

УДК 533.6.013.42

© 2004 г. А.Г. ГОРШКОВ, С.И. ЖАВОРОНОК, А.Л. МЕДВЕДСКИЙ,
 Л.Н. РАБИНСКИЙ

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ
 НА ТОНКОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПАНЕЛИ, ПОМЕЩЕННОЙ
 В ЖЕСТКИЙ ЭКРАН**

Рассматривается плоская задача дифракции нестационарных акустических волн на тонкой упругой ортотропной криволинейной панели, заключенной в абсолютно жесткий экран. Для определения гидродинамического давления, действующего на оболочку, используется переходная функция, построенная на основании уточненной гипотезы тонкого слоя [1–3].

1. Постановка задачи. Тонкая выпуклая цилиндрическая упругая оболочка толщиной h помещена в абсолютно жесткий экран, который контактирует с акустической средой (ρ_0, c_0 – плотность и скорость звука в среде). Материал оболочки характеризуется модулями упругости первого E_i и второго рода G_{ij} , коэффициентами Пуассона ν_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) и плотностью ρ .

Оболочка представляет собой объем $\Omega \in R^3$, ограниченный поверхностью $\partial\Omega = S^F \cup S^B$, где $S^F = S^+ \cup S^-$, $S^+ \cap S^- = \emptyset$ – лицевые поверхности оболочки, S^B – боковые поверхности оболочки. В качестве поверхности привязки будем использовать срединную поверхность Π , заданную параметрически в виде

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2), \quad (\xi^1, \xi^2) \in D_\xi \subset R^2; \quad \partial\Pi = \Pi \cap S^B \\ \mathbf{r}_0 &= x_0^i(\xi^j) \mathbf{e}_j \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь \mathbf{e}_i – ортонормированный базис декартовой прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$.

Определим на основании (1.1) векторы локального базиса \mathbf{e}_α , вектор нормали к срединной поверхности \mathbf{n} , ковариантные компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и ковариантные компоненты тензора кривизны $b_{\alpha\beta}$ срединной поверхности

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^\alpha}, \quad g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta, \quad b_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \xi^\beta} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) / |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| \tag{1.2}$$

Здесь и далее принято правило суммирования по повторяющимся индексам, причем греческие индексы пробегают значения 1, 2. Положение точки в нормально связанной со срединной поверхностью системе криволинейных координат определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0(\xi^j) + \zeta \mathbf{n}(\xi^j), \quad \zeta \in R \quad (j = 1, 2) \\ \mathbf{r} &= x^i(\xi^j) \mathbf{e}_i, \quad x^i(\xi^j) = x_0^i(\xi^j) + \zeta n^i(\xi^j) \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ плоская падающая волна с давлением на фронте $p_* = f(x^i, t)$, распространяющаяся в акустической среде, касается оболочки в точке A (фиг. 1). Плоский фронт волны определяется вектором единичной нормали \mathbf{u} . В начальный момент времени оболочка и среда находятся в невозмущенном состоя-

где Φ_* – потенциал скорости падающей на оболочку волны, $\partial/\partial\zeta$ – производная по нормали к срединной поверхности Π , w – прогиб оболочки.

Таким образом, поставленная задача сводится к совместному решению уравнений (1.4) и (1.6) с однородными начальными условиями (1.5) и (1.7), граничными условиями (1.8) и условиями непротекания (1.9).

Давление, действующее на оболочку ($p = p_* + p_1 + p_2$), складывается из давления в падающей волне p_* , давления p_1 в отраженной и p_2 в излученной волнах, которые могут быть найдены с помощью переходной функции $G(\mathbf{r}, t)$ (звездочкой обозначена операция свертки по времени t)

$$p_1 = -\rho_0 \left. \frac{\partial \Phi_*}{\partial \zeta} \right|_{\Pi} * G_p \quad (1.11)$$

$$p_2 = \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} * G_p \quad (1.12)$$

$$G_p = -\frac{\partial G_0}{\partial t}, \quad G_0 = G|_{\Pi} \quad (1.13)$$

При этом функция влияния $G(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет следующей начально-краевой задаче:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta G \quad (1.14)$$

$$G|_{t=0} = \left. \frac{\partial G}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (1.15)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right|_{\Pi} = \delta(t), \quad G(\mathbf{r}, t) = O(1) \quad \text{при} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (1.16)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

В силу достаточной произвольности срединной поверхности оболочки Π получить аналитическое решение задачи (1.14) – (1.16) невозможно. Поэтому рассмотрим один из возможных путей решения указанной задачи в рамках упрощающей гипотезы, основанной на теории тонкого слоя [1–3], прилежащего к оболочке. В связи с этим целесообразно описать геометрически и оболочку, и тонкий слой акустической среды в единой системе координат (1.1) – (1.3). Также для определения переходной функции $G(\mathbf{r}, t)$ в начальные моменты взаимодействия могут быть использованы асимптотические представления последней при $t \rightarrow 0$.

