МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2004

УДК 539.3

© 2004 г. Б.Д. АННИН, А.Е. АЛЕКСЕЕВ

УРАВНЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО СЛОИСТОГО ОВАЛЬНОГО ТЕЛА

Приводятся уравнения деформирования упругого неоднородного слоистого овального тела. Каждый слой представляет собой область, ограниченную выпуклыми эквидистантными (равноудаленными) поверхностями.

Различные способы построения теории упругого деформирования элементов многослойных конструкций изложены в [1–4]. В [5–7] разработана методика построения уравнений упругого деформирования слоя с произвольными граничными условиями на лицевых поверхностях. Для одних и тех же неизвестных величин используется несколько аппроксимаций в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра.

В [8–10] данный подход применялся при построении уравнений и решении задач упругого деформирования слоистых пластин и оболочек. При этом на межслойных границах выполняются условия сопряжения как в перемещениях, так и в напряжениях.

В данной работе эта же методика используется при построении системы уравнений упругого деформирования слоистого овального тела в неортогональной криволинейной системе координат.

1. Определение криволинейной системы координат. Пусть S – достаточно гладкая замкнутая выпуклая поверхность, причем начало координат O системы (x, y, z) лежит внутри S и главные радиусы кривизны во всех точках S не меньше $R_* > 0$.

Уравнение поверхности S можно представить [11–13] в виде

$$
\begin{aligned}
x &= x_S(\varphi, \psi) = F(\varphi, \psi)\cos\psi\cos\varphi - \frac{\partial F}{\partial \psi}\sin\psi\cos\varphi - \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\cos\psi} \\
y &= y_S(\varphi, \psi) = F(\varphi, \psi)\cos\psi\sin\varphi - \frac{\partial F}{\partial \psi}\sin\psi\sin\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} \\
z &= z_S(\varphi, \psi) = F(\varphi, \psi)\sin\psi + \frac{\partial F}{\partial \psi}\cos\psi
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

$$0 \le \varphi < 2\pi, \quad -\pi/2 < \psi < \pi/2$$

Функция $F(\varphi, \psi)$ называется опорной функцией поверхности S (расстояние от точки O до касательной к S плоскости П). Будем предполагать в дальнейшем, что $F(\varphi, \psi)$ периодическая по φ с периодом 2π, строго положительна и непрерывна вместе со своими производными по φ и ψ до второго порядка включительно и удовлетворяет условиям [12, 13]:

$$f(\varphi, \psi) \equiv \left(F + \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2}\right)\left(F\cos^2\psi - \frac{\partial F}{\partial \psi}\cos\psi\sin\psi + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\right) -$$

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\operatorname{tg}\psi+\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\psi}\right)^2\geq 0 \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2}\right|_{\psi=-\pi/2+0}=\left.\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2}\right|_{\psi=\pi/2-0}=0$$

Будем предполагать также, что

$$F+\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2}\geq 0,\ \ F\cos^2\psi-\frac{\partial F}{\partial\psi}\cos\psi\sin\psi+\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\geq 0 \tag{1.3}$$

Вектор единичной нормали $\mathbf{n}=(n_x, n_y, n_z)$ к S в точке поверхности S, соответствующей φ, ψ, определяется равенствами

$$n_x=\cos\varphi\cos\psi,\quad n_y=\sin\varphi\cos\psi,\quad n_z=\sin\psi \tag{1.4}$$

а расстояние от точки O до касательной плоскости П – равенством

$$x_S(\varphi,\psi)n_x+y_S(\varphi,\psi)n_y+z_S(\varphi,\psi)n_z=F(\varphi,\psi) \tag{1.5}$$

Заметим, что формулы (1.1) можно получить следующим образом. Продифференцируем (1.5) по φ и по ψ соответственно. Учитывая ортогональность вектора нормали n к векторам $(\partial x_S/\partial\varphi,\ \partial y_S/\partial\varphi,\ \partial z_S/\partial\varphi)$ и $(\partial x_S/\partial\psi,\ \partial y_S/\partial\psi,\ \partial z_S/\partial\psi)$ лежащим в касательной плоскости П, будем иметь следующие равенства:

$$-x_S\sin\varphi\cos\psi+y_S\cos\varphi\cos\psi=\partial F/\partial\varphi \tag{1.6}$$

$$-x_S\cos\varphi\sin\psi-y_S\sin\varphi\sin\psi+z_S\cos\psi=\partial F/\partial\psi \tag{1.7}$$

Из (1.5)–(1.7) следуют формулы (1.1).

