

© 2004 г. А. В. ЛОВЕЙКИН, А. Ф. УЛИТКО

**О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ,
ОСЛАБЛЕННОМ ДВУМЯ КЛИНОВИДНЫМИ РАЗРЕЗАМИ,
ЛЕЖАЩИМИ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ**

Рассмотрена задача о равновесии упругого пространства с двумя клиновидными разрезами с общей вершиной, лежащими в одной плоскости и имеющими общую биссектрису. Исследование характера распределения напряжений вблизи разрезов проведено на основании однородных решений рассматриваемой задачи, построение которых проводилось в сферических координатах с использованием интегральных преобразований типа Мелера – Фока [1, 2]. Анализ полученных однородных решений позволил определить поведение напряжений вблизи общей вершины разрезов. При этом установлено, что в указанной точке напряжения имеют локальную особенность степенного характера. Исследована зависимость показателя особенности от углов раствора разрезов. Особое внимание уделено случаю, когда в вершине разрезов имеет место классическая корневая особенность.

Ранее в [3–5] решены задачи о равновесии упругого пространства с одним клиновидным в плане разрезом, с двумя симметричными клиновидными разрезами, с двумя разрезами – по полуплоскости и клиновидными в плане, которые являются частными случаями рассмотренной.

1. Рассмотрим задачу о равновесии упругого пространства, ослабленного двумя клиновидными в плане разрезами, лежащими в одной плоскости и имеющими общую вершину. Пусть разрезы лежат в плоскости $y = 0$, их общая вершина совпадает с началом координат, а ось Oz является их биссектрисой, $2\alpha_0, 2\beta_0$ – углы раствора разрезов (фиг. 1).

Основная цель работы – исследование поведения напряжений вблизи точки O – вершины разрезов. Считаем, что пространство находится под действием симметричных растягивающих нагрузок, направленных вдоль оси Oy , а стенки разрезов свободны от нагрузок. Тогда задача будет иметь симметрию по координате y и ее решение достаточно искать в полупространстве $\{y > 0\}$ при смешанных краевых условиях на его поверхности. При этом для определения характера поведения напряжений в окрестности точки O (фиг. 1) достаточно построить однородные решения рассматриваемой задачи, которые удовлетворяют однородным краевым условиям на поверхности полупространства:

$$\tau_{yx}|_{y=0} = \tau_{yz}|_{y=0} = 0, \quad \sigma_y|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 0 \quad (1.1)$$

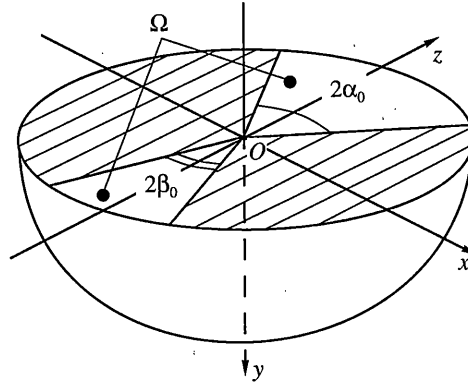
$(x, z) \in \Omega \qquad (x, z) \notin \Omega$

где Ω – открытое плоское множество, занимаемое разрезами. При этом условие регулярности на бесконечности не ставится.

Если представить вектор упругих перемещений в виде [6]:

$$2Gu = j4 \frac{m-1}{m} \omega - \text{grad} \left(y\omega + \frac{m-2}{m} \tilde{\omega} \right) \quad (1.2)$$

($\tilde{\omega}, \omega = \partial \tilde{\omega} / \partial y$ – гармонические в области $\{y > 0\}$ функции, G, m – модуль сдвига и число Пуассона упругого материала), то поверхность рассматриваемого полупространства $\{y > 0\}$ будет свободной от касательных напряжений, а для нормальных напряже-



Фиг. 1

ний и перемещений справедливо [6]:

$$\sigma_y|_{y=0} = \frac{\partial \omega}{\partial y}\bigg|_{y=0}, \quad u_y|_{y=0} = \frac{m-1}{mG} \omega\bigg|_{y=0} \quad (1.3)$$

В результате первоначальная задача об определении однородных решений по смешанным краевым условиям (1.1) сводится с учетом (1.2) к нахождению гармонической в $\{y > 0\}$ функции ω по следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}\bigg|_{\substack{y=0 \\ (x,z) \in \Omega}} = 0, \quad \omega\bigg|_{\substack{y=0 \\ (x,z) \notin \Omega}} = 0 \quad (1.4)$$

Из фиг. 1 видно, что задача для функции ω имеет симметрию по координате x . Поэтому ее решение достаточно искать в четверти пространства $\{x > 0, y > 0\}$. При этом будем искать четное по x решение, т.е. гармоническую функцию, которая вместе с условиями (1.4) удовлетворяет условию четности по x :

