

УДК: 539.376

© 2004 г. Ю.В. СУВОРОВА

## **О НЕЛИНЕЙНО-НАСЛЕДСТВЕННОМ УРАВНЕНИИ Ю.Н. РАБОТНОВА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ**

Наследственная механика, развитие которой началось работой Больцмана в середине 19 века и далее весьма успешно осуществлялось работами Вольтерра [1, 2], построившего класс интегральных уравнений, пригодных для описания наследственных свойств живой и неживой природы, в течение длительного времени была предметом, в основном, математических изысканий. Ее широкое приложение к описанию процессов деформирования вязкоупругих сред связано с именем выдающегося ученого – Ю.Н. Работнова. Предложено им нелинейное уравнение и ядро, объединяющее свойства слабой сингулярности и экспоненты, названное впоследствии его именем, были опубликованы впервые в [3] и в течение двадцати лет также оставались предметом математических упражнений (подробно они описаны в [4, 5]). Цикл экспериментальных работ, осуществленный в конце 60-х годов в Институте машиноведения на стеклопластиках, показал применимость и преимущества использования наследственных представлений к описанию поведения исследованных материалов в условиях кратковременной и длительной ползучести [6–8]. Дальнейшее развитие этого подхода подчеркнуло его явные преимущества, состоящие в том, что одним и тем же уравнением с одним и тем же набором параметров, как оказалось, можно описать различные процессы деформирования: квазистатическое нагружение, кратковременную и длительную ползучесть, релаксацию напряжений, циклическое нагружение и т.д. Это означает возможность расчетов на прочность элементов конструкций и прогнозирование их поведения на длительные времена в реальных условиях эксплуатации, причем не только для композитов, но и для металлов и полимеров [9–15].

Введение наследственных представлений приводит к анализу интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода. Нелинейное уравнение Работнова записывается в виде

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (1)$$

где ядро интегрального уравнения (1) было предложено выбирать в виде дробно-экспоненциальной функции  $\varepsilon_{\alpha}(\beta, t)$  [3]:

$$K(t) = \lambda \varepsilon_{\alpha}(\beta, t) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[(1-\alpha)(n+1)]} \quad (2)$$

Ю.Н. Работновым была разработана алгебра дробно-экспоненциальных операторов, удобная для практического использования. Особенность введенных операторов состоит в том, что они удачно сочетают в себе наличие интегрируемой сингулярности в нуле,

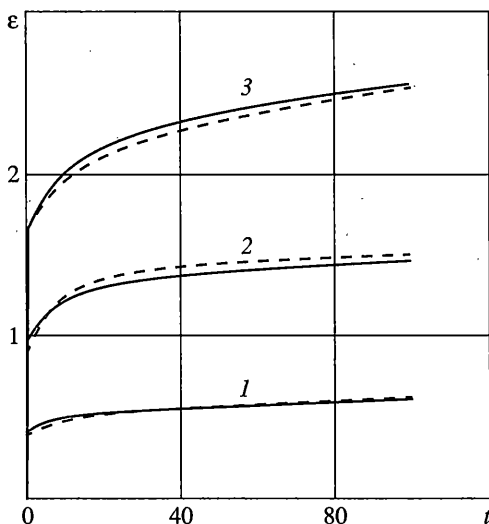
свойства экспоненты на бесконечности, а также дают возможность достаточно простого обращения уравнения (1). Резольвентным оператором будет также дробно-экспоненциальная функция с несколько иными параметрами, получающимися комбинацией из уже имеющихся. Если в левой части уравнения (1) стоит линейная функция  $\varphi(\varepsilon) = E\varepsilon$  (линейная вязкоупругости), то, используя принцип соответствия Вольтерра, удастся достаточно просто решать задачи теории линейной вязкоупругости [4, 5].

