

УДК 539.375

© 2004 г. А. Г. ЖИЛЕНКОВ, С. М. КАПУСТЯНСКИЙ, В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ

**ЭФФЕКТЫ ПРЕДЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ РАЗРУШЕНИЯ  
ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ РАСШИРЕНИИ ПОЛОСТИ  
В ХРУПКИХ МАТЕРИАЛАХ**

При математическом моделировании взрывного разрушения в хрупких материалах (скальных горных породах, например) используется понятие движущегося фронта разрушения, за которым материал приобретает свойства, соответствующие его новому фрагментированному состоянию. Существование фронта разрушения как поверхности сильного разрыва подтверждается экспериментами на прозрачных моделях. Для полного решения краевых задач естественно требуется сформулировать граничные условия на фронте разрушения.

В данной работе предлагаются результаты числовых расчетов сферической динамики при использовании предельной скорости роста индивидуальной трещины как замыкающего условия для системы граничных условий на фронте разрушения. При этом критические разрушающие в статике напряжения, движутся со своей “фазовой” скоростью, обгоняя реальный фронт разрушения. Тем самым, согласно расчету, как бы происходит некоторое запаздывание разрушения. Если вычислять ту же критическую комбинацию напряжений непосредственно перед фронтом, то она будет включать значительно более высокие “динамические” значения прочности. Последние, впрочем, являются не материальными константами, а функционалами задачи (испытания).

1. Граничные условия на фронте разрушения, помимо традиционных балансов масс и импульса, должны включать критериальное условие, означающее, что напряжения  $\sigma_{ij}$  достигли предела прочности  $F(\sigma_{ij}) = \tau_*$ . Если критерий выполнен непосредственно перед движущимся фронтом разрушения, ситуация оказывается вполне аналогичной динамике упругопластической границы. Тогда скорость фронта будет переменной и находится из условия гладкого сшивания фронтальных смещений и усилий.

Экспериментатор измеряет перед самым фронтом разрушения сверхвысокие напряжения и может даже поверить, что это – проявление динамической прочности хрупкого материала, связанное со скоростью деформирования [1]. Однако в действительности это – динамические перегрузки, связанные с запаздыванием разрушения, как это будет показано ниже путем прямых вычислений. С другой стороны, хрупкое разрушение характеризуется наличием реальной предельной скорости роста индивидуальной трещины (порядка одной трети от скорости звука в рассматриваемом материале). Иногда эта скорость соответствует началу ветвления трещины. При ударах высокой интенсивности она может зависеть и от уровня напряжений.

Движение фронта массового хрупкого разрушения во многих случаях происходит с постоянной скоростью (относительно перемещаемого взрывом материала), часто равной именно указанной предельной, как это следует из специальных лабораторных испытаний на прозрачных хрупких моделях (например, на стекле). Соответствующий анализ экспериментальных данных был проведен [2, 3] в связи с чрезвычайно высо-

кой кажущейся прочностью специальных сталей и таких хрупких материалов как изумруд, сапфир и некоторых поликристаллов, испытанных в соответствующих динамических экспериментах.

Если ввести условие постоянства скорости фронта разрушения как замыкающее для системы граничных условий и приравнять ее к предельной скорости роста трещин, то между уходящим вперед упругим предвестником и фронтом разрушения появляется зона кратковременных перегрузок. Более того, можно отождествить появление указанной зоны с проявлением динамической прочности, причем параметры последней оказываются функционалами задачи, но никак не материальными функциями.

В этих условиях даже обычный плексиглас не будет пробит при чрезвычайно интенсивном, но коротком ударе. Впрочем, уровень перегрузок, равно как и их продолжительность, могут оказаться достаточными для ограниченного роста мелких трещин, т.е. для динамического возникновения поврежденности.

Продолжительность перегрузки, в частности, зависит от замедленности детонации заряда, что усиливает, как известно, фрагментированность скальных горных пород при взрывах [4]. Эффект дробления породы представляет интерес в связи с возможностью увеличения проницаемости нефтегазового пласта. Не исключено, что существует также предельная скорость расширения зон поврежденности, предваряющих движение вершины скоростных индивидуальных трещин, когда коэффициент критической концентрации также превышает свое статическое значение [5].