Гауссова кривизна $K_S(\varphi,\psi)$ поверхности S определяется в виде

$$K_S(\varphi,\psi)=\cos^2\psi/f(\varphi,\psi) \tag{1.8}$$

Для точек поверхности S справедливы равенства

$$g_{\varphi\varphi}=\left(\frac{\partial x_S}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y_S}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z_S}{\partial\varphi}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\psi}\left(F(\varphi,\psi)\cos^2\psi-\frac{\partial F}{\partial\psi}\cos\psi\sin\psi+\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\operatorname{tg}\psi+\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\psi}\right)^2$$

$$g_{\psi\psi}=\left(\frac{\partial x_S}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y_S}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z_S}{\partial\psi}\right)^2=\left(F+\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2}\right)^2+\frac{1}{\cos^2\psi}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\operatorname{tg}\psi+\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\psi}\right)^2$$

$$g_{\varphi\psi}=\frac{\partial x_S}{\partial\varphi}\frac{\partial x_S}{\partial\psi}+\frac{\partial y_S}{\partial\varphi}\frac{\partial y_S}{\partial\psi}+\frac{\partial z_S}{\partial\varphi}\frac{\partial z_S}{\partial\psi}=\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\operatorname{tg}\psi+\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\partial\psi}\right)\left(2F+\frac{\partial^2 F}{\partial\psi^2}-\frac{\partial F}{\partial\psi}\operatorname{tg}\psi+\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\frac{1}{\cos^2\psi}\right)$$

$$\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{\psi\psi}-g_{\varphi\psi}^2}=f(\varphi,\psi)/\cos\psi$$

Пример. Пусть $F^* = an_x^2 + bn_y^2 + cn_z^2$, где $a \ge b \ge c > 0$. Неравенство (1.2) будет выполнено в двух случаях: (*1*) $b \le \min\{a/2, 2c\}$; (*2*) $a \le 2c$.

Во втором случае рассматриваемая поверхность близка к поверхности эллипсоида с полуосями a, b, c, для которого опорная функция равна $F_Э = \sqrt{(an_x)^2 + (bn_y)^2 + (cn_z)^2}$.

Рассмотрим криволинейную систему координат

$$
\begin{aligned}
x &= x(\alpha, \varphi, \psi) = (F(\varphi, \psi) + \alpha)\cos\psi\cos\varphi - \frac{\partial F}{\partial\psi}\sin\psi\cos\varphi - \frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{\cos\psi} \\
y &= y(\alpha, \varphi, \psi) = (F(\varphi, \psi) + \alpha)\cos\psi\sin\varphi - \frac{\partial F}{\partial\psi}\sin\psi\sin\varphi + \frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} \\
z &= z(\alpha, \varphi, \psi) = (F(\varphi, \psi) + \alpha)\sin\psi + \frac{\partial F}{\partial\psi}\cos\psi
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

$$\alpha \ge 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad -\pi/2 < \psi < \pi/2$$

При $\alpha = \text{const}$ поверхность, определяемая уравнениями (1.9), является равноудаленной (эквидистантной) на расстоянии α от поверхности S. Будем обозначать ее S_α. Нормаль к поверхности S_α в точке, соответствующей φ, ψ, определяется равенствами (1.4).

Якобиан преобразования (1.9) равен

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = \cos\psi / K_{S_\alpha}(\varphi, \psi) \tag{1.10}$$

Значение гауссовой кривизны K_{S_α} для поверхности S_α определяется из равенства (1.8), в котором следует заменить F на $F + \alpha$.

Для $\alpha > 0$ неравенства (1.2) и (1.3) при замене F на $F + \alpha$ сохраняются, поэтому якобиан (1.10) не меняет знак при $\alpha > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 \le \psi \le \pi/2$.