Тем не менее, трудности, возникающие при расчетах с использованием дробно-экспоненциальной функции и с возможностью определения ее параметров, существенно ограничили применение уравнения Работнова для практических приложений. Это привело к тому, что вместо бесконечного ряда (2) стали использовать только его первый член, представляющий собой функцию Абеля  $K(t) = kt^\alpha$ . Обзор работ подобного типа можно найти, например, в [13]. Использование ядра Абеля в значительной степени упрощает процедуру расчетов по уравнению (1) и расширяет возможности его инженерных приложений [16, 17]. Однако такой подход может привести к значительным ошибкам, если необходимо прогнозировать поведение элемента конструкции на очень большие времена нагружения. Например, в последнее время большое внимание уделяется исследованию свойств и поведения геосинтетических материалов, используемых при строительстве автомобильных и железных дорог. Требования к эксплуатации представляют собой обеспечение надежной и безопасной работы этих материалов при временах действия нагрузки в  $10^6$  час, т.е. порядка 100 лет. Для прогнозирования работы этих материалов на такие большие времена по данным, полученным в лабораторных опытах, ядра Абеля явно недостаточно, так как оно предсказывает значительно более высокий рост деформации, чем наблюдается на практике. Вновь возникает актуальность в использовании дробно-экспоненциальной функции Работнова, причем расчеты по уравнению (1) с ядром (2) представляют уже не только математический, но и сугубо инженерный интерес. Разработка современных компьютерных методов расчетов и создание новых программ позволяют, как будет показано ниже, достаточно удобно использовать уравнение Работнова для инженерных приложений.

Ограничения в практическом применении уравнения (1) с использованием дробно-экспоненциальной функции (2) состоят, прежде всего, в трудности определения параметров ядра из опытных данных. В работе [18] предложена методика, использующая интегральное преобразование Лапласа – Карсона для задач ползучести. Недостаточная развитость программного обеспечения в то время не позволила авторам достаточно просто решить поставленную задачу: фактически определялись только два параметра  $\lambda$  и  $\beta$ . Параметр сингулярности  $\alpha$  фактически заранее задавался, а величина деформации  $\varepsilon_0$ , соответствующая времени  $t = 0$  и равная  $\varepsilon_0 = \sigma/E$ , где  $\sigma$  – уровень напряжения, при котором происходит ползучесть, фиксировался произвольно. Есть и другие публикации [19–21], посвященные определению параметров ядра Работнова, однако они используют приближенный графоаналитический метод и таблицы  $\varepsilon_\alpha$  – функций, что не слишком удобно для работы и морально устарело.

В настоящее время развитие компьютерных технологий обусловило становление принципиально нового пути исследования. В частности, оборудование для проведения экспериментов тесно интегрировано с компьютерами, что позволяет не только существенно улучшить качество полученных в проводимых экспериментах данных, но и автоматически подготавливать их для анализа пакетами вычислительных программ. Таким образом, возникает возможность и потребность построить процедуру определения параметров, использующую современные вычислительные средства.

Ниже будут рассмотрены два примера использования предлагаемой здесь методики определения параметров: по экспериментальным данным на ползучесть и по квазистатической диаграмме деформирования, полученной с постоянной скоростью нагружения. Аналогично [18] в обоих случаях использовалось интегральное преобразова-



Фиг. 1

ние Лапласа и определение параметров производилось в пространстве изображений, а не оригиналов. Достаточно простые и доступные компьютерные программы, такие как Excel, Maple, Curve Expert дают возможность осуществлять расчеты.

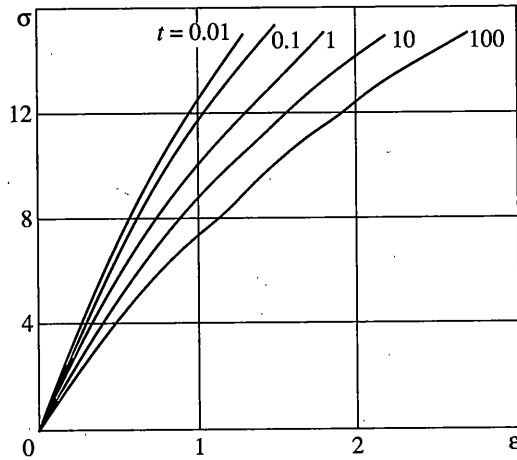
Рассмотрим эксперименты на ползучесть материала Найлон 6 [22] (фиг. 1). Для случая ползучести,  $\sigma = \text{const}$ , уравнение (1) с ядром (2) после интегрирования принимает вид