2. Напомним, как реализуется динамическое разрушение в плоском случае [2, 3]. Вперед уходит первый фронт – упругий предвестник, а на втором происходит само разрушение. Пусть первоначально в среде (зона 0) массовая скорость равна нулю, а напряженное состояние (отсчета) – изотропно

$$\rho = \rho_0, \quad v = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} \quad (2.1)$$

Напряжения за упругим предвестником определяются из балансов массы и импульса на первом фронте и условия его распространения со скоростью упругой волны

$$\begin{aligned} \rho_1(v_1 - c) &= \rho_0(v_0 - c), \quad \rho_0 c v_1 + \sigma_1 = \rho_0 c v_0 + \sigma_0 \\ c^2 &= (\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $c$  – скорость  $P$ -волны,  $v$  – массовая скорость,  $\delta_{ij}$  – единичный тензор,  $\lambda_0, \mu_0$  – коэффициенты Ламэ в упругих зонах 0 и 1. Индексы 0, 1 соответствуют состояниям (зонам) 0, 1 соответственно. Как будет показано ниже, именно зона 1 и есть зона динамической перегрузки.

На самом фронте разрушения выполняются все те же балансы, но с заменой индексов 0 на 1, 1 на 2, а величины  $c$  – на скорость фронта разрушения  $c_f$ . Эти балансы сводятся к следующим уравнениям:

$$v_2 = v_1 - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\rho_0 c_f}, \quad (c_f - v_1)^2 = \frac{\rho_2 \sigma_2 - \sigma_1}{\rho_1 \rho_1 - \rho_2} \quad (2.3)$$

Далее нам нужно ввести замыкающее условие. Обычно напряжение  $\sigma_1$  объявляется критическим и определяется, например, из условия Треска с константой, измеренной в условиях статического нагружения

$$|\sigma_{ii} - \sigma_{kk}| = 2\tau_1 \quad (2.4)$$

Хрупкий материал в зоне 2 перешел во фрагментированное (разрушенное) состояние и движется вслед за фронтом разрушения (при выбросе – в противоположную сто-

рону). Здесь может быть выполнено условие пластического течения  $f(\sigma_{ij}) = \tau_2$ . В частности

$$|\sigma_{ii} - \sigma_{kk}| = 2\tau_2 \quad (2.5)$$

При этом плотность  $\rho_2$ , определяемая сжимаемостью  $\beta_2$  в зоне 2, оказывается равной

$$\rho_2/\rho_0 = 1 - \beta_2(\sigma_2 - \sigma_0) + (4/3)\beta_2\tau_2, \quad \beta_i^{-1} = \lambda_i + 2/3 \mu_i \quad (2.6)$$

Принципиально важно, что прочность за фронтом разрушения снижается

$$\tau_2 \ll \tau_1 \quad (2.7)$$

В самом простом случае (при  $\tau_2 = \tau_1$ ,  $\rho_2 = \rho_0$ ) получается, что

$$c_f = c_v = \sqrt{\frac{3\lambda + 4\mu}{3\rho}} \quad (2.8)$$

т.е. фронт разрушения распространяется со скоростью границы пластического состояния.

Однако, экспериментатор в опытах с хрупкими материалами перед фронтом разрушения измеряет напряжения выше предельного статического уровня  $\tau_1$ . Тогда и вводится в (2.4) соответствующее значение  $\tau_d$  как динамическая прочность среды.

3. При альтернативном подходе [2,3] используем иной критерий разрушения

$$c_f - v_1 = N = \text{const} \quad (N \leq c_v) \quad (3.1)$$

играющий роль замыкающего условия для фронта разрушения.