2. Основные соотношения теории тонких ортотропных оболочек. Построим математическую модель процесса нестационарного взаимодействия акустической среды и оболочки на основании линейной теории тонких оболочек. Воспользуемся моделью Рейсснера – Тимошенко, учитывающей поперечный сдвиг и приводящей к системе уравнений гиперболического типа в системе криволинейных координат (1.1) – (1.3).

Будем рассматривать оболочки постоянной малой толщины, т.е.

$$h = \text{const}, \quad h/\lambda \ll 1, \quad \lambda = \min(d, R_1, R_2), \quad R_\alpha = -k_\alpha^{-1}$$

$$d = \begin{cases} \text{supp}_{\Pi}(A, B), & \rho_{\Pi} = \inf|AB|, \quad \partial\Pi \neq \emptyset \\ \text{supp}(A, B), & \rho = \inf|AB|, \quad \partial\Pi = \emptyset \end{cases}$$

Здесь d – диаметр оболочки, R_α – главные радиусы кривизны.

Уравнения движения тонкой оболочки и кинематические соотношения в этом случае имеют вид [4]:

$$\rho h \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial t^2} = \nabla_\beta T^{\alpha\beta} - b_\beta^\alpha Q^\beta + q^\beta \quad (2.1)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha Q^\alpha + p, \quad \rho h \frac{\partial^2 \chi^\alpha}{\partial t^2} = \nabla_\beta M^{\alpha\beta} - Q^\alpha$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 1/2 (\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha) - b_{\alpha\beta} w \quad (2.2)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = 1/2 (\nabla_\alpha \chi_\beta + \nabla_\beta \chi_\alpha) + 1/2 (b_\alpha^\gamma \nabla_\gamma u_\beta + b_\beta^\gamma \nabla_\gamma u_\alpha) - b_\alpha^\gamma b_{\gamma\beta} w$$

Здесь $T^{\alpha\beta}$ – контравариантные компоненты тензора тангенциальных усилий; Q^α – контравариантные компоненты вектора поперечных сил; $M^{\alpha\beta}$ – контравариантные компоненты тензора моментов; p – нормальное давление на срединной поверхности оболочки; q^β – контравариантные компоненты вектора касательной нагрузки на срединной поверхности; u_α, u^α – ковариантные и контравариантные компоненты вектора тангенциального перемещения срединной поверхности; χ_α, χ^α – ковариантные и контравариантные компоненты вектора углов поворота нормали срединной поверхности; $\varepsilon_{\alpha\beta}$ – ковариантные компоненты тензора тангенциальной деформации; $\kappa_{\alpha\beta}$ – ковариантные компоненты тензора изменения кривизн.

Физические соотношения для ортотропной оболочки примем в виде

$$T^{\alpha\beta} = \tilde{T}^{\alpha\beta} - b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}, \quad \tilde{T}^{\alpha\beta} = h C^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad M^{\alpha\beta} = I C^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta} \quad (2.3)$$

$$Q^\alpha = h \hat{k}^2 C^{\alpha\beta\gamma\delta} (\chi_\beta - \nabla_\beta w + b_\beta^\gamma u_\gamma), \quad I = h^3/12, \quad \hat{k}^2 = 5/6$$

где \hat{k} – параметр, связанный с законом распределения касательных усилий по толщине оболочки.

Компоненты тензора упругих констант C^{ijpq} определяются через технические постоянные E_i, G_{ij} и ν_{ij} согласно [5].

Условия сопряжения акустической среды с упругой оболочкой запишем в виде

$$(v_{*n} + v_n) \Big|_\Pi = \partial w / \partial t, \quad v_{*n} = v_{*n}^\alpha n^\alpha, \quad v_n = v_n^\alpha n^\alpha \quad (2.4)$$

Здесь v_{*n} – скорость в падающей волне, v_n – скорость в отраженной волне, вычисленные по нормали к поверхности оболочки.