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0 \quad (1.5)$$

Решение задачи будем строить в сферической системе координат (ρ, θ, φ) , связанной с декартовой следующим образом [7]: $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$ ($\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$). При этом $\{x > 0, y > 0\} = \{\rho > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < \pi/2\}$, а краевые условия (1.4), (1.5) имеют вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=\pi/2} = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} = 0, \quad \omega\bigg|_{\substack{\varphi=0 \\ \alpha_0 < \theta < \pi - \beta_0}} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}\bigg|_{\substack{\varphi=0 \\ \pi - \beta_0 < \theta < \pi}} = 0 \quad (1.6)$$

2. Построение решения уравнения Лапласа в сферических координатах при краевых условиях (1.6) основано на применении интегрального преобразования типа Мелера – Фока по координате θ [1, 2]. Представим неизвестную гармоническую функцию ω в виде

$$\omega = \frac{\rho^{s-1/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \left\{ a_s(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) + b_s(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) \right\} \cos \mu \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \quad (2.1)$$

$$\Gamma \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos \theta) d\mu$$

где $a_s(\mu)$, $b_s(\mu)$ – неизвестные четные функции, s – неизвестный параметр, который будем считать чисто мнимым. Представление (2.1) является линейной комбинацией четного и нечетного относительно $\theta = \pi/2$ разложения по функциям Лежандра [1, 2].

При выборе неизвестной функции ω в виде (2.1) краевое условие (1.6) при $\varphi = \pi/2$ уже выполняется. Перейдем к удовлетворению смешанных краевых условий (1.6) при $\varphi = 0$. Подставив в эти условия (2.1) и продолжив полученные равенства на весь интервал $0 < \theta < \pi$, приходим к двум равенствам:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \left\{ a_s(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) + b_s(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) \right\} \cos \frac{\pi\mu}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) d\mu = \begin{cases} u_1(\theta), & 0 < \theta < \alpha_0 \\ 0, & \alpha_0 < \theta < \pi - \beta_0 \\ u_2(\theta), & \pi - \beta_0 < \theta < \pi \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu^2 \left\{ a_s(\mu) \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) + b_s(\mu) \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + s + \mu \right) \right\} \sin \frac{\pi\mu}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) d\mu = \begin{cases} 0, & 0 < \theta < \alpha_0 \\ \sigma(\theta) \sin\theta, & \alpha_0 < \theta < \pi - \beta_0 \\ 0, & \pi - \beta_0 < \theta < \pi \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} u_1 &\in C(0 \leq \theta \leq \alpha_0), \quad u_1(\theta) \sim A_1 \sin^{1/2}(\alpha_0 - \theta), \quad \theta \sim \alpha_0 - 0 \\ u_2 &\in C(\pi - \beta_0 \leq \theta \leq \pi), \quad u_2(\theta) \sim A_2 \sin^{1/2}(\theta - \pi + \beta_0), \quad \theta \sim \pi - \beta_0 + 0 \\ \sigma &\in C(\alpha_0 < \theta < \pi - \beta_0), \quad \sigma(\theta) \sim B_1 \sin^{-1/2}(\theta - \alpha_0), \quad \theta \sim \alpha_0 + 0 \\ &\sigma(\theta) \sim B_2 \sin^{-1/2}(\pi - \beta_0 - \theta), \quad \theta \sim \pi - \beta_0 - 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $u_{1,2}(\theta)$, $\sigma(\theta)$ – неизвестные функции, определяющие нормальные смещения стенок разрезов и нормальные напряжения за пределами разрезов соответственно.

Применяя к равенствам (2.2), (2.3) формулы интегрального преобразования типа Мелера–Фока [2] и используя соотношения для функций Лежандра отрицательного аргумента [8], получим