При этом впереди фронта предполагается выполненным условие (2.4) – в плоском случае всюду за упругим предвестником. Соответствующая “динамическая” прочность вычисляется и оказывается (в данном частном случае) комбинацией упругих и пластических констант

$$\tau_d = \mu_0 \frac{|\sigma_1 - \sigma_0|}{\lambda_0 + 2\mu_0} \geq \tau_1 \quad (3.2)$$

Неравенство (3.2) объясняет, почему измеренное напряжение  $\sigma_1$  выше значения, допускаемого статическим критерием разрушения.

Значение  $N$  определится из соотношения [2]:

$$\frac{c_v}{N} = \sqrt{\frac{\rho_1 - (\sigma_2 - \sigma_1)}{\rho_2 - (\sigma_2 - \sigma_1) + 4(\tau_d - \tau_2)}} \quad (3.3)$$

и оказывается функцией интенсивности удара, что согласуется с данными [6] о плоских ударных волнах высокой интенсивности<sup>1</sup>. Напомним, что в данной статье сжимающие напряжения – отрицательны.

Если считать, что сама величина  $N$  есть характеристика хрупкого материала (равная, в частности, предельной скорости роста трещины), то  $\tau_d$  будет всего лишь функционалом, то-есть, будет зависеть от постановки задачи (опыта). Чтобы показать справедливость данного заключения, воспользуемся общим условием Кулона – Мора и рассмотрим динамику сферического движения на примере задачи, имеющей прикладной смысл во взрывном горном деле.

<sup>1</sup> Это обстоятельство, к сожалению, было упущено в [2,3].

4. Пусть разрушение горного массива вызвано треугольным импульсом: напряжения (время нарастания  $l$ , полная длительность 10 мс, амплитуда  $\sigma_{rr}(r_0) = -100$  МПа), приложенным к внутренней поверхности сферической полости радиуса  $r_0 = 1$  м.

Параметры среды подбирались из соображений соответствия типичной скальной породе. Пусть скорость фронта разрушения  $c_f$  равна трети от  $c_p$  – скорости продольной волны. Это значение выбрано как предельное  $N = 1000$  м/с =  $(1/3) c_p$ ,  $c_p = 3000$  м/с. Перед фронтом разрушения (при  $r = r_f(-)$ ) плотность  $\rho_0 = 2.7$  г/см<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона равен 0.3, прочность на одноосное сжатие  $R_C = 10$  МПа (в основном расчетном варианте), прочность на растяжение  $R_t = 1.2$  МПа. Заметим, что были рассмотрены и варианты со значениями  $R_C = 30$  МПа и  $R_C = 40$  МПа, что соответствует повышенной хрупкости материала.

Статическая сдвиговая прочность определялась как нелинейное обобщение критерия Кулона – Мора, включающее нормировку на одноосную прочность  $R_C$ :

$$\tau/(R_C/2) = (0.03 + 0.97 p/(R_C/3))^{0.65}, \quad p \leq p_* = 300 \text{ МПа} \quad (4.1)$$

При более высоком давлении для прочности на сдвиг будем использовать условие Треска

$$\tau = \tau_* = \text{const}, \quad \tau = \sqrt{(3/8) S_{ij} S_{ij}}, \quad p = -\sigma_{kk}/3 \quad (p > p_*) \quad (4.2)$$

Здесь  $S_{ij}$  – компоненты тензора-девиатора напряжений, и по повторяющимся индексам производится суммирование.

Непосредственно за фронтом разрушения (при  $r = r_f(+)$ ) состояние породы меняется на остаточное. Иначе говоря, одноосная прочность на сжатие уменьшается на порядок ( $R_{C,r} = 0.1R_C$ ), а прочность на сдвиг приобретает вид

$$\tau/(R_{C,r}/2) = (p/(R_{C,r}/3))^{0.77} \quad (4.3)$$

Показатель степени в правой части (4.3) определен из условия пересечения в точке  $p = p_*$  поверхностей максимальной и остаточной прочности. Подобное условие прочности приближенно применимо для многих типов скальных пород, как это следует из анализа [8].

Наряду с проверкой прочности материала на сдвиг, сохранялась возможность его разрушения на отрыв в соответствии со статическим условием  $\sigma_1 = R_t$ , где  $\sigma_1$  – максимальное главное напряжение,  $R_t$  – прочность на одноосное растяжение.