Для построения численного решения нестационарной задачи наиболее пригодной представляется безразмерная постановка задачи в перемещениях. В частном случае плоской задачи для оболочки в форме криволинейного цилиндра $\xi^2 = x^3$:

$$u_i = u_i(\xi^1), \quad w = w(\xi^1), \quad \chi_i = \chi_i(\xi^1) \quad (2.5)$$

причем в случае плоской деформации $u_2 \equiv 0, \chi_2 \equiv 0$. Число компонентов вектора состояния, таким образом, сокращается до трех: u_1, w, χ_1 .

Таким образом, неизвестным является вектор обобщенных перемещений $\mathbf{u}(x, \tau) = (\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{\chi})^T$, где \tilde{u} – безразмерное тангенциальное перемещение, \tilde{w} – безразмерный прогиб, $\tilde{\chi}$ – угол поворота нормали, определяемые соотношениями

$$\tilde{u} = u/a, \quad \tilde{w} = w/a, \quad \tilde{\chi} = \chi \quad (2.6)$$

где a – характерный линейный размер оболочки.

Далее введем следующие безразмерные параметры и величины

$$\xi = \frac{\xi^1}{a} \quad (m_1 \in \mathbb{R}), \quad \tau = \frac{tc_0}{a}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{a} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} = \frac{a}{c_0} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho_0 c_0^2}$$

Здесь ρ_0 – плотность, c_0 – скорость в акустической среде. Далее всюду используются безразмерные переменные, тильды опущены.

Разрешающие уравнения следует записать в форме (1.6):

$$\partial^2 \mathbf{u} / \partial \tau^2 = \mathbf{L} \mathbf{u} + \mathbf{p} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{C} \frac{d}{d\xi^2} + \mathbf{B} \frac{d}{d\xi} + \mathbf{A} \quad (2.9)$$

пригодной для численного решения дискретного аналога задачи (\mathbf{L} – линейный оператор задачи, \mathbf{p} – вектор-функция правых частей).

В общем случае построение разрешающих уравнений (2.8) в криволинейных координатах, связанных с поверхностью произвольной формы, на основании тензорных соотношений (2.1) – (2.3) весьма затруднительно. В то же время использование систем компьютерной алгебры, поддерживающих основные операции тензорного анализа, позволяет автоматизировать процесс перехода от общей постановки задачи к ее операторной записи (2.8) в конкретной системе координат. В данном случае будем использовать систему Maple с пакетом расширения Tensor.

Задача (2.8), (2.9) аппроксимируется решаемым численно дискретным аналогом. Для уравнения гиперболического типа (2.8) используем явную конечно-разностную схему на пятиточечном шаблоне “крест”. Область построения решения аппроксимируется множеством $\omega = \omega_\tau^K \times \omega_\xi^N$, где $\omega_\tau^K = \{\tau_k = kh_\tau | h_\tau = (\tau_K - \tau_0)/K, k = 0 \dots K\}$ – дискретизация временной области, $\omega_\xi^N = \{\xi_l = lh_\xi | h_\xi = (\xi_N - \xi_0)/N, l = 0, 1 \dots N\}$ – дискретизация пространственной области. Аппроксимируем производные первого и второго порядка конечно-разностными соотношениями порядка точности $o(h^2)$ [6], имеющими вид

$$\frac{d^2 u}{dt^2} \approx \frac{(u_l^{k+1} - 2u_l^k + u_l^{k-1}))}{h_\tau^2}, \quad \frac{du}{d\xi} \approx \frac{(u_{l+1}^k - u_{l-1}^k)}{2h_\xi}, \quad \frac{d^2 u}{d\xi^2} \approx \frac{(u_{l+1}^k - 2u_l^k + u_{l-1}^k)}{h_\xi^2} \quad (2.10)$$

Конечно-разностный аналог задачи (2.8) с учетом (2.10) принимает вид:

$$\mathbf{u}^{k+1} = (2\mathbf{I} + h_\tau^2 \mathbf{L}) \mathbf{u}^k + \mathbf{p}^k - \mathbf{u}^k$$

$$\mathbf{u}^k = (u_1^k \dots u_N^k, w_1^k \dots w_N^k, \chi_1^k \dots \chi_N^k)^T, \quad \mathbf{p}^k = \frac{h_\tau^2}{m \rho_0 h} (0 \dots 0, p_1^k \dots p_N^k, 0 \dots 0)^T \quad (2.11)$$

$$m = \rho / \rho_0$$

где \mathbf{u}^k – неизвестная сеточная вектор-функция, \mathbf{L} – матрица дискретного аналога дифференциального оператора (2.9), \mathbf{p}^k – вектор правых частей, ρ – плотность материала оболочки.