2. Уравнения линейной теории упругости в криволинейной системе координат (ξ^k). Рассмотрим постановку задачи линейной теории упругости в произвольной криволинейной системе координат (ξ^k). Уравнения равновесия сплошной среды в векторной форме [14] записываются в виде (массовыми силами пренебрегаем):

$$\hat{\mathbf{t}}^i_{,i} = 0, \quad \hat{\mathbf{t}}^i = J\mathbf{t}^i, \quad \mathbf{t}^i = \sigma^{ij}\mathbf{g}_j \tag{2.1}$$

$$\mathbf{g}_i \times \mathbf{t}^i = 0 \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{g}_i$ – ковариантный базис криволинейной системы координат (ξ^k); $J(J = \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3))$ – якобиан преобразования координат; σ^{ij} – контрвариантные компоненты тензора напряжений. Равенство (2.2) является условием симметрии тензора напряжений.

Тензор деформаций e_{ij} определяется через вектор перемещений $\mathbf{u}$ в виде

$$2e_{ij} = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j}) + (\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{u}_{,i}) \tag{2.3}$$

Обобщенный закон Гука, связывающий напряжения и деформации, имеет вид

$$\sigma^{ij} = C^{ijks}e_{ks} \tag{2.4}$$

где C^{ijks} – контравариантные компоненты тензора четвертого ранга, определяющего свойства упругой среды. В случае изотропного тела

$$C^{ijks} = \lambda g^{ij} g^{ks} + \mu(g^{ik} g^{js} + g^{is} g^{jk}) \tag{2.5}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

где g^{ij} – контравариантные компоненты метрического тензора криволинейной системы координат (ξ^k); λ, μ – постоянные Ламе; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

3. Уравнения упругого деформирования овальной оболочки. Рассмотрим овальную оболочку толщины $2h$ в криволинейной системе координат (1.9), ограниченную координатными поверхностями α_1, α_2; $0 < \alpha_1 < \alpha_2 = \alpha_1 + 2h$. В направлении α введем координату $\xi^3 \in [-1, 1]$, $\alpha = \alpha_0 + h\xi^3$, $\alpha_0 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$. Для удобства изложения обозначим $\xi^1 = \psi$, $\xi^2 = \varphi$.

Неизвестные функции $\mathbf{u}$, $\hat{t}^i$ можно представить в виде рядов по полиномам Лежандра

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{u}]^k P_k(\xi^3), \quad \hat{\mathbf{t}}^i = \sum_{k=0}^{\infty} [\hat{\mathbf{t}}^i]^k P_k(\xi^3) \tag{3.1}$$

где $P_k(\xi^3)$ – ортогональные полиномы Лежандра; $[\mathbf{u}]^k$, $[\hat{\mathbf{t}}^i]^k$ – коэффициенты разложения, зависящие от координат ξ^α:

$$[\mathbf{u}]^k = \frac{1+2k}{2}\int_{-1}^{1} \mathbf{u} P_k d\xi^3, \quad [\hat{\mathbf{t}}^i]^k = \frac{1+2k}{2}\int_{-1}^{1} \hat{\mathbf{t}}^i P_k d\xi^3$$

Здесь и в дальнейшем латинские индексы пробегают значения от 1 до 3, а греческие – от 1 до 2.

Поверхность $\xi^3 = 0$ является срединной поверхностью оболочки. В системе координат (ξ^i) имеют место равенства [15], связывающие ковариантный базис оболочки $\mathbf{g}_\alpha$ с ковариантным базисом срединной поверхности $\overset{\circ}{\mathbf{g}}_\alpha$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\alpha &= m_\alpha^\beta \overset{\circ}{\mathbf{g}}_\beta, \quad \mathbf{g}_3 = h\mathbf{n} \\ m_\alpha^\beta &= \delta_\alpha^\beta - b_\alpha^\beta h \xi^3, \quad b_\alpha^\beta = -(\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}{}^\beta) \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{g}}{}^\beta$ – контравариантный локальный базис срединной поверхности оболочки, $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к срединной поверхности.

