a_2]\sigma_{11}^{MA}+\\+[(2\nu_M-3)a_1a_2-2(1-\nu_M)a_2^2]\sigma_{22}^{MA}\}/\{a_1a_2(3-4\nu_M)\}\end{gathered} \tag{3.66}$$

Подставив (3.52), (3.65) и (3.66) в (3.8), получим для абсолютно жесткого эллиптического включения

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^{0} = \frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{\sigma_{11}^{MA}}{a_1a_2(3-4\nu_M)}\{[2(1-\nu_M)(2\nu_M-3)a_1^2-4(2\nu_M^2-2\nu_M+1)a_1a_2+\right.\\\left.+2\nu_M(1-2\nu_M)a_2^2]\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta))+\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)}[(1-\nu_M)a_1+\nu_Ma_2]\mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))\right\}+\end{gathered}$$

$$+\frac{\sigma_{22}^{MA}}{a_1a_2(3-4\nu_M)}\{[-2\nu_M(2\nu_M-3)a_1^2+8\nu_M(1-\nu_M)a_1a_2-2(1-\nu_M)(1-2\nu_M)a_2^2]\times$$

$$\left.\times\operatorname{Re}(\Phi(\rho,\theta))-\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)}[\nu_Ma_1+(1-\nu_M)a_2]\operatorname{Re}(\Psi(\rho,\theta))\right\}-$$

$$\left.-\frac{8a_1(a_1+a_2)\sigma_{12}^{MA}}{(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2+a_1^2+a_2^2}\left[\operatorname{Im}(\Phi(\rho,\theta))-\frac{a_2}{(a_1+a_2)}\operatorname{Im}(\Psi(\rho,\theta))\right]\right\}$$

$$\sigma_{12}^0=-\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{\sigma_{11}^{MA}}{a_1a_2(3-4\nu_M)}\{[-4(1-\nu_M)^2a_1^2-2(1-2\nu_M)^2a_1a_2+\right.$$

$$\left.+4\nu_M(1-\nu_M)a_2^2]\operatorname{Im}(\Phi(\rho,\theta))+\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)}[(1-\nu_M)a_1+\nu_Ma_2]\operatorname{Im}(\Psi(\rho,\theta))\right\}+$$

$$+\frac{\sigma_{22}^{MA}}{a_1a_2(3-4\nu_M)}\{[4\nu_M(1-\nu_M)a_1^2-2(1-2\nu_M)^2a_1a_2-4(1-\nu_M)^2a_2^2]\times \tag{3.67}$$

$$\left.\times\operatorname{Im}(\Phi(\rho,\theta))-\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)}[\nu_Ma_1+(1-\nu_M)a_2]\operatorname{Im}(\Psi(\rho,\theta))\right\}-$$

$$\left.-\frac{4\sigma_{12}^{MA}}{(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2+a_1^2+a_2^2}[2a_1a_2\operatorname{Re}(\Psi(\rho,\theta))-(a_1^2-a_2^2)\operatorname{Re}(\Phi(\rho,\theta))]\right\}$$

$$\sigma_{22}^0=-\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2}\frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{\sigma_{11}^{MA}}{a_1a_2(3-4\nu_M)}\{[2(1-\nu_M)(1-2\nu_M)a_1^2-8\nu_M(1-\nu_M)a_1a_2+\right.$$

$$\left.+2\nu_M(2\nu_M-3)a_2^2]\operatorname{Re}(\Phi(\rho,\theta))-\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)}[(1-\nu_M)a_1+\nu_Ma_2]\operatorname{Re}(\Psi(\rho,\theta))\right\}+$$

$$+\frac{\sigma_{22}^{MA}}{a_1a_2(3-4\nu_M)}\{[-2\nu_M(1-2\nu_M)a_1^2+4(2\nu_M^2-2\nu_M+1)a_1a_2+2(1-\nu_M)(3-2\nu_M)a_2^2]\times$$