3. Теория тонкого слоя для выпуклого криволинейного препятствия. Так как введенная соотношениями (1.1) – (1.3) криволинейная система координат (ξ^1, ξ^2, ζ) ис-

пользуется и для описания движения акустической среды, необходимо определить локальный базис ϵ_α и компоненты метрического тензора пространства $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ [7]:

$$\epsilon_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\alpha} = (\delta_\alpha^\beta - \zeta b_\alpha^\beta) \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\alpha - \zeta b_\alpha^\beta \mathbf{e}_\beta, \quad \epsilon_3 = \mathbf{n} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} - \zeta b_{\alpha\beta} + (\zeta)^2 c_{\alpha\beta}, \quad c_{\alpha\beta} = b_\alpha^\gamma b_{\gamma\beta} \\ \tilde{g}_{\alpha 3} &= 0, \quad \tilde{g}_{33} = 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

В случае плоской задачи с образующей цилиндра, параллельной оси Ox^3 (фиг. 1), целесообразно использовать координаты, связанные с линиями главных кривизн на срединной поверхности Π . Такая система координат ортогональна и имеет вид $\xi^1 = \xi$, $\xi^2 = x^3$; параметры Ламе H_α определяются соотношениями

$$H_1^2 = \mathfrak{a}_\alpha^2 (1 - \zeta k)^2, \quad H_2^2 = 1 \quad (3.3)$$

где ненулевая кривизна $k(\xi) = b_1^1 > 0$.

Дополнительно к (2.6) – (2.7) будем использовать следующие безразмерные параметры (далее тильда везде опущена):

$$\tilde{k} = ka, \quad \tilde{G} = \frac{G_0}{c_0}, \quad \tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{a}, \quad \tilde{p}_* = \frac{P_*}{\rho_0 c_0^2}, \quad \tilde{p}_i = \frac{P_i}{\rho_0 c_0^2} \quad (i = 1, 2) \quad (3.4)$$

Тогда для нахождения функции влияния $G(\mathbf{r}, t)$ в построенной безразмерной системе координат (ξ, ζ) согласно (1.14) – (1.16) имеем следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = \frac{1}{H_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(H_1 \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right) \right] \quad (3.5)$$

$$G|_{\tau=0} = \frac{\partial G}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \delta(\tau), \quad G(r, \tau) = O(1) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad r^2 = \xi^2 + \zeta^2 \quad (3.7)$$

Будем считать, что основной вклад в гидродинамическую нагрузку дает движение среды по нормали к поверхности [1–3]. Таким образом, движением среды вдоль поверхности Γ можно пренебречь. Поэтому производные по координате ξ в (3.5) можно положить тождественно равными нулю. При этом в отличие от подхода, примененного в [3], положим $\xi \neq 0$. Тогда уравнение (3.5) представляется в виде

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} \frac{\partial G}{\partial \zeta} \quad (3.8)$$

Вычисляя правую часть уравнения (3.8) с учетом (3.3), для функции $G(\xi, \zeta, \tau)$ получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} - \frac{k(\xi)}{1 - \zeta k(\xi)} \frac{\partial G}{\partial \zeta} \quad (3.9)$$

$$G|_{\tau=0} = \frac{\partial G}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \delta(\tau), \quad G(r, \tau) = O(1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

Применим к задаче (3.9) – (3.11) преобразование Лапласа по времени τ . Тогда в пространстве изображений получим следующую краевую задачу (s – параметр преобразования, значком L обозначена трансформанта по Лапласу):

$$\frac{\partial^2 G^L}{\partial \zeta^2} - \frac{k(\xi)}{1 - \zeta k(\xi)} \frac{\partial G^L}{\partial \zeta} - s^2 G^L = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial G^L}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 1, \quad G^L(\xi, \zeta, s) = O(1), \quad \zeta \rightarrow -\infty \quad (3.13)$$

Общее решение уравнения (3.12) имеет вид:

$$G^L(\xi, \zeta, s) = e^{k^{-1}(\xi)s} [C_1 K_0((k^{-1}(\xi) - \zeta)s) + C_2 I_0((k^{-1}(\xi) - \zeta)s)] \quad (3.14)$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.13), получим следующее выражение для функций влияния $G^L(\xi, \zeta, s)$:

$$G^L(\xi, \zeta, s) = \frac{K_0((k^{-1}(\xi) - \zeta)s)}{s K_1(k^{-1}(\xi)s)} \quad (3.15)$$

Получить точное аналитическое выражение для оригинала функции (3.15) затруднительно. Поэтому, принимая во внимание связь изображений в окрестности бесконечно удаленной точки и оригиналов в окрестности нуля [8], найдем формулы для функций влияния в начальные моменты времени. С этой целью используем асимптотические разложения функций Бесселя второго рода порядка $n \in N \cup \{0\}$ [9]:

$$K_n(z) = e^{-z} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \sum_{k=0}^m \frac{a_{nk}}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

$$a_{nk} = \frac{(2n + 2k - 1)!!}{2^{3k} k!} \begin{cases} \frac{1}{(2n - 2k - 1)!!} & \text{при } k \leq n \\ (-1)^{k-n} (2k - 2n - 1)!! & \text{при } k \geq n \end{cases} \quad (3.17)$$

В последней формуле по определению полагается $(-1)!! = 1$.

