МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2004

УДК 539.374; 539.214

© 2004 г. Н.В. МИНАЕВА

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ, БЛИЗКОМ К ОСЕСИММЕТРИЧНОМУ

Рассматривается напряженно-деформированное состояние упругопластической трубы, находящейся под воздействием внутреннего и внешнего давлений. Отличие поперечного сечения трубы от кругового кольца характеризуется двумя малыми параметрами. Решение ищется в виде степенных рядов по этим параметрам. Найдено условие совпадения этих рядов с рядами Тейлора.

Следуя [1–2], рассмотрим поведение толстостенной трубы, выполненной из несжимаемого упругопластического материала, находящейся под воздействием внутреннего давления p_1 и внешнего p_2. Внутренний и внешний контуры поперечного сечения трубы в полярной системе координат пусть описываются функциями $r = a + f_1(\theta)$ и $r = b + f_2(\theta)$, а контур, отделяющий упругую зону от пластической – функцией $r = r_s(\theta)$.

В пластической области напряженно-деформированное состояние описывается решением следующей задачи [1, 2]:

$$\frac{\partial\sigma_\rho^p}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau^p}{\partial\theta} + \frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{\rho} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\tau^p}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\rho^p}{\partial\theta} + \frac{2\tau^p}{\rho} = 0 \quad \rho\frac{\partial u^p}{\partial\rho} + \frac{\partial v^p}{\partial\theta} + u^p = 0$$

$$(\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p)^2 + 4(\tau^p)^2 = 4\left(\frac{k}{G}\right)^2$$

$$4\frac{\partial u^p}{\partial\rho}\tau^p - \left(\frac{\partial v^p}{\partial\rho} - \frac{v^p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^p}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) = 0$$

$$\sigma_n^p\Big|_{\rho = \Psi_1(\theta)} = -q_1, \quad \tau_n^p\Big|_{\rho = \Psi_1(\theta)} = 0, \quad \rho = \frac{r}{b}, \quad q_1 = \frac{p_1}{G} \tag{2}$$

Все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к модулю упругости G, функция $\Psi_1(\theta)$ описывает внутренний контур поперечного сечения трубы в деформированном состоянии. Индекс p указывает на принадлежность компоненты к пластической области.

В упругой области напряженно-деформированное состояние будет описываться решением такой задачи:

$$\frac{\partial\sigma_\rho^e}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau^e}{\partial\theta} + \frac{\sigma_\rho^e - \sigma_\theta^e}{\rho} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial\tau^e}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta^e}{\partial\theta}+\frac{2\tau^e}{\rho} = 0 \qquad \rho\frac{\partial u^e}{\partial\rho}+\frac{\partial v^e}{\partial\theta}+u^e = 0$$

$$\sigma_\rho^e-\sigma_\theta^e = 4\frac{\partial u^e}{\partial\rho}, \qquad \tau^e = \frac{\partial v^e}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^e}{\partial\theta}-\frac{v^e}{\rho}$$

$$\sigma_n^e\Big|_{\rho=\Psi_2(\theta)} = -q_2, \qquad \tau_n^e\Big|_{\rho=\Psi_2(\theta)} = 0 \tag{4}$$

где функция $\Psi_2(\theta)$ описывает внешний контур поперечного сечения трубы в деформированном состоянии, а индекс e указывает на принадлежность компоненты к упругой области.

К (1)–(4) следует добавить условия сопряжения решений задач (1), (2) и (3), (4) при $\rho = \rho_s(\theta)$ $(\rho_s = r_s/b)$.

При $f_1(\theta) \equiv 0$ задача (1), (2) допускает осесимметричное решение, в котором $\tau^p = \tau^{0p} \equiv 0$, $v^p = v^{0p} \equiv 0$, а остальные неизвестные находятся из решения следующей задачи:

$$\begin{gathered}\frac{d\sigma_\rho^{0p}}{d\rho}+\frac{\sigma_\rho^{0p}-\sigma_\theta^{0p}}{\rho} = 0, \quad (\sigma_\rho^{0p}-\sigma_\theta^{0p})^2 = 4\left(\frac{k}{G}\right)^2 \\ \rho\frac{du^{0p}}{d\rho}+u^{0p} = 0, \quad \sigma_\rho^{0p}\Big|_{\rho=\alpha+u^{0p}(\alpha)} = -q_1, \quad \alpha = \frac{a}{b}\end{gathered} \tag{5}$$