$$\left.\times\operatorname{Re}(\Phi(\rho,\theta))+\frac{4a_1a_2}{(a_1+a_2)}[\nu_Ma_1+(1-\nu_M)a_2]\operatorname{Re}(\Psi(\rho,\theta))\right\}-$$

$$\left.-\frac{8a_2(a_1+a_2)\sigma_{12}^{MA}}{(1-2\nu_M)(a_1+a_2)^2+a_1^2+a_2^2}\left[\operatorname{Im}(\Phi(\rho,\theta))+\frac{a_1}{(a_1+a_2)}\operatorname{Im}(\Psi(\rho,\theta))\right]\right\}$$

Окончательные выражения для напряжений получаются из (3.10), где величины σ_{ij}^0 вычисляются согласно (3.67).

Решение задачи о жестком эллиптическом включении имеется в [6], однако явные формулы для компонент тензора напряжений там не представлены.

Как и в случае полости, положив $a_1 = a_2 = a$ и подставив (3.42), (3.43) в (3.67), можно получить в частном случае решение задачи об абсолютно жестком круговом включении

$$\sigma_{11}^0 = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\frac{1}{(3-4\nu_M)}\left\{\sigma_{11}^{MA}\left[(-8\nu_M^2+10\nu_M-5)\cos 2\varphi+\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right]+\right.$$

$$\left.+\sigma_{22}^{MA}\left[(-8\nu_M^2+10\nu_M-1)\cos 2\varphi-\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right]-4\sigma_{12}^{MA}\left[\sin 2\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\sin 4\varphi\right]\right\}$$

$$\sigma_{12}^0 = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\frac{1}{(3-4\nu_M)}\left\{\sigma_{11}^{MA}\left[-(1-2\nu_M)(3-4\nu_M)\sin 2\varphi+\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\sin 4\varphi\right]+\right. \quad (3.68)$$

$$\left.+\sigma_{22}^{MA}\left[-(1-2\nu_M)(3-4\nu_M)\sin 2\varphi-\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\sin 4\varphi\right]-2\sigma_{12}^{MA}\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right\}$$

$$\sigma_{22}^0 = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\frac{1}{(3-4\nu_M)}\left\{\sigma_{11}^{MA}\left[(8\nu_M^2-10\nu_M+1)\cos 2\varphi-\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right]+\right.$$

$$\left.+\sigma_{22}^{MA}\left[(8\nu_M^2-10\nu_M+5)\cos 2\varphi+\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right]-4\sigma_{12}^{MA}\left[\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\sin 4\varphi\right]\right\}$$

Из (3.68), формул для полных напряжений (3.10) и формул перехода к полярным координатам (3.45), получаем выражения для напряжений в полярных координатах

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA}}{2}+\frac{\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA}}{2}\cos 2\varphi+\sigma_{12}^{MA}\sin 2\varphi-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\frac{1}{(3-4\nu_M)}\left\{\sigma_{11}^{MA}\left[-(1-2\nu_M)(3-4\nu_M)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{3a^2}{r^2}-4\right)\cos 2\varphi\right]+\sigma_{22}^{MA}\left[-(1-2\nu_M)(3-4\nu_M)-\left(\frac{3a^2}{r^2}-4\right)\cos 2\varphi\right]+2\sigma_{12}^{MA}\left(\frac{3a^2}{r^2}-4\right)\sin 2\varphi\right\}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA}}{2}-\frac{\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA}}{2}\cos 2\varphi-\sigma_{12}^{MA}\sin 2\varphi+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\frac{1}{(3-4\nu_M)}\left\{\sigma_{11}^{MA}\left[-(1-2\nu_M)(3-4\nu_M)+\frac{3a^2}{r^2}\cos 2\varphi\right]+\right. \quad (3.69)$$

$$\left.+\sigma_{22}^{MA}\left[-(1-2\nu_M)(3-4\nu_M)-\frac{3a^2}{r^2}\cos 2\varphi\right]+\sigma_{12}^{MA}\frac{6a^2}{r^2}\sin 2\varphi\right\}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{12}^{MA}\cos 2\varphi-\frac{\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA}}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\frac{1}{(3-4\nu_M)}\times$$

$$\times\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\{-\sigma_{11}^{MA}\sin 2\varphi+\sigma_{22}^{MA}\sin 2\varphi+2\sigma_{12}^{MA}\cos 2\varphi\}$$