$$\begin{aligned} &\mu \frac{a_s(\mu) \cos(\pi(1/2 + s + \mu)/2) + b_s(\mu) \sin(\pi(1/2 + s + \mu)/2)}{\Gamma(1/2 - s + \mu)} \cos \frac{\pi\mu}{2} = \\ &= \mu \left[\int_0^{\alpha_0} \frac{u_1(t)}{\sin t} P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos t) dt + \int_{\pi - \beta_0}^{\pi} \frac{u_2(t)}{\sin t} P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos t) dt \right] = \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} &= b_0^\mu \frac{X_2(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)} - \frac{1}{\sin \pi\mu} \left[\frac{\pi a_0^{-\mu}}{\Gamma(1/2 - s + \mu)\Gamma(1/2 + s + \mu)\Gamma(1 - \mu)} X_1(-\mu) + \cos \pi s a_0^\mu \frac{X_1(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)} \right] \\ &\mu \frac{a_s(\mu) \cos(\pi(1/2 + s + \mu)/2) + b_s(\mu) \sin(\pi(1/2 + s + \mu)/2)}{\Gamma(1/2 - s + \mu)} \sin \frac{\pi\mu}{2} = \\ &= \int_{\alpha_0}^{\pi - \beta_0} \sigma(t) P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos t) dt = a_0^{-\mu} \frac{Y_1(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \mu \frac{a_s(\mu) \cos(\pi(1/2 + s + \mu)/2) - b_s(\mu) \sin(\pi(1/2 + s + \mu)/2)}{\Gamma(1/2 - s + \mu)} \cos \frac{\pi\mu}{2} = \\ & = \mu \left[\int_0^{\alpha_0} \frac{u_1(t)}{\sin t} P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos t) dt + \int_{\pi-\beta_0}^{\pi} \frac{u_2(t)}{\sin t} P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos t) dt \right] = \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & = a_0^\mu \frac{X_1(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)} - \frac{1}{\sin \pi\mu} \left[\frac{\pi b_0^{-\mu}}{\Gamma(1/2 - s + \mu)\Gamma(1/2 + s + \mu)\Gamma(1 - \mu)} + \cos \pi s b_0^\mu \frac{X_2(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)} \right] \\ & \mu \frac{a_s(\mu) \cos(\pi(1/2 + s + \mu)/2) - b_s(\mu) \sin(\pi(1/2 + s + \mu)/2)}{\Gamma(1/2 - s + \mu)} \sin \frac{\pi\mu}{2} = \\ & = \int_{\alpha_0}^{\pi-\beta_0} \sigma(t) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos t) dt = b_0^{-\mu} \frac{Y_2(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)}, \quad a_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}, \quad b_0 = \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$X_1(\mu) = \mu \int_0^{\alpha_0} \frac{u_1(t)}{\sin t} \left(\frac{\operatorname{tg}(t/2)}{\operatorname{tg}(\alpha_0/2)} \right)^\mu F\left(s - \frac{1}{2}; s + \frac{1}{2}; \mu + 1; \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt$$

$$X_2(\mu) = \mu \int_0^{\beta_0} \frac{u_2(\pi-t)}{\sin t} \left(\frac{\operatorname{tg}(t/2)}{\operatorname{tg}(\beta_0/2)} \right)^\mu F\left(s - \frac{1}{2}; s + \frac{1}{2}; \mu + 1; \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt, \quad \operatorname{Re} \mu > 0$$

$$Y_1(\mu) = \mu \int_{\beta_0}^{\pi-\alpha_0} \sigma(\pi-t) \left(\frac{\operatorname{tg}(t/2)}{\operatorname{ctg}(\alpha_0/2)} \right)^\mu F\left(s - \frac{1}{2}; s + \frac{1}{2}; \mu + 1; \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt$$

$$Y_2(\mu) = \mu \int_{\alpha_0}^{\pi-\beta_0} \sigma(t) \left(\frac{\operatorname{tg}(t/2)}{\operatorname{ctg}(\beta_0/2)} \right)^\mu F\left(s - \frac{1}{2}; s + \frac{1}{2}; \mu + 1; \sin^2 \frac{t}{2}\right) dt, \quad \operatorname{Re} \mu > -\varepsilon$$

где $X_{1,2}(\mu)$, $Y_{1,2}(\mu)$ – неизвестные функции, аналитические при $\operatorname{Re} \mu > -\varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1/2$), $F(a; b; c; z)$ – гипергеометрическая функция [7, 8]. Используя свойства гипергеометрической функции и асимптотики (2.4), можно показать, что введенные неизвестные функции при $\mu \sim \infty$, $\operatorname{Re} \mu > 0$ ведут себя как $O(\mu^{-1/2})$. Кроме этого следует заметить, что функции $Y_1(\mu)$ и $Y_2(\mu)$ не являются независимыми, так как определяются через одну и ту же неизвестную функцию $\sigma(t)$. Исключая из равенств (2.5)–(2.8) неизвестные функции $a_s(\mu)$ и $b_s(\mu)$, приходим к системе двух функциональных уравнений относительно $X_{1,2}(\mu)$, $Y_{1,2}(\mu)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \cos^2(\pi\mu/2)} \frac{\pi\Gamma(1 + \mu)}{\Gamma(1/2 - s + \mu)\Gamma(1/2 + s + \mu)\Gamma(1 - \mu)} \begin{bmatrix} X_1(-\mu) \\ X_2(-\mu) \end{bmatrix} = \\ & = - \begin{bmatrix} Y_1(\mu) \\ Y_2(\mu) \end{bmatrix} - \frac{\cos \pi s}{2 \cos^2(\pi\mu/2)} \begin{bmatrix} a_0^{2\mu} X_1(\mu) \\ b_0^{2\mu} X_2(\mu) \end{bmatrix} + \frac{(a_0 b_0)^\mu}{\operatorname{ctg}(\pi\mu/2)} \begin{bmatrix} X_2(\mu) \\ X_1(\mu) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