В тех случаях, когда в рассматриваемой ячейке материала одновременно выполнялись условия и сдвигового и отрывного разрушения, предпочтение отдавалось тому или иному механизму разрушения в соответствии с критерием [9].

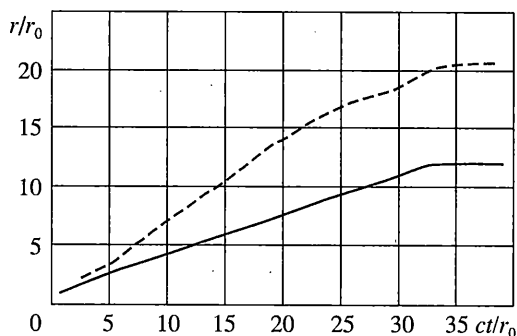
Итак, будем пользоваться динамическими уравнениями в лагранжевой форме. Первым среди них служит баланс импульса

$$\rho dv/dt = \partial \sigma_{rr}/\partial r + 2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r \quad (4.4)$$

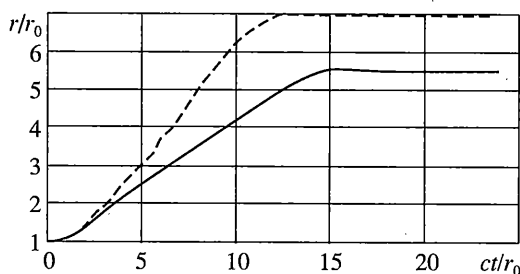
В области за фронтом разрушения используем упругопластическую реологию [2, 8], типичную для материалов с сухим внутренним трением

$$dS_{rr}/dt = 2\mu(\epsilon_{rr} - \epsilon/3 - \lambda S_{rr}), \quad dS_{\theta\theta}/dt = 2\mu(\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon/3 - \lambda S_{\theta\theta}) \quad (4.5)$$

В представляемых здесь расчетах эффект дилатансии для простоты исключен. Тогда изменения объема чисто упругие:  $dp/dt = -K\epsilon$ ,  $K = \lambda + 4\mu/3$ . Кроме того, для каждой ячейки применяется баланс сохранения масс  $\rho W = \rho_0 W_0$ , где  $W$  – текущее значение объема.



Фиг. 1



Фиг. 2

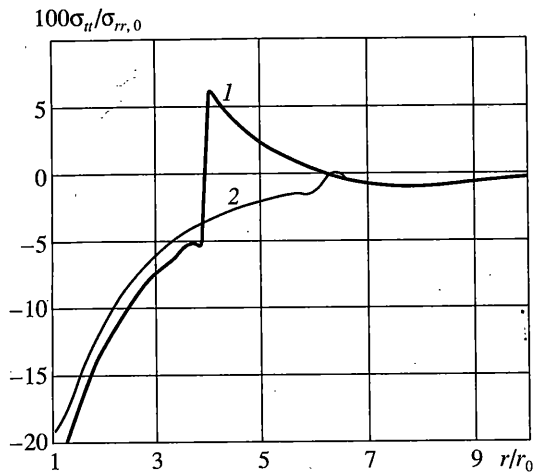
Уравнения (4.4) включают  $\varepsilon_{ij}$  – скорости деформаций,  $\dot{\lambda}$  – скалярный множитель, определяемый за счет добавления к динамическим уравнениям условий пластичности (4.2) или (4.3), если пластическое течение развито, а  $\mu$ ,  $K$  – упругие модули сдвига и объема материальной ячейки.

5. Расчеты проводились на основе алгоритма [10], обобщающего подход [11]. Приведем здесь наиболее интересные результаты в графическом виде. Анализ показал, что во всех вариантах разрушение происходило сдвиговым образом.