Задача (3), (4) при $f_2(\theta) \equiv 0$ также допускает осесимметричное решение, в котором $\tau^e = \tau^{0e} \equiv 0$, $v^e = v^{0e} \equiv 0$, а остальные неизвестные находятся из решения следующей задачи

$$\begin{gathered}\frac{d\sigma_\rho^{0e}}{d\rho}+\frac{\sigma_\rho^{0e}-\sigma_\theta^{0e}}{\rho} = 0, \quad \rho\frac{du^{0e}}{d\rho}+u^{0e} = 0 \\ \sigma_\rho^{0e}-\sigma_\theta^{0e} = 4\frac{u^{0e}}{\rho}, \quad \sigma_\rho^{0e}\Big|_{\rho=1+u^{0e}(1)} = -q_2\end{gathered} \tag{6}$$

Условия сопряжений решений задач (1), (2) и (3), (4) при $f_1(\theta) \equiv f_2(\theta) \equiv 0$ будут такими:

$$\sigma_\rho^{0p}(\rho_s^0) = \sigma_\rho^{0e}(\rho_s^0), \quad \sigma_\theta^{0p}(\rho_s^0) = \sigma_\theta^{0e}(\rho_s^0), \quad u^{0p}(\rho_s^0) = u^{0e}(\rho_s^0) \tag{7}$$

Решение задачи (5)–(7) будет следующим:

$$\begin{gathered}\sigma_\rho^{0p} = 2\kappa\ln\rho + C_1, \quad \sigma_\theta^{0p} = 2\kappa + 2\kappa\ln\rho + C_1 \\ \sigma_\rho^{0e} = -\kappa(\rho_s^0)^2\rho^{-2} + C_2, \quad \sigma_\theta^{0e} = \kappa(\rho_s^0)^2\rho^{-2} + C_2 \\ u^{0p} = u^{0e} = \kappa(\rho_s^0)^2\rho^{-1} \\ \kappa = \pm k/G\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}C_1 = -q_1 - 2\kappa\ln\left[\alpha+\frac{\kappa}{2\alpha}(\rho_s^0)^2\right] \\ C_2 = \kappa - q_1 + 2\kappa\ln\rho_s^0 - 2\ln\left[\alpha(\rho_s^0)^{-1}+\frac{\kappa}{2\alpha}\rho_s^0\right]\end{gathered} \tag{9}$$

Величина ρ_s^0 находится из уравнения

$$q_2 - q_1 + \kappa - 2\kappa \ln\left[\alpha(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\kappa}{2}\rho_s^0\alpha^{-1}\right] - \kappa(\rho_s^0)^2\left[1 + \frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^2\right]^{-2} = 0 \tag{10}$$

Уравнение (10) при $\rho_s^0 = \alpha$, соответствующее возникновению пластической зоны на внутреннем контуре, можно записать в таком виде:

$$q_1 - q_2 = \kappa\left[1 - \alpha^2\left(1 - \frac{\kappa}{2}\alpha^2\right)^{-2} - \ln\left(1 + \frac{\kappa}{2}\right)^2\right] \tag{11}$$

Если, например, материал трубы и ее размеры таковы, что

$$\alpha^2\left(1 \pm \frac{\kappa}{2G}\alpha^2\right)^{-2} + \ln\left(1 \pm \frac{\kappa}{2G}\right)^2 < 1 \tag{12}$$

то из (11) получаем, что знак величины к совпадает со знаком величины $q_1 - q_2$, т.е.

$$\operatorname{sign}\kappa = \operatorname{sign}(q_1 - q_2) \tag{13}$$

Для того, чтобы выяснить, при выполнении каких условий решение (8) можно брать в качестве приближенного решения задачи (1)–(4) в том случае, когда $f_i(\theta)$ достаточно мало отличается от нуля, необходимо рассмотреть вопрос о непрерывности зависимости решения задачи (1)–(4) от $f_i(\theta)$ при $f_i(\theta) = 0$. Как следует из теоремы о неявных функциях [5–7] для проведения анализа упомянутой непрерывности зависимости надо построить следующую вспомогательную задачу для пластической зоны:

$$\frac{\partial\zeta_1^p}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_3^p}{\partial\theta} + \frac{\zeta_1^p - \zeta_2^p}{\rho} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial\zeta_3^p}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_2^p}{\partial\theta} + \frac{2\zeta_3^p}{\rho} = 0, \quad \rho\frac{\partial\zeta_4^p}{\partial\rho} + \frac{\partial\zeta_5^p}{\partial\theta} + \zeta_4^p = 0$$

$$(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p} + \zeta_1^p - \zeta_2^p)^2 + 4(\zeta_3^p)^2 = 4\left(\frac{k}{G}\right)^2$$

$$4\frac{\partial(u^{0p} + \zeta_4^p)}{\partial\rho}\zeta_3^p - \left(\frac{\partial\zeta_5^p}{\partial\rho} - \frac{\zeta_5^p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_4^p}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p} + \zeta_1^p - \zeta_2^p) = 0$$

$$(\sigma_n^{0p} + \zeta_n^p)_{\rho = \Phi_1(\theta)} = -q_1, \quad (\tau_n^{0p} + \zeta_\tau^p)_{\rho = \Phi_1(\theta)} = 0 \tag{15}$$