Здесь и в дальнейшем индекс нолик означает, что данная величина относится к срединной поверхности.

В соответствии с [6] напряжения аппроксимируются отрезками рядов (3.1):

$$\hat{\mathbf{t}}^\alpha \cong \hat{\mathbf{T}}^\alpha = \frac{1}{2h}\hat{\mathbf{N}}^\alpha P_0 + \frac{3}{2h^2}\hat{\mathbf{M}}^\alpha P_1$$

$$\hat{\mathbf{t}}^3 \cong \hat{\mathbf{T}}^3 = \hat{\mathbf{P}}_0 P_0 + \hat{\mathbf{P}}_\Delta P_1 + (P_2 - P_0)\left(\mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{P}}_0 \times \mathbf{n}) - \frac{\hat{\mathbf{Q}}}{2h}\right) \tag{3.3}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_\Delta = (\hat{\mathbf{P}}^+ - \hat{\mathbf{P}}^-)/2, \quad \hat{\mathbf{P}}_0 = (\hat{\mathbf{P}}^+ + \hat{\mathbf{P}}^-)/2$$

$$\hat{\mathbf{N}}^\alpha = \overset{\circ}{J}\mathbf{N}^\alpha = h\int_{-1}^{1}\hat{\mathbf{t}}^\alpha d\xi^3 \cong \overset{\circ}{J}h\int_{-1}^{1}(\sigma^{\alpha\gamma}m_\gamma^\beta\overset{\circ}{\mathbf{g}}_\beta + \sigma^{\alpha 3}h\mathbf{n})d\xi^3$$

$$\hat{\mathbf{M}}^\alpha = \overset{\circ}{J}\mathbf{M}^\alpha = h^2\int_{-1}^{1}\mathbf{n}\times(\hat{\mathbf{t}}^\alpha\times\mathbf{n})\xi^3 d\xi^3 \cong \overset{\circ}{J}h^2\int_{-1}^{1}\sigma^{\alpha\gamma}\overset{\circ}{\mathbf{g}}_\gamma\xi^3 d\xi^3 \qquad (3.4)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \overset{\circ}{J}\mathbf{Q} = h\int_{-1}^{1}\mathbf{n}\times(\hat{\mathbf{t}}^3\times\mathbf{n})\xi^3 d\xi^3 \cong h\overset{\circ}{J}\int_{-1}^{1}\sigma^{\alpha 3}\overset{\circ}{\mathbf{g}}_\alpha d\xi^3$$

Перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{n}) + \mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})$ аппроксимируются отрезками рядов

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{n}) \cong \mathbf{V} = \mathbf{v}P_0 + \boldsymbol{\psi}P_1 + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v})P_2 + (\mathbf{v}_\Delta - \boldsymbol{\psi})P_3$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} \cong W = w_0P_0 + w_\Delta P_1 + (w_0 - w)P_2 \qquad (3.5)$$

$$\mathbf{v}_\Delta = (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-)/2, \quad \mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-)/2, \quad w_\Delta = (w^+ - w^-)/2, \quad w_0 = (w^+ + w^-)/2$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{n})d\xi^3, \quad \boldsymbol{\psi} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{n})\xi^3 d\xi^3, \quad w = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})d\xi^3$$

$$w^\pm = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\big|_{\xi^3 = \pm 1}, \quad \mathbf{v}^\pm = \mathbf{n}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{n})\big|_{\xi^3 = \pm 1}$$

Деформации (2.3) также аппроксимируются отрезками рядов

$$e_{\alpha\beta} \cong E_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}P_0 + \kappa_{\alpha\beta}P_1$$

$$e_{\alpha 3} \cong E_{\alpha 3} = \varepsilon_{\alpha 3}P_0 + \kappa_{\alpha 3}P_1 + \omega_{\alpha 3}P_2 \qquad (3.6)$$

$$e_{33} \cong E_{33} = \varepsilon_{33}P_0 + \kappa_{33}P_1$$

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\mathbf{g}}_\alpha\cdot\mathbf{v}_{,\beta} + \overset{\circ}{\mathbf{g}}_\beta\cdot\mathbf{v}_{,\alpha}, \quad 2\varepsilon_{\alpha 3} = \overset{\circ}{\mathbf{g}}_\alpha\cdot\mathbf{v}_\Delta + h\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{,\alpha}, \quad \varepsilon_{33} = hw_\Delta$$