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma \left[ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1-\alpha)(n+1)}}{\Gamma[(1-\alpha)(n+1) + 1]} \right] \quad (3)$$

Поскольку сингулярность важна лишь в окрестности нуля, т.е. при малых временах нагружения, то для определения параметра сингулярности  $\alpha$  можно ограничиться лишь первым членом ряда (3). Тогда

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma \left[ 1 + \frac{\lambda t^{1-\alpha}}{\Gamma[(1-\alpha) + 1]} \right] \quad (4)$$

Определение параметров по кривым ползучести, представляемым выражением (4), было исследовано в [23], где разработана компьютерная программа определения параметров для случаев, когда экспериментальные кривые заданы в виде кривых ползучести либо в виде диаграмм деформирования, полученных с разными скоростями. Следуя [23], выражение (4) может быть использовано для определения параметра сингулярности  $\alpha$  при помощи изохронных кривых ползучести (фиг. 2):  $\alpha = 0.85$ ,  $t$  [час],  $\sigma$  [МПа],  $\varepsilon$  [%]. Далее это значение может быть принято и при работе с уравнением (3) для расчета диаграмм деформирования либо кривых ползучести. Теперь, зная параметр сингулярности, можно предложить следующую методику определения остальных параметров ядра уравнения (3). Рассмотрим сначала низкий уровень нагрузки (фиг. 1)  $\sigma = 5$  МПа (кривая 1) и соответствующую ему кривую ползучести ( $\varepsilon$ [%]). Можно предположить, что подтверждается анализом кривых фиг. 2, что при таком уровне нагрузки материал не выходит из области линейности и  $\varphi(\varepsilon) = E\varepsilon$ , а  $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ .



Фиг. 2

При помощи программы Curve Expert рассматриваемая экспериментальная кривая ползучести может быть с достаточной точностью аппроксимирована выражением  $\epsilon(t) = at^b$ , где  $a = 0.42$ ,  $b = 0.079$ . Соотношение (3) запишем теперь так

$$at^b = \epsilon_0 \left[ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1-\alpha)(n+1)}}{\Gamma[(1-\alpha)(n+1) + 1]} \right]$$

Применим теперь к обеим частям этого выражения преобразование Лапласа-Карсона

$$\frac{a\Gamma(1+b)}{s^b} = \epsilon_0 \left[ 1 + \frac{\lambda}{s^{1-\alpha+\beta}} \right] \tag{5}$$

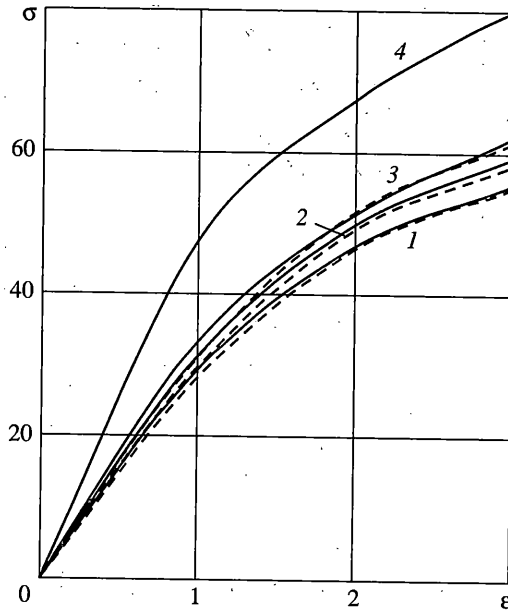
Таким образом, задача определения параметров уравнения (3) сведена к задаче определения величин  $\epsilon_0$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  из выражения (5), т.е. в пространстве изображений.