Решение задачи об абсолютно жестком круговом включении приведено в [6, 11]. Формулы (3.69) согласуются с имеющимися в [6, 11] результатами.

Формулы (3.8) значительно упрощаются не только для абсолютно жесткого, но и для упругого кругового включения. Сперва, предположив, что $a_1 = a_2 = a$, упростим формулы (3.3) и (3.6) для напряжений внутри включения. Из (3.3) следует

$$\sigma_{12}^0 = \frac{\mu_I(\sigma_{12}^{MA} - \sigma_{12}^{IA})(3-4\nu_M)}{\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I} \tag{3.70}$$

Выразив теперь в (3.70) величину σ_{12}^{IA} через σ_{12}^{MA}, согласно (3.50) получим

$$\sigma_{12}^0 = \frac{\mu_I(\mu_M - \mu_I)(3-4\nu_M)\sigma_{12}^{MA}}{\mu_M[\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I]} \tag{3.71}$$

Для вычисления величин σ_{11}^0 и σ_{22}^0 по формулам (3.6) заметим, что в случае кругового включения

$$T = S = a(\mu_M + \mu_I), \quad L_{211} = a(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA}), \quad L_{122} = a(\sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA}) \tag{3.72}$$

Подставив (3.72) в выражения для R_0, R_1, R_2 получим

$$\begin{aligned} R_0 &= -a^2\{(1-2\nu_I)\mu_M^2 + (4-4\nu_M - 6\nu_I + 8\nu_I\nu_M)\mu_M\mu_I + (3-4\nu_M)\mu_I^2\} = \\ &= -a^2[(1-2\nu_I)\mu_M + \mu_I][\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I] \end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned} R_1 = &-\mu_I a^2\{(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA})[(2-2\nu_M - 3\nu_I + 4\nu_I\nu_M)\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I] - \\ &-(\sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA})(1-2\nu_M - 3\nu_I + 4\nu_I\nu_M)\mu_M\} \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned} R_2 = &-\mu_I a^2\{-(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA})(1-2\nu_M - 3\nu_I + 4\nu_I\nu_M)\mu_M + \\ &+(\sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA})[(2-2\nu_M - 3\nu_I + 4\nu_I\nu_M)\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I]\} \end{aligned} \tag{3.75}$$

Перепишем формулы (3.74), (3.75) в несколько иной форме

$$\begin{aligned} R_1 = &-\mu_I a^2\{(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA})[\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I] + [(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA}) - \\ &-(\sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA})](1-2\nu_M - 3\nu_I + 4\nu_I\nu_M)\mu_M\} \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned} R_2 = &-\mu_I a^2\{-[(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA}) - (\sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA})](1-2\nu_M - 3\nu_I + 4\nu_I\nu_M)\mu_M + \\ &+(\sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA})[\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I]\} \end{aligned} \tag{3.77}$$

Из (3.58) и (3.63) следует

$$\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA} = \frac{[\mu_M(1-2\nu_I) - \mu_I(1-\nu_I-\nu_M)]\sigma_{11}^{MA} - \mu_I(\nu_I - \nu_M)\sigma_{22}^{MA}}{\mu_M(1-2\nu_I)} \tag{3.78}$$

$$\sigma_{22}^{MA}-\sigma_{22}^{IA} = \frac{-\mu_I(\nu_I-\nu_M)\sigma_{11}^{MA}+[\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-\nu_I-\nu_M)]\sigma_{22}^{MA}}{\mu_M(1-2\nu_I)} \tag{3.79}$$