Подстановка (3.16) в (3.15) приводит к асимптотическим разложениям для функций влияния. Далее везде условно не записываем остаточный член в асимптотических формулах.

В частности, для используемых в этой задаче функций Бесселя порядков $n = 0$ и $n = 1$ имеем

$$a_{00} = a_{10} = 1, \quad a_{11} = \frac{3}{8}, \quad a_{0k} = (-1)^k \frac{[(2k - 1)!!]^2}{2^{3k} k!} \quad \text{при } k \geq 1 \quad (3.18)$$

$$a_{1k} = (-1)^{k-1} \frac{(2k + 1)!! (2k - 3)!!}{2^{3k} k!} \quad \text{при } k \geq 2$$

В результате получаем

$$G^L(\xi, \zeta, s) = \frac{K_0((k^{-1}(\xi) - \zeta)s)}{sK_1(k^{-1}(\xi)s)} = \frac{e^{\zeta s}}{s} \sum_{n=0}^m \frac{c_n(\xi, \zeta)}{s^n} \quad (3.19)$$

Здесь коэффициенты суммы определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$c_0(\xi, \zeta) \sqrt{1 - \zeta k(\xi)} = 1, c_n(\xi, \zeta) \sqrt{1 - \zeta k(\xi)} = \frac{a_{0n}}{(k^{-1}(\xi) - \zeta)^n} - \sum_{j=0}^{n-1} c_j(\xi, \zeta) a_{1, n-j} k^{n-j}(\xi) \quad (n \geq 1) \quad (3.20)$$

Оригинал функций (3.19) определяются с помощью таблиц и свойств преобразования Лапласа

$$G(\xi, \zeta, \tau) = H(\tau) \left[\sum_{n=0}^m \frac{c_n(\xi, \zeta) (\tau - \zeta)^n}{n!} \right] \quad (3.21)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Следовательно, для давления в отраженной и излученной волнах из (1.11) – (1.13) и (3.21) получим

$$p_1(\xi, \tau) = \int_0^{\tau} \frac{\partial \varphi_*(\xi, \zeta, \tau - t)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \frac{\partial G_0(\xi, t)}{\partial t} dt \quad (3.22)$$

$$p_2(\xi, \tau) = - \int_0^{\tau} \frac{\partial w(\xi, \tau - t)}{\partial t} \frac{\partial G_0(\xi, t)}{\partial t} dt \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial G_0(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \delta(\tau) + H(\tau) \sum_{n=1}^m \frac{c_n(\xi, 0) \tau^{n-1}}{(n-1)!} \quad (3.24)$$

Полученное соотношение (3.24) для функции влияния $\partial G_0(\xi, \tau)/\partial \tau$ содержит только один параметр направляющей цилиндра – кривизну k . Поэтому выражение для переходной функции $G_0(\xi, \tau)$ (3.21) также является инвариантным относительно параметризации (1.1). Формулы (3.22), (3.23) дают возможность приближенно определить давление на поверхности деформируемой преграды при дифракции на ней акустических волн в начальный момент взаимодействия при малых τ .

4. Дифракция плоской косо́й волны на упругой ортотропной цилиндрической панели. В качестве примера рассмотрим плоскую задачу о дифракции единичной плоской косо́й волны давления на тонкой упругой оболочке в форме криволинейного цилиндра, заделанной в жесткий экран. Косо́я плоская акустическая волна с вектором нормали к фронту \mathbf{v} , составляющим угол ϑ с осью Ox^1 , в начальный момент времени $\tau = 0$ касается поверхности цилиндра с направляющей Π в точке A . Гидродинамическое давление на поверхности оболочки задается суммой $p = p_* + p_1 + p_2$, где p_* – давление в падающей волне, p_1 – давление в отраженной волне, p_2 – давление излучения. При этом

$$p_*(x^j, \tau) = p_0 H(\tau - f(x^j, \vartheta)) \quad (4.1)$$

$$f(x^j, \vartheta) = x^1 \cos \vartheta + x^2 \sin \vartheta + C \quad (4.2)$$

где константа C определяет положение фронта волны в начальный момент времени $\tau = 0$. Давлению (4.1) соответствует потенциал скорости падающей волны $\varphi_*(x^j, \tau)$:

$$\varphi_*(x^j, \tau) = -p_0 (\tau - f(x^j, \vartheta)) H(\tau - f(x^j, \vartheta)) \quad (4.3)$$