$$2\kappa_{\alpha\beta} = h(\mathbf{n}_{,\alpha}\cdot\mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{n}_{,\beta}\cdot\mathbf{v}_{,\alpha}) + \overset{\circ}{\mathbf{g}}_\alpha\cdot\boldsymbol{\psi}_{,\beta} + \overset{\circ}{\mathbf{g}}_\beta\cdot\boldsymbol{\psi}_{,\alpha}$$

$$2\kappa_{\alpha 3} = 3\overset{\circ}{\mathbf{g}}_\alpha\cdot(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}), \quad \kappa_{33} = 3h(w_0 - w)$$

$$2\omega_{\alpha 3} = 5\overset{\circ}{\mathbf{g}}_\alpha\cdot(\mathbf{v}_\Delta - \boldsymbol{\psi})$$

Закон Гука (2.4) аппроксимируется по формулам

$$\sigma^{ij} = \overset{\circ}{C}{}^{ijks}E_{ks} \qquad (3.7)$$

Найдем связь усилий $\hat{\mathbf{N}}^{\alpha}$, моментов $\hat{\mathbf{M}}^{\alpha}$ и внешних поверхностных сил $\hat{\mathbf{P}}^{\pm}$ с деформациями E_{ks} из (3.6). Аппроксимации закона Гука (3.7) подставим в формулы (3.4). После интегрирования с учетом ортогональности полиномов Лежандра получаем

$$\hat{\mathbf{N}}^{\alpha} = 2h\mathring{J}\left(\mathring{C}^{\alpha iks}\mathring{\mathbf{g}}_i\varepsilon_{ks} + \frac{1}{3}\mathring{C}^{\alpha\beta ks}h\mathbf{n}_{,\beta}\kappa_{ks}\right), \quad \hat{\mathbf{M}}^{\alpha} = \frac{2h^2}{3}\mathring{J}\mathring{C}^{\alpha\gamma ks}\mathring{\mathbf{g}}_{\gamma}\kappa_{ks}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\Delta} = h\mathring{J}\mathring{C}^{3iks}\mathring{\mathbf{g}}_i\kappa_{ks}, \quad \hat{\mathbf{P}}_0 = h\mathring{J}(\mathring{C}^{3iks}\mathring{\mathbf{g}}_i\varepsilon_{ks} + \mathring{C}^{3\gamma\alpha 3}\mathring{\mathbf{g}}_{\gamma}2\omega_{\alpha 3}) \tag{3.8}$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = 2h\mathring{J}\mathring{C}^{\alpha 3ks}\mathring{\mathbf{g}}_{\alpha}\varepsilon_{ks}$$

В случае изотропной среды (2.5) из (3.8) можно получить следующие выражения для усилий, моментов:

$$\hat{\mathbf{N}}^{\alpha} = 2h\mathring{J}\left[\tilde{\mathbf{C}}^{\alpha\beta\lambda\mu}\mathring{\mathbf{g}}_{\gamma}\left(\delta^{\gamma}_{\beta}\varepsilon_{\lambda\mu} - \frac{1}{3}hb^{\gamma}_{\beta}\kappa_{\lambda\mu}\right) + \mathbf{n}\frac{5\mu}{6h}\mathring{g}^{\alpha\beta}(h\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_{,\beta} + \mathring{\mathbf{g}}_{\beta}\cdot\psi) +\right.$$

$$\left. + \frac{\lambda h}{\lambda + 2\mu}\mathring{g}^{\alpha\beta}\mathring{\mathbf{g}}_{\gamma}\left(\delta^{\gamma}_{\beta}(\mathbf{P}_0\cdot\mathbf{n}) - \frac{1}{3}hb^{\gamma}_{\beta}(\mathbf{P}_{\Delta}\cdot\mathbf{n})\right) + h\mathbf{n}\frac{1}{6}(\mathbf{P}_0\cdot\mathring{\mathbf{g}}^{\alpha})\right] \tag{3.9}$$