Из (3.78) и (3.79), получаем

$$(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{11}^{IA})-(\sigma_{22}^{MA}-\sigma_{22}^{IA}) = \frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_M}(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA}) \tag{3.80}$$

Подставив (3.78)–(3.80) в (3.76) и (3.77), получим

$$\begin{gathered}R_1 = -\frac{\mu_I a^2}{\mu_M(1-2\nu_I)}\{[[\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-\nu_I-\nu_M)]\sigma_{11}^{MA}-\mu_I(\nu_I-\nu_M)\sigma_{22}^{MA}]\times \\ \times[\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I]+(\mu_M-\mu_I)(1-2\nu_I)\mu_M(1-2\nu_M-3\nu_I+4\nu_1\nu_M)(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})\}\end{gathered} \tag{3.81}$$

$$\begin{gathered}R_2 = -\frac{\mu_I a^2}{\mu_M(1-2\nu_I)}\{[-\mu_I(\nu_I-\nu_M)\sigma_{11}^{MA}+[\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-\nu_I-\nu_M)]\sigma_{22}^{MA}]\times \\ \times[\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I]-(\mu_M-\mu_I)(1-2\nu_I)\mu_M(1-2\nu_M-3\nu_I+4\nu_I\nu_M)(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})\}\end{gathered} \tag{3.82}$$

Из (3.81), (3.82), имеем

$$R_1+R_2=-\frac{\mu_I a^2}{\mu_M(1-2\nu_I)}[\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I][\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-2\nu_M)](\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA}) \tag{3.83}$$

$$\begin{gathered}R_1-R_2=-\frac{\mu_I a^2}{\mu_M(1-2\nu_I)}\{[\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I](\mu_M-\mu_I)(1-2\nu_I)\times \\ \times(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})+2(\mu_M-\mu_I)(1-2\nu_I)\mu_M(1-2\nu_M-3\nu_I+4\nu_I\nu_M)\times \\ \times(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})\} = \frac{\mu_I a^2(\mu_M-\mu_I)(3-4\nu_M)[\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I](\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})}{\mu_M}\end{gathered} \tag{3.84}$$

Из (3.6), (3.73) и (3.83), (3.84), имеем

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^0 = \frac{1}{2}\frac{R_1+R_2}{R_0}+\frac{1}{2}\frac{R_1-R_2}{R_0} = \frac{1}{2}\frac{\mu_I}{\mu_M}\left\{\frac{[\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-2\nu_M)](\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA})}{[\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I](1-2\nu_I)}+\right. \\ \left.+\frac{(\mu_M-\mu_I)(3-4\nu_M)(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\right\}\end{gathered} \tag{3.85}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{22}^0 = \frac{1}{2}\frac{R_1+R_2}{R_0}-\frac{1}{2}\frac{R_1-R_2}{R_0} = \frac{1}{2}\frac{\mu_I}{\mu_M}\left\{\frac{[\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-2\nu_M)](\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA})}{[\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I](1-2\nu_I)}-\right. \\ \left.-\frac{(\mu_M-\mu_I)(3-4\nu_M)(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\right\}\end{gathered} \tag{3.86}$$

Из (3.71), (3.85), (3.86) и (3.9) получим выражения для напряжений внутри кругового включения

$$\sigma_{12}^{\mathrm{I}} = \frac{4(1-\nu_M)\mu_I}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\sigma_{12}^{MA}$$

$$\sigma_{11}^0+\sigma_{11}^{\mathrm{I}A} = \sigma_{11}^0+\frac{1}{2}(\sigma_{11}^{\mathrm{I}A}+\sigma_{22}^{\mathrm{I}A})+\frac{1}{2}(\sigma_{11}^{\mathrm{I}A}-\sigma_{22}^{\mathrm{I}A}) = \tag{3.87}$$

$$= \sigma_{11}^0+\frac{1}{2}\frac{\mu_I}{\mu_M}\frac{(1-2\nu_M)}{(1-2\nu_I)}(\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA})+\frac{1}{2}\frac{\mu_I}{\mu_M}(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})$$