Давление p_1 в отраженной волне определяется соотношением (3.22) с соответствующей переходной функцией $\partial G_0(\xi, \tau)/\partial \tau$ (3.24). Для производной $\partial \varphi_*/\partial \zeta$ из (4.3) получим:

$$\left. \frac{\partial \varphi_*(\xi, \zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = p_0(n^1 \cos \vartheta + n^2 \sin \vartheta) H(\tau - f_0(\xi, \vartheta)) \quad (4.4)$$

$$f_0(\xi, \vartheta) = f(x^i(\xi, \zeta), \vartheta) \Big|_{\zeta=0} \quad (4.5)$$

Тогда для давления p_1 в отраженной волне будем иметь

$$\begin{aligned} p_1(\xi, \tau) &= p_0(n^1 \cos \vartheta + n^2 \sin \vartheta) \int_0^{\tau - f_0(\xi, \vartheta)} \frac{\partial G_0(\xi, t)}{\partial t} dt = \\ &= p_0(n^1 \cos \vartheta + n^2 \sin \vartheta) G_0(\xi, \tau - f_0(\xi, \vartheta)) H(\tau - f_0(\xi, \vartheta)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для давления p_2 в излученной волне аналогично из (3.23), (3.24) получим следующее выражение:

$$p_2(\xi, \tau) = - \left[\frac{\partial w(\xi, \tau)}{\partial \tau} - \frac{k(\xi)}{2} w(\xi, \tau) + \sum_{n=2}^m \frac{c_n(\xi, 0)}{(n-2)!} \int_0^{\tau} w(\xi, t) (\tau-t)^{n-2} dt \right] \quad (4.7)$$

При выводе соотношения (4.7) использовались свойства дельта-функции и однородные начальные условия для оболочки. Интегральные слагаемые, входящие в (4.7), вычислялись с помощью квадратурных формул Грегори [10] на равномерной временной сетке.

В качестве примера рассмотрим дифракцию плоской косой волны давления на параболической оболочке. Параболический цилиндр с фокальным расстоянием a в декартовой прямоугольной системе координат Ox^1x^2 определяется следующим образом:

$$\Pi : x_0^1 = (\xi)^2/(2a), \quad x_0^2 = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

$$k = \frac{a^2}{(a^2 + (\xi)^2)^{3/2}}, \quad n^1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (\xi)^2}}, \quad n^2 = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2 + (\xi)^2}} \quad (4.9)$$

При этом константа C , определяющая точку касания в (4.2) имеет вид

$$C = 1/2 a t g \vartheta \sin \vartheta \quad (4.10)$$

Операторы (2.9) в системе главных координат, связанной с поверхностью параболического цилиндра, будут