справедливой в вертикальной полосе $|\operatorname{Re} \mu| < \varepsilon$. Следует отметить, что система (2.9) не является классической векторной задачей Римана, однако, используя методику Винера – Хопфа [9], ее решение можно свести к решению некоторой бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Структура системы (2.9) такова, что для ее решения можно применить подход, используемый при решении уравнений Винера – Хопфа [9]. Важным этапом решения является факторизация коэффициента $1/\cos^2(\pi\mu/2)$, стоящего в левой части системы

$$\frac{1}{\cos^2(\pi\mu/2)} = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(1/2 + \mu/2)\Gamma(1/2 - \mu/2)}{\Gamma(1 + \mu/2)\Gamma(1 - \mu/2)} \Gamma(1 + \mu)\Gamma(1 - \mu) \quad (2.10)$$

Используя (2.10), можем переписать систему (2.9) в виде

$$K_s(-\mu) \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(-\mu) \\ \tilde{X}_2(-\mu) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1(\mu) \\ \tilde{Y}_2(\mu) \end{bmatrix} - \frac{\cos\pi s}{2\cos^2(\pi\mu/2)} \begin{bmatrix} a_0^{2\mu} \tilde{X}_1(\mu) \\ b_0^{2\mu} \tilde{X}_2(\mu) \end{bmatrix} + \\ + (a_0 b_0)^\mu \operatorname{tg} \frac{\pi\mu}{2} \begin{bmatrix} \tilde{X}_2(\mu) \\ \tilde{X}_1(\mu) \end{bmatrix}, \quad |\operatorname{Re}\mu| < \varepsilon \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_k(\mu) \\ \tilde{Y}_k(\mu) \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(1 + \mu/2) \Gamma(1/2 + s + \mu)\Gamma(1/2 - s + \mu)}{\Gamma(1/2 + \mu/2) \Gamma^2(1 + \mu)} \begin{bmatrix} X_k(\mu) \\ Y_k(\mu) \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2) \quad (2.12)$$

$$K_s(\mu) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2(1/2 + \mu/2) \Gamma^2(1 + \mu)}{\Gamma^2(1 + \mu/2) \Gamma(1/2 - s + \mu)\Gamma(1/2 + s + \mu)}$$

$$K_s(\mu) \sim 1, \quad \mu \sim \infty, \quad \operatorname{Re}\mu > 0$$

где введены новые неизвестные функции $\tilde{X}_k(\mu)$, $\tilde{Y}_k(\mu)$, аналитические при $\operatorname{Re}\mu > -\varepsilon$, которые с учетом асимптотик для $X_{1,2}(\mu)$, $Y_{1,2}(\mu)$ и Γ -функции [8] при $\mu \sim \infty$, $\operatorname{Re}\mu > 0$ ведут себя как $O(\mu^{-1})$.

Левая часть системы (2.11) аналитична при $\operatorname{Re}\mu < \varepsilon$, а правая – при $\operatorname{Re}\mu > -\varepsilon$ за исключением полюсов второго порядка, образованных вторым слагаемым, и полюсов первого порядка, образованных третьим слагаемым, в точках $\mu = \mu_k = 2k + 1$, $k \geq 0$. Исбавляясь от полюсов в правой части (2.11), приходим к соотношению

$$K_s(-\mu) \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(-\mu) \\ \tilde{X}_2(-\mu) \end{bmatrix} + \frac{2\cos\pi s}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(\mu - 2k - 1)^2} \begin{bmatrix} a_0^{2(2k+1)} x_k' \\ b_0^{2(2k+1)} x_k'' \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu - 2k - 1} \begin{bmatrix} a_0^{2(2k+1)} (x_k' 2 \ln a_0 + y_k') \\ b_0^{2(2k+1)} (x_k'' 2 \ln a_0 + y_k'') \end{bmatrix} \right\} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0 b_0)^{2k+1}}{\mu - 2k - 1} \begin{bmatrix} x_k'' \\ x_k' \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1(\mu) \\ \tilde{Y}_2(\mu) \end{bmatrix} + \operatorname{tg} \frac{\pi\mu}{2} (a_0 b_0)^\mu \begin{bmatrix} \tilde{X}_2(\mu) \\ \tilde{X}_1(\mu) \end{bmatrix} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0 b_0)^{2k+1}}{\mu - 2k - 1} \begin{bmatrix} x_k'' \\ x_k' \end{bmatrix} - \quad (2.13)$$