Программа Curve Expert позволяет определить все параметры, входящие в соотношение (5). Следует подчеркнуть, что набор параметров  $p = \{\epsilon_0, \lambda, \beta\}$  зависит от выбора интервала  $\Delta s$ , на котором он определяется. Если зададим некоторый произвольный интервал  $\Delta s$ , то получим соответствующий набор параметров, пользуясь которыми можно рассчитать кривую ползучести  $\epsilon[t, p(\Delta s)]$ . Далее необходимо найти именно такой интервал  $\Delta^*s$  и соответствующий ему набор параметров  $p^*(\Delta^*s)$ , при которых рассчитанная диаграмма ползучести  $\epsilon[t, p^*(\Delta^*s)]$  соответствовала бы экспериментальной (фиг. 1). Таким образом, задача сводится к поиску минимума следующего функционала

$$F(p(\Delta s)) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\epsilon[t_i, p(\Delta s)] - \epsilon[t_i, p^*(\Delta s)^*]}{\epsilon[t_i, p^*(\Delta s)^*]} \right]^2$$

где  $n$  – количество точек на кривой ползучести, по которым производится сопоставление данных.

Расчеты дают следующие значения:  $\lambda = 1.47$ ;  $\beta = 0.13$ ;  $\epsilon_0 = 0.2$ . Теперь уже, зная эти значения, можно воспользоваться любой из изохронных кривых ползучести, например, кривой, соответствующей  $t = 100$  час и при помощи уравнения (3) рассчитать кривую мгновенного деформирования. Расчетные значения были аппроксимированы



Фиг. 3

также степенной функцией  $\varphi(\varepsilon) = 20.37\varepsilon^{0.75}$ . Таким образом, для расчета любой кривой ползучести теперь можно воспользоваться соотношением:

$$20.37\varepsilon^{0.75} = \sigma \left[ 1 + 1.47 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-0.13)^n t^{0.15(n+1)}}{\Gamma[0.15(n+1)+1]} \right] \quad (6)$$

На фиг. 1 приведены штриховые кривые, рассчитанные по формуле (6) при помощи программ Maple и Excel и дано их сопоставление с экспериментальными результатами (сплошные кривые) для  $\sigma = 5, 10$  и  $15$  МПа (кривые 1–3, соответственно).

В качестве второго примера рассмотрим диаграммы квазистатического деформирования полиоксиметилена (ПОМ) [14], начальные участки которых (в пределах 3% деформации) приведены на фиг. 3. Параметр  $\alpha$  также может быть определен при помощи методики, использующей первый член дробно-экспоненциального ряда, т.е. ядро Абеля [23]. Было получено:  $\alpha = 0.913$ . Дальнейшее определение параметров опять проводилось в той области изменения напряжений, когда можно использовать линейную теорию вязкоупругости, т.е. считать, что  $\varphi(\varepsilon) = E\varepsilon$ . Это позволяет применить метод интегрального преобразования Лапласа и определить модуль упругости  $E$  как неизвестную величину. Из фиг. 3 видно, что для деформации в пределах  $\varepsilon \leq 1\%$  использование линейной вязкоупругости вполне допустимо. Кривая 1, полученная при скорости нагружения  $\dot{\sigma} = 0.08$  МПа/с, достаточно точно может быть аппроксимирована степенной зависимостью  $\sigma = 29.5\varepsilon^{0.97}$ . На фиг. 3 кривые 2, 3 соответствуют скоростям нагружения  $\dot{\sigma} = 0.8$  и  $8$  МПа/с, кривая 4 – кривая мгновенного деформирования  $\varphi(\varepsilon)$  (сплошные линии соответствуют экспериментальным данным [14], штриховые – расчет по соотношению (7)). Учитывая, что нагружение осуществляется с

постоянной скоростью, получим  $\varepsilon = 0.0023t^{1.03}$  и следующее соотношение для линейной области:

$$E0.0023t^{1.03} = \dot{\sigma} \left( t + \int_0^t \varepsilon_{\alpha}(t-\tau)\tau d\tau \right) \quad (7)$$