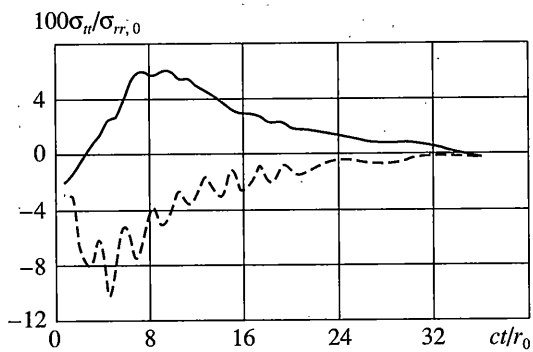
На фиг. 1 ( $R_C = 10$  МПа) и фиг. 2 ( $R_C = 40$  МПа) изображены плоскости годографа для расчета по изложенной теории [3] постоянства скорости фронта разрушения (сплошные линии) и на основе традиционной статической теории прочности (пунктир). Хорошо видны существенная задержка и меньший объем разрушения при использовании теории предельной скорости фронта.

Фиг. 3 иллюстрирует характер изменения кольцевых напряжений с расстоянием для фиксированного момента времени ( $R_C = 10$  МПа,  $ct/r_0 = 9$ ). Расчеты проведены на основе теории предельной скорости разрушения ( $c_f/c_p = 1/3$ , кривая 1) и традиционным способом (кривая 2). В первом случае фронт разрушения находится на расстоянии  $r = 4 r_0$ , во втором случае – на расстоянии  $r = 6.2 r_0$ . В области между этими позициями фронта разрушения (в интервале расстояний  $6.2 > r/r_0 > 4$ ) наблюдается динамическая перегрузка материала. Для остальных расстояний обе теории дают близкие результаты.

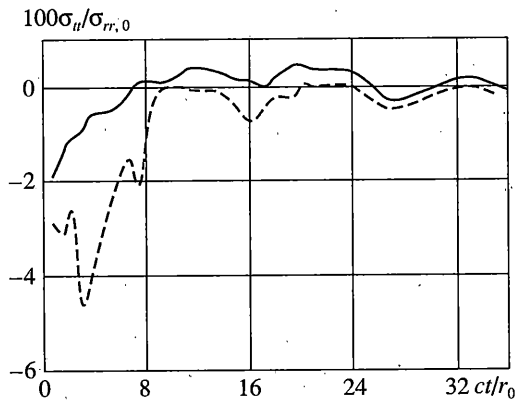
Сравнение фиг. 4 (расчет по предельной скорости фронта) и 5 (традиционный расчет) иллюстрирует динамику разрушения. Здесь изображены (при  $R_C = 10$  МПа) изменения во времени кольцевых напряжений перед (сплошная линия) и за фронтом разру-



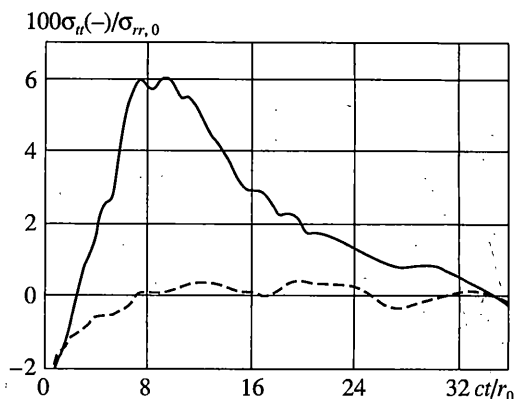
Фиг. 3



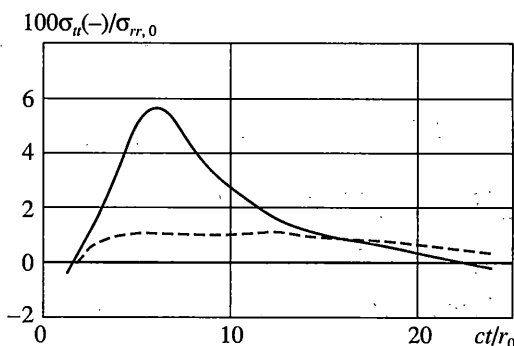
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