Отсюда следует

$$\sigma_{11}^{\mathrm{I}} = \mu_I(1-\nu_M)\left\{\frac{\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA}}{\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I}+\frac{2(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\right\} \tag{3.88}$$

$$\sigma_{22}^{\mathrm{I}} = \mu_I(1-\nu_M)\left\{\frac{\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA}}{\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I}-\frac{2(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\right\} \tag{3.89}$$

Из (3.7), (3.71), (3.85) и (3.86), имеем

$$\sigma_{12}^P = \frac{(\mu_M-\mu_I)^2(3-4\nu_M)\sigma_{12}^{MA}}{\mu_M[\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I]}$$

$$\sigma_{11}^P = \frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_I}\sigma_{11}^0+\frac{\mu_M(\nu_M-\nu_I)}{\mu_I(1-2\nu_M)}(\sigma_{11}^0+\sigma_{22}^0) = \tag{3.90}$$

$$= \frac{\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-2\nu_M)}{2\mu_I(1-2\nu_M)}(\sigma_{11}^0+\sigma_{22}^0)+\frac{\mu_M-\mu_I}{2\mu_I}(\sigma_{11}^0-\sigma_{22}^0)$$

Отсюда следует

$$\sigma_{11}^P = \frac{[\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-2\nu_M)]^2(\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA})}{2\mu_M(1-2\nu_M)(1-2\nu_I)[\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I]}+ \tag{3.91}$$

$$+\frac{(\mu_M-\mu_I)^2(3-4\nu_M)(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})}{2\mu_M[\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I]}$$

Аналогично

$$\sigma_{22}^P = \frac{[\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-2\nu_M)]^2(\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA})}{2\mu_M(1-2\nu_M)(1-2\nu_I)[\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I]}- \tag{3.92}$$

$$-\frac{(\mu_M-\mu_I)^2(3-4\nu_M)(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})}{2\mu_M[\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I]}$$

Из (3.90)–(3.92) следует

$$\sigma_{12}^P+\sigma_{12}^{MA}-\sigma_{12}^{\mathrm{I}A} = \frac{4(1-\nu_M)(\mu_M-\mu_I)\sigma_{12}^{MA}}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I} \tag{3.93}$$

Записывая $(\sigma_{11}^{P} + \sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA})$ в виде

$$\sigma_{11}^{P} + \frac{1}{2}[(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA}) + (\sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA})] + \frac{1}{2}[(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA}) - (\sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA})]$$

и воспользовавшись дополнительно (3.78)–(3.80), получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{P} + \sigma_{11}^{MA} - \sigma_{11}^{IA} &= \frac{(1-\nu_M)[\mu_M(1-2\nu_I) - \mu_I(1-2\nu_M)]}{(1-2\nu_M)[\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I]}(\sigma_{11}^{MA} + \sigma_{22}^{MA}) + \\ &+ \frac{2(1-\nu_M)[\mu_M - \mu_I]}{\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I}(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{22}^{MA})\end{aligned} \tag{3.94}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^{P} + \sigma_{22}^{MA} - \sigma_{22}^{IA} &= \frac{(1-\nu_M)[\mu_M(1-2\nu_I) - \mu_I(1-2\nu_M)]}{(1-2\nu_M)[\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I]}(\sigma_{11}^{MA} + \sigma_{22}^{MA}) - \\ &- \frac{2(1-\nu_M)(\mu_M - \mu_I)}{\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I}(\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{22}^{MA})\end{aligned} \tag{3.95}$$

Подставив (3.93)–(3.95) в (3.8) и учитывая, что $a_1 = a_2 = a$, $\rho^2 = r^2/a^2$, получим вне упругого кругового включения