$$\hat{\mathbf{M}}^{\alpha} = \frac{2h^2}{3}\mathring{J}\mathring{\mathbf{g}}_{\beta}\left[\tilde{\mathbf{C}}^{\alpha\beta\lambda\mu}\kappa_{\lambda\mu} + \frac{\lambda h}{\lambda + 2\mu}(\mathbf{P}_{\Delta}\cdot\mathbf{n})\mathring{g}^{\alpha\beta}\right], \quad \hat{\mathbf{Q}} = \frac{2}{h}\mu\mathring{J}\mathring{\mathbf{g}}^{\beta}2\varepsilon_{\beta 3}$$

и поверхностных сил на лицевых поверхностях

$$\mathbf{q}_{\Delta} = \frac{3}{h}\mu(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}), \quad \mathbf{q}_0 = \frac{5}{h}\mu(\mathbf{v}_{\Delta} - \psi) + \frac{1}{2}\mathbf{Q}$$

$$p_0 = \frac{2\mu}{h}w_{\Delta} + \frac{\nu}{2h}N, \quad p_{\Delta} = \frac{6}{h}\mu(w_0 - w) + \frac{3\nu}{2h^2}M$$

$$\tilde{C}^{\alpha\beta\lambda\mu} = \tilde{\lambda}\mathring{g}^{\alpha\beta}\mathring{g}^{\lambda\mu} + \mu(\mathring{g}^{\alpha\lambda}\mathring{g}^{\beta\mu} + \mathring{g}^{\alpha\mu}\mathring{g}^{\beta\lambda}), \quad \tilde{\lambda} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}$$

$$\mathbf{q}_{\Delta} = (\mathbf{q}^{+} - \mathbf{q}^{-})/2, \quad \mathbf{q}_0 = (\mathbf{q}^{+} + \mathbf{q}^{-})/2 \tag{3.10}$$

$$p_{\Delta} = (p^{+} - p^{-})/2, \quad p_0 = (p^{+} - p^{-})/2$$

$$N = \mathbf{N}^{\alpha}\cdot\mathring{\mathbf{g}}_{\alpha} - h(\mathbf{n}_{,\beta}\cdot\mathring{\mathbf{g}}_{\alpha})(\mathbf{M}^{\alpha}\cdot\mathring{\mathbf{g}}^{\beta}), \quad M = \mathbf{M}^{\alpha}\cdot\mathring{\mathbf{g}}_{\alpha}$$

$$\mathbf{q}^{\pm} = h\sigma^{3\alpha}\mathring{\mathbf{g}}_{\alpha}\Big|_{\xi^3 = \pm 1}, \quad p^{\pm} = h^2\sigma^{33}\Big|_{\xi^3 = \pm 1}$$

Уравнения равновесия для усилий и моментов получаются путем подстановки аппроксимаций (3.3) в равенства

$$\int_{-1}^{1}\hat{\mathbf{t}}^{i}_{,i}P_0 d\xi^3 = 0, \quad \int_{-1}^{1}(\hat{\mathbf{t}}^{i}_{,i}\times\mathbf{n})P_1 d\xi^3 = 0$$

В результате имеем

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{N}}^{\alpha}_{,\alpha} + 2\hat{\mathbf{P}}_{\Delta} = 0 \\
&(\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{M}}^{\alpha})_{,\alpha} + \overset{\circ}{\mathbf{g}}_{\alpha}\times\hat{\mathbf{N}}^{\alpha} + 2h\hat{\mathbf{P}}_0 = 0
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Аналогичные уравнения получены в [14]. При выводе уравнений (3.11) использовалось тождество $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{n}\times(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_{\alpha}\times\hat{\mathbf{N}}^{\alpha})$.

Дополняя уравнения (3.9)–(3.11) граничными условиями на лицевых поверхностях ($\xi^3 = \pm h$), получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений десятого порядка.