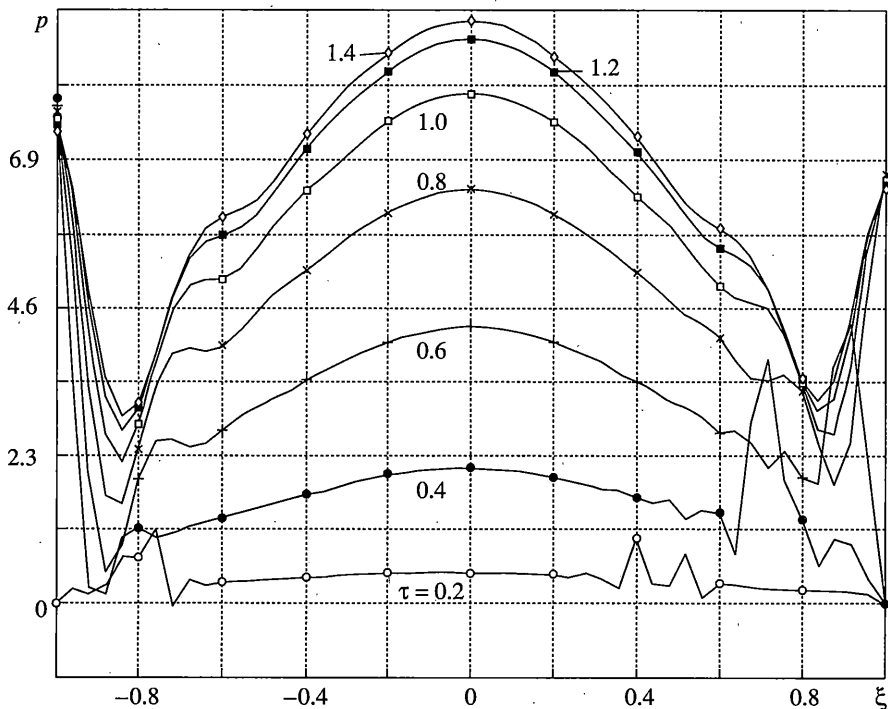
$$A = \begin{vmatrix} \frac{8\eta_{1,1}^2 \xi^2 - 2\eta_{1,1}^2 - \hat{k}^2 \gamma_{1,3}^2}{(1 + \xi^2)^4} & \frac{3\eta_{1,1}^2 \xi}{(1 + \xi^2)^4} & \frac{\hat{k}^2 \gamma_{1,3}^2}{(1 + \xi^2)^{5/2}} \\ \frac{\xi(5\hat{k}^2 \gamma_{1,3}^2 + 2\eta_{1,1}^2)}{(1 + \xi^2)^4} & \frac{\eta_{1,1}^2}{(1 + \xi^2)^3} & \frac{2\xi \hat{k}^2 \gamma_{1,3}^2 \sqrt{1 + \xi^2}}{\xi^6 + 3\xi^4 + 3\xi^2 + 1} \\ \frac{12\hat{k}^2 \gamma_{1,3}^2}{(1 + \xi^2)^{5/2} h^2} & \frac{6\eta_{1,1}^2 \xi}{(1 + \xi^2)^{9/2}} & \frac{12\hat{k}^2 \gamma_{1,3}^2}{(1 + \xi^2) h^2} \end{vmatrix} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \frac{5\eta_{1,1}^2 \xi}{(1+\xi^2)^3} & \frac{\hat{k}^2 \gamma_{1,3}^2 + \eta_{1,1}^2}{(1+\xi^2)^2} & 0 \\ \frac{\hat{k}^2 \gamma_{1,3}^2 + \eta_{1,1}^2}{(1+\xi^2)^3} & \frac{\hat{k}^2 \gamma_{1,3}^2 \xi}{(1+\xi^2)^2} & \frac{\hat{k}^2 \gamma_{1,3}^2 \sqrt{1+\xi^2}}{1+\xi^4+2\xi^2} \\ \frac{8\eta_{1,1}^2 \xi}{(1+\xi^2)^{9/2}} & \frac{12\hat{k}^2 \gamma_{1,3}^2}{(1+\xi^2)^{1/2} h^2} & \frac{5\eta_{1,1}^2 \xi}{(1+\xi^2)^3} \end{vmatrix} \quad (4.12)$$

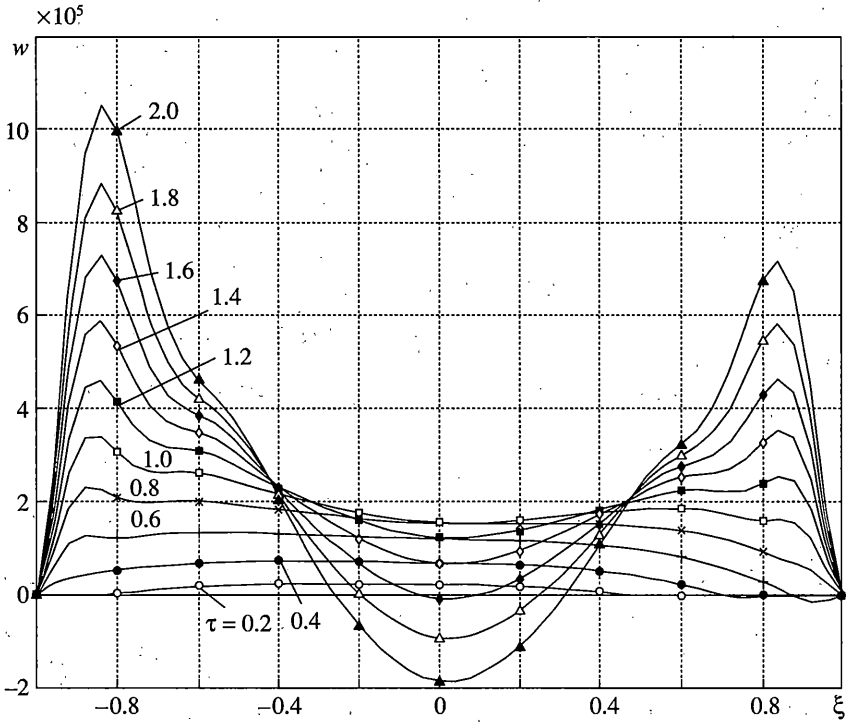
$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \frac{\eta_{1,1}^2}{(1+\xi^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hat{k}^2 \gamma_{1,3}^2}{(1+\xi^2)} & 0 \\ \frac{\eta_{1,1}^2}{(1+\xi^2)^{7/2}} & 0 & \frac{\eta_{1,1}^2}{(1+\xi^2)^2} \end{vmatrix} \quad (4.13)$$