где функция $\Phi_1(\theta)$ с точностью до величин первого порядка малости имеет вид [1–4]:

$$\Phi_1(\theta) = \alpha + u^{0p}(\alpha) + \zeta_4^p(\theta, \alpha) \tag{16}$$

Для упругой зоны вспомогательная задача будет такой

$$\frac{\partial\zeta_1^e}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_3^e}{\partial\theta} + \frac{\zeta_1^e - \zeta_2^e}{\rho} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial\zeta_3^e}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\zeta_2^e}{\partial\theta} + \frac{2\zeta_3^e}{\rho} = 0, \quad \rho\frac{\partial\zeta_4^e}{\partial\rho} + \frac{\partial\zeta_5^e}{\partial\theta} + \zeta_4^e = 0$$

$$\zeta_1^e - \zeta_2^e = 4\frac{\partial \zeta_4^e}{\partial \rho}, \quad \zeta_3^e = \frac{\partial \zeta_5^e}{\partial \rho} - \frac{\zeta_5^e}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \zeta_4^e}{\partial \theta}$$

$$(\sigma_n^{0e} + \zeta_n^e)_{\rho = \Phi_2(\theta)} = -q_2, \quad (\tau_n^{0e} + \zeta_\tau^e)_{\rho = \Phi_2(\theta)} = 0 \tag{18}$$

где функция $\Phi_2(\theta)$ имеет вид аналогичный (16), т.е.

$$\Phi_2(\theta) = 1 + u^{0e}(1) + \zeta_4^e(\theta, 1) \tag{19}$$

Согласно теореме о неявных функциях в задаче (12) следует провести линеаризацию по ζ_i. Тогда линеаризованные условия пластичности и закон течения станут такими

$$(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p})(\zeta_1^p - \zeta_2^p) = 0$$

$$4\frac{du^{0p}}{d\rho}\zeta_3^p - (\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p})\left(\frac{\partial \zeta_5^p}{\partial \rho} - \frac{\zeta_5^p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \zeta_4^p}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{20}$$

С учетом того, что (8) является решением задачи (5)–(6), линеаризованные граничные условия (15), (18) примут следующий вид:

при $\rho = \alpha + u^{0p}(\alpha)$

$$\zeta_1^p + \frac{d\sigma_\rho^{0p}}{d\rho}\zeta_4^p(\theta, \alpha) = 0, \quad \zeta_3^p + \frac{\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}}{\rho}\frac{\partial \zeta_4^p(\theta, \alpha)}{\partial \theta} = 0 \tag{21}$$

при $\rho = 1 + u^{0e}(1)$:

$$\zeta_1^e + \frac{d\sigma_\rho^{0e}}{d\rho}\zeta_4^e(\theta, 1) = 0, \quad \zeta_3^e + \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{\rho}\frac{\partial \zeta_4^e(\theta, 1)}{\partial \theta} = 0$$

Задача (14)–(21) при соответствующих линеаризованных условиях сопряжения имеет нетривиальное решение, если выполняется следующее условие:

$$\Delta = \kappa(\rho_s^0)^4\left\{\kappa(\rho_s^0)^2\alpha^{-2} - 1 - \frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^2 - \frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^{-2} + 2\kappa\ln\frac{\alpha}{\rho_s^0} + \left[(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\kappa}{2}\rho_s^0\right]^4\right\} = 0 \tag{22}$$

Обозначим через q_* наибольший отрицательный корень системы уравнений (10) и (16) при $q_2 = 0$, $\kappa = -k/G$, а через q_{**} – наименьший положительный корень этой системы уравнений при $q_2 = 0$, $\kappa = k/G$. Тогда условия существования нетривиального решения задачи (14)–(21) запишутся так:

$$q_1 - q_2 = q_*, \quad q_1 - q_2 = q_{**} \tag{23}$$

Итак, если величины параметров внешних воздействий таковы, что точка, определяемая координатами q_1, q_2 не выходит за область, ограниченную графиками функций (23), то характеристики напряженно-деформированного состояния трубы, т.е. решение задачи (1)–(4) непрерывно зависит от $f_i(\theta)$ при $f_i(\theta) = 0$. Если же функции $f_i(\theta)$ заданы с точностью до параметров, т.е. $f_i = \varepsilon_i\varphi_i(\theta)$, то характеристики напряженно-деформированного состояния трубы, как следует из аналитичности выражений в (1)–(4), будут аналитическими функциями параметров ε_i в окрестности точки $\varepsilon_i = 0$. Поэтому в этом случае решение задачи (1)–(4) будем искать в виде степенных рядов (являющихся рядами Тейлора):

$$\sigma_\rho^p = \sum_{m,n=0}^{\infty} \sigma_\rho^{mnp}\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n, \quad \sigma_\theta^p = \sum_{m,n=0}^{\infty} \sigma_\rho^{mnp}\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n, \ldots; \quad \upsilon^e = \sum_{m,n=0}^{\infty} \upsilon^{mne}\varepsilon_1^m\varepsilon_2^n \tag{24}$$