Применим теперь к уравнению (7) преобразование Лапласа

$$\frac{E0.025\Gamma(2.03)}{s^{0.03}} = 1 + \frac{\lambda}{s^{1-\alpha} + \beta} \quad (8)$$

Следуя методике определения параметров, описанной выше для случая ползучести, т.е. выбирая интервал изменения  $s$  в пространстве изображений такой, при котором достигается наилучшее совпадение расчетной и экспериментальной кривой, из (8) получаем следующие значения:  $E = 4771$  МПа,  $\lambda = 0.52 c^{-(1-\alpha)}$ ,  $\beta = 0.37$ . Используя эти значения, можно построить кривую мгновенного деформирования, пользуясь следующим выражением

$$\varphi(\varepsilon) = \dot{\sigma} \left[ t + \int_0^t \varepsilon_{\alpha}(t-\tau)\tau d\tau \right] \quad (9)$$

График этой функции строится, например, при помощи программы Maple. Начальные участки кривых, соответствующих различным скоростям нагружения, приведены на фиг.3.

Следует подчеркнуть, что при построении только расчетных диаграмм деформирования использование сложного дробно-экспоненциального ядра теряет свои преимущества. Расчеты, проведенные с использованием ядра Абеля, дают практически такие же результаты. Ситуация меняется при расчете длительной ползучести или при расчете релаксационных процессов.

Ю.Н. Работновым было показано [3], что пользуясь доказанной им теоремой умножения можно решить любое интегральное уравнение, ядром которого является  $\varepsilon_{\alpha}$ -функция. Пусть, например, для оператора  $\varepsilon_{\alpha}^*$  можно записать следующее соотношение:

$$V = u[1 + \lambda\varepsilon_{\alpha}^*(\beta)]$$

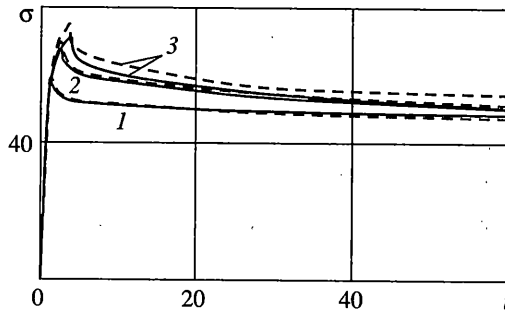
Тогда

$$u = \frac{V}{1 + \lambda\varepsilon_{\alpha}^*(\beta)}$$

или же, расписывая это выражение, получим

$$\frac{V}{1 + \lambda\varepsilon_{\alpha}^*(\beta)} = V(1 - \lambda\varepsilon_{\alpha}^*(\lambda + \beta)) \quad (10)$$

Свойство дробно-экспоненциальных операторов быть резольвентными дает возможность рассчитывать релаксационные процессы достаточно просто, в отличие от других операторов, обладающих необходимыми особенностями в нуле и свойствами экспоненты на бесконечности, но не позволяющих так легко и изящно построить формулу обращения, удобную для расчетов.



Фиг. 4

В [14] приведены расчеты кривых релаксации полиоксиметилена для случая, когда ядро оператора в уравнении (1) представляет собой ядро Абеля. Ниже будут показаны результаты расчетов с использованием дробно-экспоненциального ядра Работнова.