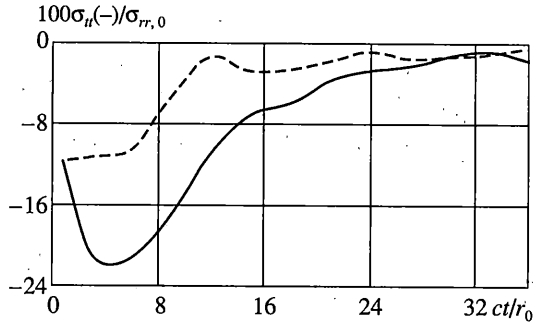
Фиг. 7

шения (пунктир). Расчет по предельной скорости разрушения приводит к характерной смене растяжения на сжатие при переходе через фронт.

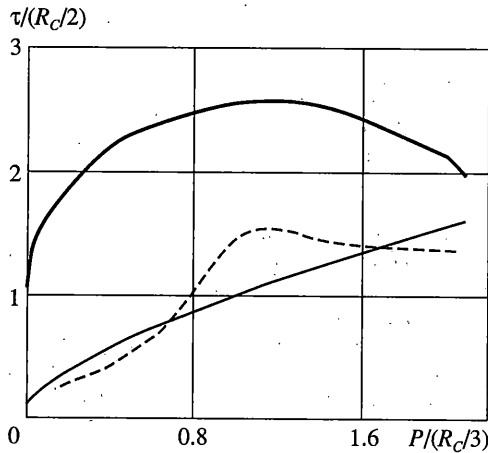
На фиг. 6 ( $R_C = 10$  МПа) и 7 ( $R_C = 40$  МПа) сопоставлены временные профили кольцевых напряжений перед фронтом разрушения, рассчитанные на основе теории предельной скорости разрушения (сплошные кривые) и традиционным способом (пунктир). В обоих случаях напряжения быстро становятся растягивающими (положительными), но они существенно больше, когда учтена предельная скорость разрушения. Видно, что рост статической прочности (фиг. 7) сокращает длительность режима динамической перегрузки (примерно в 2 раза).

На фиг. 8 представлены те же зависимости, как и на фиг. 6, но для радиальных напряжений. Они во всех случаях сжимающие, но расчет по теории предельной скорости приводит к значительной перегрузке. В некоторые моменты времени эти напряжения увеличиваются почти на порядок по сравнению с традиционным расчетом, что и было главным объектом обсуждения в работах [2, 3, 6].

На фиг. 9 изображена статическая прочность (4.1–4.2) (тонкая линия) в сопоставлении с вычисленной зависимостью интенсивности касательных напряжений от давления при  $r = r_f(-)$  при использовании предельной скорости разрушения. Эта кривая (жирная линия) могла бы казаться “динамическим пределом прочности”. Однако, она, по сути, функционал процесса разрушения, отличающийся и по форме от статической



Фиг. 8



Фиг. 9

материальной функции. Пунктир на фиг. 9 изображает соотношение между инвариантами напряжений, рассчитанное по предельной скорости разрушения, но для геометрического места точек прохождения фронта разрушения согласно теории статической прочности.

Перегрузки все же могут приводить к критической ситуации для отдельных мелких трещин, которые всегда присутствуют в реальном материале. Эти трещинки начнут прорастать до тех пор, пока существуют указанные выше “сверх” напряжения. Подобный эффект динамической поврежденности был выявлен в экспериментах [12]. Вообще говоря, при этом следует изменять модули деформаций в зоне перегрузок, но в наших расчетах подобный эффект был опущен. Предварительная поврежденность приводит и к некоторой иррегулярности формы фронта разрушения, причем трещины поврежденности продолжают расти даже после остановки основного фронта разрушения.

Наконец, укажем на эксперименты [13–22], где были обнаружены некоторые динамические эффекты хрупкого разрушения, предсказанные в [2, 3], а также заметим, что для геоматериалов с сухим трением следует учитывать [23] вполне аналогичный эффект предельной скорости скольжения [24].