$$- \frac{\cos\pi s}{2\cos^2(\pi\mu/2)} \begin{bmatrix} a_0^{2\mu} \tilde{X}_1(\mu) \\ b_0^{2\mu} \tilde{X}_2(\mu) \end{bmatrix} + \frac{2\cos\pi s}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(\mu - 2k - 1)^2} \begin{bmatrix} a_0^{2(2k+1)} x_k' \\ b_0^{2(2k+1)} x_k'' \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu - 2k - 1} \begin{bmatrix} a_0^{2(2k+1)} (x_k' 2 \ln a_0 + y_k') \\ b_0^{2(2k+1)} (x_k'' 2 \ln b_0 + y_k'') \end{bmatrix} \right\}, \quad |\operatorname{Re}\mu| < \varepsilon$$

$$x_k' = \tilde{X}_1(2k + 1), \quad x_k'' = \tilde{X}_2(2k + 1), \quad y_k' = \tilde{X}_1'(2k + 1), \quad y_k'' = \tilde{X}_2'(2k + 1) \quad (k \geq 0) \quad (2.14)$$

в котором дополнительные слагаемые подобраны так, чтобы левая часть была аналитической в полуплоскости $\text{Re} \mu < \varepsilon$, а правая – в полуплоскости $\text{Re} \mu > -\varepsilon$.

Следует заметить, что переход от равенства (2.11) к равенству (2.13) будет корректен, если ряды, входящие в (2.13), будут сходящимися. Учитывая определение неизвестных величин (2.14), а также поведение неизвестных функций $\tilde{X}_{1,2}(\mu)$ на бесконечности, можно установить, что эти ряды сходятся, если $0 < a_0, b_0 \leq 1$. Поскольку $a_0 = \text{tg}(\alpha_0/2)$, $b_0 = \text{tg}(\beta_0/2)$, то изложенный в работе подход к решению задачи применим, если $0 < \alpha_0, \beta_0 \leq \pi/2$ (при этом α_0 и β_0 одновременно не обращаются в $\pi/2$).

На основании асимптотического поведения $\tilde{X}_{1,2}(\mu)$, $\tilde{Y}_{1,2}(\mu)$ при $\mu \sim \infty$, определения $K_s(\mu)$ и асимптотик для Γ -функции [8], можем заключить, что обе части равенства (2.13) стремятся к нулю при $\mu \sim \infty$ в областях их аналитичности. Тогда, используя принцип аналитического продолжения и теорему Лиувилля [9], получаем, что обе части равенства (2.13) должны обращаться в нуль. Откуда следует равенство

$$K_s(\mu) \left[\begin{matrix} \tilde{X}_1(\mu) \\ \tilde{X}_2(\mu) \end{matrix} \right] + \frac{2 \cos \pi s}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(\mu + 2k + 1)^2} \left[\begin{matrix} a_0^{2(2k+1)} x_k' \\ b_0^{2(2k+1)} x_k'' \end{matrix} \right] - \frac{1}{\mu + 2k + 1} \left[\begin{matrix} a_0^{2(2k+1)} (x_k' 2 \ln a_0 + y_k') \\ b_0^{2(2k+1)} (x_k'' 2 \ln b_0 + y_k'') \end{matrix} \right] \right\} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0 b_0)^{2k+1}}{\mu + 2k + 1} \left[\begin{matrix} x_k'' \\ x_k' \end{matrix} \right] = 0 \quad (2.15)$$

справедливое уже во всей комплексной плоскости.

Для полного определения функций $\tilde{X}_{1,2}(\mu)$ из (2.15) следует определить неизвестные величины x_k', x_k'', y_k', y_k'' ($k \geq 0$). Используя определение (2.14), последовательно положим в (2.15) $\mu = 2m + 1$, $m \geq 0$. В результате получим первые два набора уравнений бесконечной системы относительно указанных неизвестных величин:

$$K_s(2m + 1) \left[\begin{matrix} x_m' \\ x_m'' \end{matrix} \right] + \frac{\cos \pi s}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2(m + k + 1)^2} \left[\begin{matrix} a_0^{2(2k+1)} x_k' \\ b_0^{2(2k+1)} x_k'' \end{matrix} \right] - \frac{1}{m + k + 1} \left[\begin{matrix} a_0^{2(2k+1)} (x_k' 2 \ln a_0 + y_k') \\ b_0^{2(2k+1)} (x_k'' 2 \ln b_0 + y_k'') \end{matrix} \right] \right\} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0 b_0)^{2k+1}}{m + k + 1} \left[\begin{matrix} x_k'' \\ x_k' \end{matrix} \right] = 0 \quad (m \geq 0) \quad (2.16)$$