4. Уравнения слоистого тела, составленного из параллельных слоев. Рассмотрим поверхность S_0 с опорной функцией $F_0(\xi^1, \xi^2)$. Поверхности $S_i(i = \overline{1, n})$ с опорными функциями $F_i(\xi^1, \xi^2) = F_{i-1}(\xi^1, \xi^2) + 2h_i$ образуют семейство эквидистантных поверхностей S_i, причем расстояние между соседними поверхностями S_i, S_{i-1} равно $2h_i$.

Пусть B – слоистое тело, составленное из монослоев $B_i(i = \overline{1, n})$, ограниченных поверхностями S_{i-1}, S_i. Обозначим верхним индексом i величины, относящиеся к слою B_i. Тогда из алгебраических уравнений закона Гука (3.10), аналогично работам [9, 10], можно получить выражения для перемещений $(\mathbf{u}^+)^i = (\mathbf{v}^+)^i + \mathbf{n}(w^+)^i$ и напряжений $(\mathbf{P}^+)^i = (\mathbf{q}^+)^i + n(p^+)^i$ на поверхностях межслойного контакта $S_i(i = \overline{1, n-1})$:

$$
\begin{aligned}
(p^+)^i &= \frac{3E^i}{h^i}(w^i - (w^-)^i) - 2(p^-)^i + \frac{3\nu^i}{2h^i}\left(N^i - \frac{M^i}{h^i}\right) \\
(\mathbf{q}^+)^i &= \frac{15}{h^i}\mu^i((\mathbf{v}^-)^i + \boldsymbol{\psi}^i - \mathbf{v}^i) + 4(\mathbf{q}^-)^i - \frac{3}{2}\frac{\mathbf{Q}^i}{h^i} \\
(w^+)^i &= -2(w^-)^i + 3W^i - \frac{h^i}{E^i}(p^-)^i + \frac{\nu^i}{2E^i}\left(N^i - \frac{3M^i}{h^i}\right) \\
(\mathbf{v}^+)^i &= 4(\mathbf{v}^-)^i + 5\boldsymbol{\psi}^i - 3\mathbf{v}^i + \frac{h^i}{\mu^i}(\mathbf{q}^-)^i - \frac{\mathbf{Q}^i}{2\mu^i}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

На поверхностях межслойного контакта должны быть выполнены условия непрерывности напряжений

$$
(\mathbf{q}^+)^i = (\mathbf{q}^-)^{i+1}, \quad (p^+)^i = (p^-)^{i+1} \tag{4.2}
$$

и перемещений

$$
(\mathbf{v}^+)^i = (\mathbf{v}^-)^{i+1}, \quad (w^+)^i = (w^-)^{i+1} \tag{4.3}
$$

В дальнейшем ограничимся случаем, когда на лицевых поверхностях S_0, S_n слоистого тела B заданы напряжения

$$
(\mathbf{q}^-)^1 = \mathbf{F}_0, \quad (\mathbf{q}^+)^n = \mathbf{F}_n, \quad (p^-)^1 = G_0, \quad (p^+)^n = G_n \tag{4.4}
$$

Уравнения (4.1)–(4.4) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно перемещений $(\boldsymbol{\upsilon}^+)^i$, $(w^+)^i$ и напряжений $(\mathbf{q}^+)^i$, $(p^+)^i$ на поверхностях межслойного контакта $S_i(i = \overline{1, n-1})$ и перемещений V_0, V_n, W_0, W_n на лицевых поверхностях S_0, S_n. Решая эту систему, получим