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{0} = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\Bigg\{&(\sigma_{11}^{MA} + \sigma_{22}^{MA})\frac{[\mu_M(1-2\nu_I) - \mu_I(1-2\nu_M)]}{\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I}\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta)) + \\ &+ (\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{22}^{MA})\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I}[2\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta)) - \mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))] + \\ &+ \frac{2(\mu_M - \mu_I)\sigma_{12}^{MA}}{\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I}[2\mathrm{Im}(\Phi(\rho,\theta)) - \mathrm{Im}(\Psi(\rho,\theta))]\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12}^{0} = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\Bigg\{&(\sigma_{11}^{MA} + \sigma_{22}^{MA})\frac{[\mu_M(1-2\nu_I) - \mu_I(1-2\nu_M)]}{\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I}\mathrm{Im}(\Phi(\rho,\theta)) - \\ &- (\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{22}^{MA})\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I}\mathrm{Im}(\Psi(\rho,\theta)) + \frac{2(\mu_M - \mu_I)\sigma_{12}^{MA}}{\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I}\mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^{0} = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\Bigg\{&-(\sigma_{11}^{MA} + \sigma_{22}^{MA})\frac{[\mu_M(1-2\nu_I) - \mu_I(1-2\nu_M)]}{\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I}\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta)) + \\ &+ (\sigma_{11}^{MA} - \sigma_{22}^{MA})\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I}[2\mathrm{Re}(\Phi(\rho,\theta)) + \mathrm{Re}(\Psi(\rho,\theta))] + \\ &+ \frac{2(\mu_M - \mu_I)\sigma_{12}^{MA}}{\mu_M + (3-4\nu_M)\mu_I}[2\mathrm{Im}(\Phi(\rho,\theta)) + \mathrm{Im}(\Psi(\rho,\theta))]\Bigg\}\end{aligned}$$

Воспользовавшись в (3.96) формулами (3.42), (3.43), окончательно получим

$$\sigma_{11}^0 = -\frac{a^2}{2r^2}\left\{(\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA})\frac{[\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-2\nu_M)]}{\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I}\cos 2\varphi + \right.$$

$$+(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})\frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\left[2\cos 2\varphi-\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right]+$$

$$\left.+\frac{2(\mu_M-\mu_I)\sigma_{12}^{MA}}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\left[2\sin 2\varphi-\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\sin 4\varphi\right]\right\}$$

$$\sigma_{12}^0 = -\frac{a^2}{2r^2}\left\{(\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA})\frac{[\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-2\nu_M)]}{\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I}\sin 2\varphi - \right.$$

$$-(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})\frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\sin 4\varphi + \qquad (3.97)$$

$$\left.+\frac{2(\mu_M-\mu_I)\sigma_{12}^{MA}}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right\}$$

$$\sigma_{22}^0 = -\frac{a^2}{2r^2}\left\{-(\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA})\frac{[\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-2\nu_M)]}{\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I}\cos 2\varphi + \right.$$

$$+(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})\frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\left[2\cos 2\varphi+\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\cos 4\varphi\right]+$$

$$\left.+\frac{2(\mu_M-\mu_I)\sigma_{12}^{MA}}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\left[2\sin 2\varphi+\left(\frac{3a^2}{r^2}-2\right)\sin 4\varphi\right]\right\}$$