Принимая во внимание, что при релаксации  $\varepsilon = \text{const}$  и, следовательно,  $\varphi(\varepsilon) = \text{const}$  и пользуясь выражением (10), получим:

$$\sigma = \frac{\varphi(\varepsilon)}{1 + \lambda \varepsilon_{\alpha}^{*}(\beta)} = \varphi(\varepsilon)(1 - \lambda \varepsilon_{\alpha}^{*}(\lambda + \beta)) \quad (11)$$

Используя определенные выше для полиоксиметилена параметры, были рассчитаны кривые релаксации этого материала, которые представлены на фиг. 4 ( $t$  [мин], сплошные кривые соответствуют экспериментальным данным [14], штриховые – расчет по соотношению (11); кривые 1–3 соответственно  $\varepsilon = 3, 6, 9$  [%]). Сравнение расчетов, выполненных по соотношению (11), с расчетами работы [14], осуществленными при использовании в уравнении (1) ядра Абеля, показало при максимальных временах эксперимента  $t = 1$  час, улучшение соответствия с опытными данными примерно на 5%. Естественно, что при более длительных временах нагружения эта разница существенно возрастет.

Таким образом, в работе показано, как при помощи современных компьютерных программ и классических аналитических расчетов может быть решена задача определения параметров модели и сделана оценка надежности материалов и конструкций при длительных сроках эксплуатации, удовлетворяющая требованиям точности и безопасности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01–01–00455)

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 286 с.
2. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
3. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием // ПММ. 1948. Т. 12. Вып 1. С. 53–62.
4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
6. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степаньчев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // Механика полимеров. 1971. № 1. С. 74–87.

7. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3–250 // Механика полимеров. 1971. № 3. С. 391–397.
8. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. О связи характеристик ползучести стеклопластиков с кривой мгновенного деформирования // Механика полимеров. 1971. № 4. С. 624–628.
9. Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В. О законе деформирования металлов при одноосном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 41–54.
10. Rabotnov Yu.N., Suvorova J.V. The Non-linear Hereditary-type Stress-strain Relation for Metals // Int. J. Solids and Structures. 1978. V. 14. № 3. P. 173–185.
11. Суворова Ю.В. Условие пластического деформирования металлов при различных режимах нагружения // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 1. С. 73–79.
12. Суворова Ю.В. Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред // Механика полимеров. 1977. № 6. С. 976–980.
13. Suvorova J.V. The Influence of Time and Temperature on the Reinforced Plastics Strength // Failure Mechanics of Composites. North Holland, 1985. P. 177–214.
14. Suvorova J.V., Ohlson N.G., Alexeeva S.I. An Approach to the Description of Time-dependent Materials // Materials and Design: 2003. V. 24. Issue 4. P. 293–297.
15. Suvorova J.V., Ohlson N.G., Alexeeva S.I. Temperature Influence in the Description of Time-dependent Materials // Materials and Design. 2003. V. 24. Issue 4. P. 299–304.
16. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Инженерные приложения модели наследственного типа к описанию поведения полимеров и композитов с полимерной матрицей // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2000. Т. 66. № 5. С. 47–51.
17. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Инженерные приложения нелинейно-наследственной модели с учетом температуры // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2000. Т. 66. № 6. С. 48–52.
18. Звонов Е.Н., Малинин Н.И., Паперник Л.Х., Цейтлин Б.М. Определение характеристик ползучести линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ // Инж. ж. МТТ. 1968. № 5. С. 72–76.
19. Ривкинд В.Н. Способ определения параметров дробно-экспоненциальной функции для описания кривой ползучести // Свойства судостроительных стеклопластиков и методы их контроля. 1974. Вып.3. С. 111–114.
20. Гольдман А.Я., Щербак В.В., Кислов Е.Н., Дворский Е.Н. Способ определения параметров для описания кривой ползучести упругонаследственных материалов на основе таблиц  $\alpha$ -функций Работнова // Машиноведение. 1977. № 6. С. 77–82.
21. Екельчик В.С., Рябов В.М. Об использовании одного класса наследственных ядер в линейных уравнениях вязкоупругости // Механика композитных материалов. 1981. № 3. С. 393–404.
22. Суворова Ю.В., Мосин А.В. Определение параметров дробно-экспоненциальной функции Работнова с использованием интегрального преобразования и современного программного обеспечения // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2002. № 4. С. 54–56.
23. Мосин А.В. Вычисление параметров нелинейного определяющего уравнения наследственного типа // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 2. С. 83–88.

Москва

Поступила в редакцию  
7.11.2003