Далее, продифференцируем (2.15) по μ и в полученном равенстве снова последовательно положим $\mu = 2m + 1$, $m \geq 0$. Получим еще два набора уравнений, замыкающие систему,

$$K_s(2m + 1) \left[\begin{matrix} y_m' \\ y_m'' \end{matrix} \right] + K_s'(2m + 1) \left[\begin{matrix} x_m' \\ x_m'' \end{matrix} \right] - \frac{\cos \pi s}{2\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(m + k + 1)^3} \left[\begin{matrix} a_0^{2(2k+1)} x_k' \\ b_0^{2(2k+1)} x_k'' \end{matrix} \right] - \frac{1}{(m + k + 1)^2} \left[\begin{matrix} a_0^{2(2k+1)} (x_k' 2 \ln a_0 + y_k') \\ b_0^{2(2k+1)} (x_k'' 2 \ln b_0 + y_k'') \end{matrix} \right] \right\} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0 b_0)^{2k+1}}{(m + k + 1)^2} \left[\begin{matrix} x_k'' \\ x_k' \end{matrix} \right] = 0 \quad (m \geq 0) \quad (2.17)$$

$$K_s'(\mu) = K_s(\mu) \{ \psi(1/2 + \mu/2) - \psi(1 + \mu/2) + 2\psi(1 + \mu) + \psi(1/2 - s + \mu) - \psi(1/2 + s + \mu) \}$$

где $\psi(z)$ – логарифмическая производная Γ -функции [7, 8].

Полученная бесконечная система линейных алгебраических уравнений (2.16), (2.17) является квазивполне регулярной, если $0 < \alpha_0, \beta_0 < \pi/2$ ($0 < a_0, b_0 < 1$). В случае, когда, например, $\alpha_0 = \pi/2$ ($a_0 = 1$), то систему можно преобразовать к таковой с помощью замены $z'_k = \sqrt{2k+1}x'_k$, $z''_k = \sqrt{2k+1}x''_k$ ($k \geq 0$). На основании свойств системы (2.16), (2.17), а также используя определение ее неизвестных (2.14), можем установить, что ограниченное решение этой системы должно иметь асимптотику

$$x'_k \sim \frac{c_1(s)}{2k+1}, \quad x''_k \sim \frac{c_2(s)}{2k+1}, \quad k \sim \infty \quad (2.18)$$

3. Решения бесконечной системы (2.16), (2.17) полностью определяют неизвестную гармоническую функцию ω . Действительно, из (2.1) с использованием (2.5) и (2.12) можно получить следующие представления для функции ω :

$$\omega = \frac{\rho^{s-1/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(1+\mu) \frac{\Gamma(1/2+\mu/2) \cos \mu(\pi/2-\varphi)}{\Gamma(1+\mu/2) \cos(\pi\mu/2)} \left\{ \tilde{X}_1(\mu) \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right)^\mu P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos \theta) + \tilde{X}_2(\mu) \left(\operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} \right)^\mu P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos \theta) \right\} d\mu \quad (3.1)$$

справедливое для чисто мнимого s .

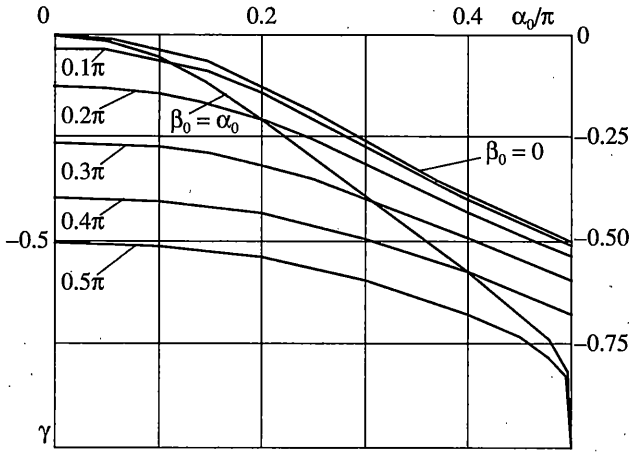
В случае, когда $\alpha_0 \leq \theta < \pi - \beta_0$, интегралы, стоящие в (3.1), можно вычислить, замыкая их контур интегрирования в полуплоскости $\operatorname{Re} \mu > 0$ и вычисляя сумму вычетов по всем простым полюсам подынтегрального выражения в точках $\mu = 2k+1$, $k \geq 0$. Получим

$$\omega = \frac{2}{\pi} \rho^{s-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(2k+2) \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+3/2)} \sin(2k+1)\varphi \left\{ x'_k \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} \right)^{2k+1} P_{s-1/2}^{-2k-1}(-\cos \theta) + x''_k \left(\operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} \right)^{2k+1} P_{s-1/2}^{-2k-1}(\cos \theta) \right\}, \quad \alpha_0 \leq \theta < \pi - \beta_0 \quad (3.2)$$

Аналогичные представления можно получить и на интервалах $0 < \theta < \alpha_0$, $\pi - \beta_0 < \theta < \pi$. Учитывая свойство регулярности системы (2.16), (2.17) и то, что ее коэффициенты являются мероморфными по s по всей комплексной плоскости функциями, представление для гармонической функции ω (3.2) можно аналитически продолжить по s с мнимой оси на всю комплексную плоскость.