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родионов В.Н., Сизов И.А., Цветков В.Н. Основы геомеханики. М.: Недра, 1986. 300 с.
2. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с. = *Nikolaevskij V.N. Mechanics of Porous and Fractured Media*. Singapore: World Scientific. 1990. 472 pp.
3. Николаевский В.Н. О динамике фронтов разрушения в хрупких телах // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 5. С. 106–115.
4. *Cuderman J.F.* Multiple fracturing experiments – propellant and borehole consideration // *SPE/DOE Paper*. 1982. № 10845. P. 535–546.
5. *Knauss W.G., Ravi-Chandar K.* Some basic problems in stress wave dominated fracture // *Intern. J. Fracture*. 1985. V. 27. № 3/4. P. 127–143.
6. High – velocity impact phenomena / Ed. R. Kinslow. New York: Academic Press, 1970. = Высоко-скоростные ударные явления. М.: Мир, 1973. 533 с.
7. Compendium of Shock Wave Data / Ed. M. Van Thiel. Livermore: Lawrence Laboratory. 1977. UCRL – 50108. V. 2.
8. Капустянский С.М., Николаевский В.Н. Параметры упругопластической дилатансионной модели для геоматериалов // ПМТФ. 1985. № 6. С. 145–150.
9. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. М: Машиностроение, 1974. Т. 1. 472 с.; Т. 2. 368 с.
10. Жиленков А.Г., Капустянский С.М., Николаевский В.Н. Деформации и разрушение глубокой скважины при пересечении слабого пласта // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 2. С. 163–165.
11. Уилкинс М. Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
12. Зенченко Е.В., Цветков В.М., Гохбан Ю.М. О возможном механизме образования ударных конусов при метеоритном ударе. // Физические процессы в геосферах: проявления и взаимодействие. М.: Ин-т динамики геосфер РАН, 1999. С. 299–304.
13. *Millet J., Bourne N., Rosenberg Z.* Observation of the Hugoniot curves for glasses as measured by embedded stress gauges // *J. Applied Phys.* 1998. V. 84. № 2. P. 739–741.
14. *Millet J.C.F., Bourne N.K., Rosenberg Z., Field J.E.* Shear strength measurement in a tungsten alloy during shock loading // *J. Applied Phys.* 1999. V. 89. № 12. P. 6707–6709.
15. *Millet J.C.F., Tsembells K., Bourne N.K.* Longitudinal and lateral stress measurements in shock – loaded gabbro and granite // *J. Applied Phys.* 2000. V. 87. № 8. P. 3678–3682.
16. *Millet J.C.F., Bourne N.K., Rosenberg Z.* Direct measurements of strains in a shock – loaded, lead filled glass // *J. Applied Phys.* 2000. V. 87. № 12. P. 8457–8460.
17. *Millet J., Bourne N.* The shear strength of a shocked borosilicate glass with internal interface // *Scripta Mater.* 2000. V. 42. P. 681–685.
18. *Millet J., Bourne N.* The effect of an internal interface on the shear strength of a shocked – loaded, high density glass // *Scripta Mater.* 2000. V. 43. P. 77–82.
19. *Millet J.C.F., Bourne N.K.* Lateral stress measurements in shock – loaded alumina: shear strength and delayed failure // *J. Material Science.* 2001. V. 34. P. 3400–3414.
20. *He H., Jing F., Jin X.* Evaluating the damage in the shock compressed glass coupling with VISAR measurement // *Int. J. Impact Eng.* 2001. V. 25. P. 599–605.
21. *Kartuzov V.V., Galanov B.A., Ivanov S.M.* Concept of ultimate fracture velocity in the analysis of spherical cavity expansion in brittle materials: application to penetration problems // *Int. J. Impact Eng.* 1999. V. 23. P. 431–442.
22. *Bourne N.K., Gray G.N. III.* On the failure of shocked titanium diboride // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 2002. V. 458. P. 1273–1284.
23. Николаевский В.Н. Динамическая прочность и скорость разрушения // Удар, взрыв и разрушение. М.: Мир, 1981. С. 166–203.
24. *Broberg K.B.* On transient sliding motion // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1978. V. 52. P. 397–432.

С. Петербург, Москва

Поступила в редакцию  
17.01.2002