Нетрудно видеть, что формулы (3.97) в случае $\mu_I = 0$ совпадают с формулами (3.44) для кругового отверстия, а при $\mu_I \to \infty$, с формулами (3.68) для абсолютно жесткого кругового включения. Для получения полных напряжений вне кругового упругого включения необходимо еще воспользоваться формулами (3.10), в которых σ_{ij}^0 вычисляются согласно (3.97). Из (3.45) и (3.97) следует, что в полярных координатах полные напряжения принимают вид

$$\sigma_{rr}^M = \frac{\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA}}{2}+\frac{\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA}}{2}\cos 2\varphi+\sigma_{12}^{MA}\sin 2\varphi-\frac{a^2}{2r^2}\left\{(\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA})\times\right.$$

$$\times\frac{\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-2\nu_M)}{\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I}+(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})\frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\times$$

$$\left.\times\left(4-\frac{3a^2}{r^2}\right)\cos 2\varphi+\frac{2(\mu_M-\mu_I)\sigma_{12}^{MA}}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\left(4-\frac{3a^2}{r^2}\right)\sin 2\varphi\right\}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{M}=\frac{\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA}}{2}-\frac{\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA}}{2}\cos 2\varphi-\sigma_{12}^{MA}\sin 2\varphi-\frac{a^{2}}{2r^{2}}\left\{-(\sigma_{11}^{MA}+\sigma_{22}^{MA})\times\right.$$

$$\times\frac{\mu_M(1-2\nu_I)-\mu_I(1-2\nu_M)}{\mu_M(1-2\nu_I)+\mu_I}+(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})\frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\times \tag{3.98}$$

$$\left.\times\frac{3a^{2}}{r^{2}}\cos 2\varphi+\frac{6(\mu_M-\mu_I)\sigma_{12}^{MA}}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\frac{a^{2}}{r^{2}}\sin 2\varphi\right\}$$

$$\sigma_{r\varphi}^{M}=\sigma_{12}^{MA}\cos 2\varphi-\frac{\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA}}{2}\sin 2\varphi-$$

$$-\frac{a^{2}}{2r^{2}}\left\{-(\sigma_{11}^{MA}-\sigma_{22}^{MA})\frac{\mu_M-\mu_I}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\left(\frac{3a^{2}}{r^{2}}-2\right)\sin 2\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{2(\mu_M-\mu_I)\sigma_{12}^{MA}}{\mu_M+(3-4\nu_M)\mu_I}\left(\frac{3a^{2}}{r^{2}}-2\right)\cos 2\varphi\right\}$$

Аналитические выражения для напряжений, отвечающих задаче об упругом круговом включении, приведены в [6, 11]. Формулы (3.87)–(3.89) и (3.98) согласуются с формулами, приведенными в [6, 11].

Работа выполнена в рамках Проекта № 2, раздела "Механика", блока 1 "Ориентированные фундаментальные исследования" раздела "Фундаментальные исследования в области физических наук" ФЦНТП "Исследования и разработки по приоритетным направлениям науки и техники" на 2002–2006 гг., а также гранта НШ-1849.2003.1 Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ РФ и частичной поддержке (Е.Ш.) Программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН "Вычислительные информационные проблемы решения больших задач" (ГК № 10002–251/ОМН–03/026–024/240603–805 от 24.06.2003 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 664 с.
2. *Партон В.З., Перлин П.И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.
3. *Hardiman N.J.* Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate // Quart. Journ. Mech. and Applied Math. 1954. Pt. 2. V. 7. P. 226–230.
4. *Эшелби Дж.* Определение поля упругих напряжений создаваемого эллипсоидальным включением, и задачи, связанные с этой проблемой. В кн.: Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Иностр. лит., 1963. С. 103–139.
5. *Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И.* Плоская задача о напряженном состоянии, определяемом фазовыми превращениями в эллиптической области. Институт проблем механики РАН. Препринт № 714. М., 2003. 50 с.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 576 с.
8. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
9. *Хан Х.* Теория упругости. М.: Мир, 1988. 344 с.
10. *Папкович П.Ф.* Теория упругости. М., Л., Гос. изд-во оборонной промышленности. 1939. 640 с.
11. *Goodier J.N.* Concentration of stress around spherical and cylindrical inclusions and flaws // J. App. Mech. 1933. APM–55–7. P. 39–44.

Москва

Поступила в редакцию
8.10.2003