Здесь $\eta_{i,j}^2 = E_i / (m \rho_0 c_0^2)$, $\gamma_{i,j}^2 = G_{ij} / (m \rho_0 c_0^2)$ – безразмерные жесткостные параметры материала оболочки.

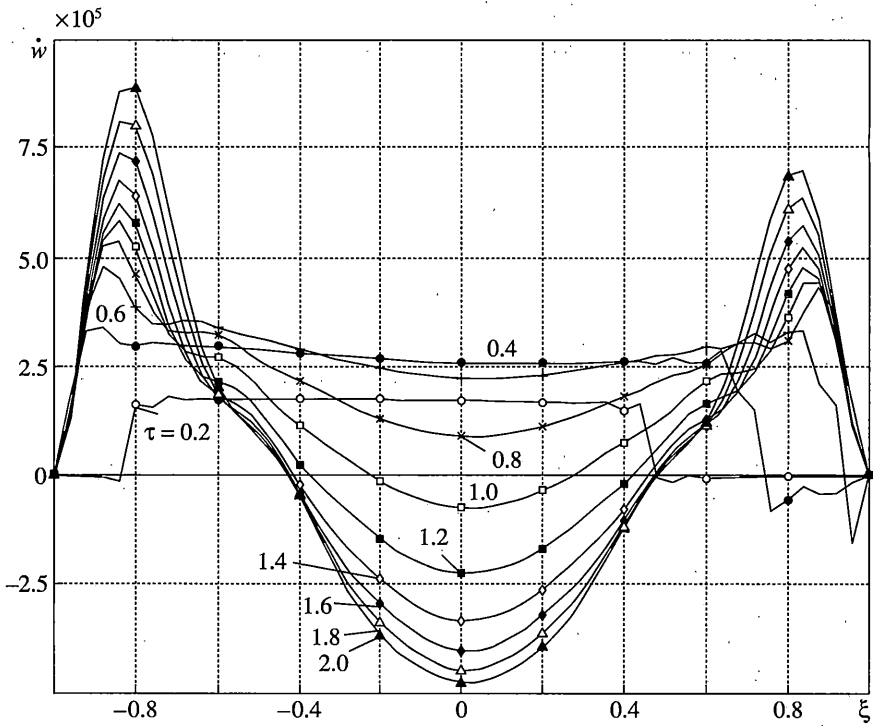
Результаты расчетов приведены на фиг. 2–4 для композитной оболочки, помещенной в воду. Параметры среды и материала оболочки следующие: $c_0 = 1500$ м/с, $\times 10^6$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a = 1 \text{ м}$, $E_1 = 1.42 \cdot 10^{12} \text{ Па}$, $E_2 = 9.13 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\nu_{12} = 0.02$, $G_{12} = G_{13} = 5.49 \cdot 10^{10} \text{ Па}$. Рассматривался случай распространения плоской косой волны давления ($\vartheta = 10^0$) интенсивностью $p_0 = 100 \text{ КПа}$. На фиг. 2 представлена эпюра суммарного давления $p(\xi, \tau)$, действующего на ортотропную оболочку. Фиг. 3, 4 демонстрируют зависимость нормального перемещения (прогиба) оболочки $w(\xi, \tau)$ и нормальной скорости оболочки $dw(\xi, \tau)/d\tau$ в различные моменты времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 02-01-00374) и гранта Президента РФ (ведущие научные школы № НШ – 1278.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А.Г., Пономарев В.И., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 592 с.
2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. Т. 5. Киев: Наук.думка, 1982. 400 с.
3. Горшков А.Г., Егорова О.В., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Плоская задача дифракции акустической волны давления на криволинейном препятствии // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 148–154.
4. Победря Б.Е., Гергиевский Д.В. Лекции по теории упругости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 208 с.
5. Васильев В.В. Композиционные материалы (справочник). М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. 616 с.
7. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 282 с.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.10.2003г.