$$
\begin{aligned}
(p^+)^i &= A_1^i G_n + A_2^i G_0 + \sum_{k=1}^{i} (a_{1k}^i w^k + a_{2k}^i N^k + a_{3k}^i M^k) \\
(w^+)^i &= B_1^i G_n + B_2^i G_0 + \sum_{k=1}^{i} (b_{1k}^i w^k + b_{2k}^i N^k + b_{3k}^i M^k) \\
(\mathbf{q}^+)^i &= C_1^i \mathbf{F}_n + C_2^i \mathbf{F}_0 + \sum_{k=1}^{i} (c_{1k}^i \mathbf{v}^k + c_{2k}^i \boldsymbol{\psi}^k + c_{3k}^i \mathbf{Q}^k) \\
(\mathbf{v}^+)^i &= D_1^i \mathbf{F}_n + D_2^i \mathbf{F}_0 + \sum_{k=1}^{i} (d_{1k}^i \mathbf{v}^k + d_{2k}^i \boldsymbol{\psi}^k + d_{3k}^i \mathbf{Q}^k) \qquad (4.5) \\
W_n = (w^+)^n &= B_1^n G_n + B_2^n G_0 + \sum_{k=1}^{n} (b_{1k}^n w^k + b_{2k}^n N^k + b_{3k}^n M^k) \\
W_0 = (w^-)^1 &= B_1^0 G_n + B_2^0 G_0 + \sum_{k=1}^{n} (b_{1k}^0 w^k + b_{2k}^0 N^k + b_{3k}^0 M^k) \\
\mathbf{V}_n = (\mathbf{v}^+)^n &= D_1^n \mathbf{Q}_n + D_2^n \mathbf{Q}_0 + \sum_{k=1}^{n} (d_{1k}^n \mathbf{v}^k + d_{2k}^n \boldsymbol{\psi}^k + d_{3k}^n \mathbf{Q}^k) \\
\mathbf{V}_0 = (\mathbf{v}^-)^1 &= D_1^0 \mathbf{Q}_n + D_2^0 \mathbf{Q}_0 + \sum_{k=1}^{n} (d_{1k}^0 \mathbf{v}^k + d_{2k}^0 \boldsymbol{\psi}^k + d_{3k}^0 \mathbf{Q}^k)
\end{aligned}
$$

Подставляя выражения (4.5) в формулы (3.9)–(3.11), после преобразований получим систему уравнений в частных производных

$$
\frac{\partial}{\partial \xi^1}(G_1 \cdot \mathbf{X}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2}(G_2 \cdot \mathbf{X}) = G_3 \cdot \mathbf{X} + G_4 \qquad (4.6)
$$

Здесь $G_k (k = 1, \ldots, 4)$ – матрицы размерности $10n \times 10n$, а $\mathbf{X} = (\mathbf{v}^i, \boldsymbol{\psi}^i, w^i, \mathbf{N}^i, \mathbf{M}^i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ – вектор неизвестных функций.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–00649).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф.* Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 15. С. 3–68.
2. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
3. *Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. думка, 1988. 279 с.

4. *Григолюк Э.И., Коган Е.А., Мамай В.И.* Проблемы деформирования тонкостенных слоистых конструкций с расслоениями // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 6–32.
5. *Иванов Г.В.* Теория пластин и оболочек. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1980. 84 с.
6. *Алексеев А.Е.* Линейная теория упругого деформирования слоя переменной толщины. Препринт № 6–96. Новосибирск: Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики СО РАН. С. 1–39.
7. *Волчков Ю.М., Дергилева Л.А., Иванов Г.В.* Численное моделирование напряженных состояний в плоских задачах упругости методом слоев // ПМТФ. 1994. Т. 35. № 6. С. 129–135.
8. *Алексеев А.Е.* Изгиб трехслойной ортотропной балки // ПМТФ. 1995. Т. 36. № 3. С. 158–166.
9. *Алексеев А.Е., Алехин В.В., Аннин Б.Д.* Плоская задача теории упругости для неоднородного слоистого тела // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 6. С. 136–141.
10. *Алексеев А.Е., Аннин Б.Д.* Уравнения деформирования упругого неоднородного слоистого тела вращения // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 3. С. 157–163.
11. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. Т. 1. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 330 с.
12. *Лигун А.А., Тимченко С.В., Шумейко А.А.* О геометрии выпуклых поверхностей // Вістн. Дніпропетров. ун-ту. Математика. 1998. Т. 3. С. 85–92.
13. *Лигун А.А., Шумейко А.А., Тимченко С.В.* Об одном представлении выпуклых поверхностей в n-мерных пространствах // Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 1. С. 17–19.
14. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.
15. *Naghdy P.M.* Foundation of elastic shell theory // Progress in Solid Mechanics. Amsterdam: North Holland, 1963. V. 4. P. 1–90.

Новосибирск

Поступила в редакцию
9.09.2003