При построении однородных решений рассматриваемой задачи теории упругости представляют интерес нетривиальные гармонические функции. Так как бесконечная система (2.16), (2.17) является однородной, то она будет иметь нетривиальные решения лишь в случае, когда ее определитель обращается в нуль, что дает возможность определить значения неизвестного параметра s . Нули определителя искались численно путем редукции системы (2.16), (2.17) к конечной. При этом следует отметить, что нули являются действительными и простыми, причем они расположены симметрично относительно точки $s = 0$, так как коэффициенты системы являются четными по s функциями.

Характер поведения напряжений при подходе к вершине разрезом, точке O (фиг. 1), определяется положительными нулями определителя системы (2.16), (2.17). При этом на основании соотношений (1.3), представления для гармонической функции ω (3.2), определяющей однородные решения задачи, и асимптотик для x'_k и x''_k (2.18) можно



Фиг. 2

установить, что в окрестности точки O нормальные напряжения ведут себя следующим образом

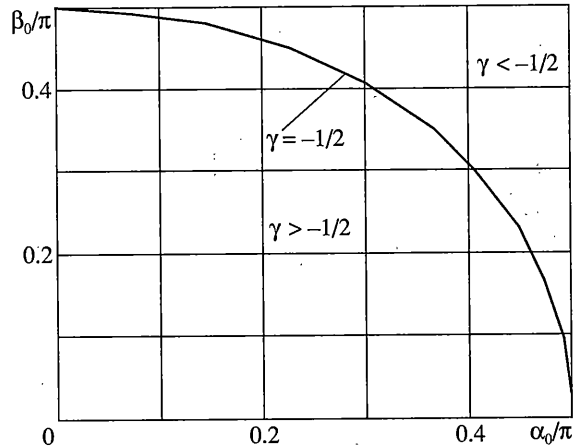
$$\sigma_y|_{\varphi=0} = \frac{2}{\pi \sin \theta} \left\{ \rho^\gamma \left(\frac{K_1 \operatorname{tg}(\alpha_0/2)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta/2) - \operatorname{tg}^2(\alpha_0/2)}} + \frac{K_2 \operatorname{tg}(\beta_0/2)}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2(\theta/2) - \operatorname{tg}^2(\beta_0/2)}} \right) + \rho^\lambda \left(\frac{R_1(\rho) \operatorname{tg}(\alpha_0/2)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta/2) - \operatorname{tg}^2(\alpha_0/2)}} + \frac{R_2(\rho) \operatorname{tg}(\beta_0/2)}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2(\theta/2) - \operatorname{tg}^2(\beta_0/2)}} \right) + \sigma(\rho, \theta) \right\} \quad (3.3)$$

$$0 < \rho < 1, \quad \alpha_0 < \theta < \pi - \beta_0, \quad \gamma = s_1 - 3/2, \quad \lambda = s_2 - 3/2$$

где $K_{1,2} = \text{const}$, $s_{1,2}$ – первый и второй положительные нули определителя системы (2.16), (2.17), $f(\theta)$ – некоторая ограниченная при $\alpha_0 \leq \theta \leq \pi - \beta_0$ функция, $R_{1,2}(\rho)$ – некоторые ограниченные при $0 \leq \rho \leq 1$ функции, $\sigma(\rho, \theta)$ – некоторая функция, ограниченная при $0 \leq \rho \leq 1$, $\alpha_0 \leq \theta \leq \pi - \beta_0$. Численные расчеты показывают, что показатели γ и λ являются функциями геометрических параметров α_0 и β_0 (углов раствора разрезов). Зависимость γ от α_0 и β_0 представлена в таблице 1 и на фиг. 2. При этом в частных слу-

Таблица

β_0/π	$\alpha_0/\pi = 0$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
0	0	-0.0064	-0.0270	-0.0646	-0.1190	-0.1853	-0.2561	-0.3251	-0.3891	-0.4474	-0.5
0.05	-0.0064	-0.0126	-0.0329	-0.0697	-0.1233	-0.1888	-0.2589	-0.3275	-0.3913	-0.4494	-0.5020
0.1	-0.0270	-0.0329	-0.0519	-0.0865	-0.1372	-0.2001	-0.2681	-0.3352	-0.3982	-0.4559	-0.5083
0.15	-0.0646	-0.0697	-0.0865	-0.1172	-0.1630	-0.2209	-0.2850	-0.3494	-0.4107	-0.4675	-0.5195
0.2	-0.1190	-0.1233	-0.1372	-0.1630	-0.2020	-0.2528	-0.3110	-0.3713	-0.4299	-0.4852	-0.5367
0.25	-0.1853	-0.1888	-0.2001	-0.2209	-0.2528	-0.2957	-0.3467	-0.4015	-0.4566	-0.5098	-0.5605
0.3	-0.2561	-0.2589	-0.2681	-0.2850	-0.3110	-0.3467	-0.3905	-0.4395	-0.4905	-0.5414	-0.5914
0.35	-0.3251	-0.3275	-0.3352	-0.3494	-0.3713	-0.4015	-0.4395	-0.4833	-0.5306	-0.5796	-0.6298
0.4	-0.3891	-0.3913	-0.3982	-0.4107	-0.4299	-0.4566	-0.4905	-0.5306	-0.5754	-0.6238	-0.6765
0.45	-0.4474	-0.4494	-0.4559	-0.4675	-0.4852	-0.5098	-0.5414	-0.5796	-0.6238	-0.6744	-0.7360
0.5	-0.5	-0.5020	-0.5083	-0.5195	-0.5367	-0.5605	-0.5914	-0.6298	-0.6765	-0.7360	-1



Фиг. 3

чаях, когда $\beta_0 = 0$, $\beta_0 = \alpha_0$, $\beta_0 = \pi/2$, полученные в работе результаты совпадают с известными в литературе [3–5]. Для показателя λ отметим, что $\lambda > 0$ при $0 \leq \alpha_0, \beta_0 \leq \pi/2$.

Анализируя соотношение (3.3), отметим, что при приближении к ребрам разрезов, $\theta \sim \alpha_0 + 0$ или $\theta \sim \pi - \beta_0 - 0$ (ρ – фиксировано), напряжения имеют классическую корневую особенность, которая наблюдалась и ранее на ребрах разрезов при решении плоских задач теории упругости. Исследуя поведение в вершине разрезов, из соотношения (3.3) можем определить, что напряжения ведут себя следующим образом $\sigma_{y|_{\rho=0}} \sim C(\theta) \cdot \rho^\gamma$, $\rho \sim 0+$, где $\alpha_0 < \theta < \pi - \beta_0$ – фиксировано, то есть в точке O напряжения имеют слабую степенную особенность, зависящую от геометрии разрезов. При этом отметим, что не существует равномерного по θ предела, когда $\rho \rightarrow 0+$. Проведенный анализ указывает, что напряженное состояние вблизи общей вершины разрезов является существенно трехмерным.

Особый интерес представляет случай, когда в точке O (фиг. 1) имеет место классическая корневая особенность ($\gamma = -1/2$). На фиг. 3 представлена кривая, указывающая соотношения между углами раствора разрезов α_0 и β_0 , при которых в вершине реализуется указанная особенность. Следует отметить, что полученная на фиг. 3 кривая близка к дуге окружности. Ответ на вопрос, будет ли эта кривая дугой окружности, требует дополнительного исследования бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.16), (2.17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Интегральные разложения, родственные преобразования Мелера – Фока // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 9. С. 1515–1523.
2. Парфененко Д.Н., Улитко А.Ф. Об одном новом интегральном преобразовании и использовании его в контактных задачах теории упругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 11. С. 53–58.
3. Парфененко Д.Н. Об особенностях поля напряжений в упругом массиве, содержащем плоский клиновидный в плане разрез // Математическое моделирование динамических процессов в системах тел с жидкостью. Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1988. С. 72–76.
4. Улитко А.Ф., Ловейкин А.В. Рівновага пружного простору, послабленого двома клиновидними в плані розрізами // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. Львів: Каменяр, 1999. Вып. 2. Т. 2. С. 229–233.

5. Улітко А.Ф., Ловейкін А.В. Задача про рівновагу простору з двома розрізами – по півплощині та клиноподібним в плані, які лежать в одній площині // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2000. Т. 43. № 1. С. 109–114.
6. Улітко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 263 с.
7. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.
8. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. V. 1. New York, ect.: Mc Grow-Hill, 1953. = Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965. 294 с.
9. Noble B. Methods based on the Wiener–Hopf technique for the solution of partial differential equations, L., ect.: Pergamon Press, 1958. = Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 280 с.

Киев

Поступила в редакцию
17.05.2001