Подставляя (24) в (1)–(4) и учитывая, что $\sigma_\rho^{00p} = \sigma_\rho^{0p}, \ldots, \upsilon^{00e} = \upsilon^{0e}$, получаем, например, следующую задачу для пластической области

$$\frac{\partial\sigma_\rho^{10p}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau^{10p}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_\rho^{10p} - \sigma_\theta^{10p}}{\rho} = 0$$

$$\frac{\partial\tau^{10p}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta^{10p}}{\partial\theta} + \frac{2\tau^{10p}}{\rho} = 0$$

$$\rho\frac{\partial u^{10p}}{\partial\rho} + \frac{\partial\upsilon^{10p}}{\partial\theta} + u^{10p} = 0 \tag{25}$$

$$(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p})(\sigma_\rho^{10p} - \sigma_\theta^{10p}) = 0$$

$$4\frac{\partial u^{0p}}{\partial\rho}\tau^{10p} - \left(\frac{\partial\upsilon^{10p}}{\partial\rho} - \frac{\upsilon^{10p}}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10p}}{\partial\theta}\right)(\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}) = 0$$

при $\rho = \alpha + u^{0p}(\alpha)$:

$$\sigma_\rho^{10p} + \frac{d\sigma_\rho^{0p}}{d\rho}\left[\left(1 - \frac{u^0(\alpha)}{\alpha}\right)\varphi_1 + u^{10p}(\theta(\alpha))\right] = 0$$

$$\tau^{10p} + \frac{\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}}{\rho}\left[\left(1 - \frac{u^0(\alpha)}{\alpha}\right)\frac{d\varphi_1}{d\theta} + \frac{\partial u^{10p}(\theta(\alpha))}{\partial\theta}\right] = 0 \tag{26}$$

Для упругой области:

$$\frac{\partial\sigma_\rho^{10e}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau^{10e}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_\rho^{10e} - \sigma_\theta^{10e}}{\rho} = 0$$

$$\frac{\partial\tau^{10e}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta^{10e}}{\partial\theta} + \frac{2\tau^{10e}}{\rho} = 0 \tag{27}$$

$$\rho\frac{\partial u^{10e}}{\partial\rho} + \frac{\partial\upsilon^{10e}}{\partial\theta} + u^{10e} = 0, \quad \sigma_\rho^{10e} - \sigma_\theta^{10e} = 4\frac{\partial u^{10e}}{\partial\rho}$$

$$\tau^{10e} = \frac{\partial\upsilon^{10e}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{10e}}{\partial\theta} - \frac{\upsilon^{10e}}{\rho}$$

при $\rho = 1 + u^{0e}(1)$

$$\sigma_\rho^{10e} + \frac{d\sigma_\rho^{0e}}{d\rho}u^{10e}(\theta, 1) = 0$$

$$\tau^{10e} + \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{\rho}\frac{\partial u^{10e}(\theta, 1)}{\partial\theta} = 0 \tag{28}$$

Решая задачу (25)–(28) при соответствующих условиях сопряжения для $\varphi_1(\theta) = \cos\theta$ получим, что

$$\sigma_\rho^{10p} = \sigma_\theta^{10p} = M_1\frac{1}{\rho}\sin\theta, \quad \tau^{10p} = M_1\frac{1}{\rho}\sin\theta$$

$$
\begin{aligned}
u^{10p} &= -\left(M_2 + M_3 \ln\rho + \frac{1}{2} M_1 c_2 \rho^{-2}\right)\cos\theta \\
\upsilon^{10p} &= \left(M_2 + M_3 + M_3 \ln\rho - \frac{1}{2} M_1 c_2 \rho^{-2}\right)\sin\theta \\
\sigma_\rho^{10e} &= (M_4\rho^{-3} + M_5\rho)\cos\theta, \quad \sigma_\theta^{10e} = (3M_5\rho - M_4\rho^{-3})\cos\theta \\
\tau^{10e} &= (M_4\rho^{-3} + M_5\rho)\sin\theta, \quad u^{10e} = -\frac{1}{4}(M_4\rho^{-3} + M_5\rho^2 + M_6)\cos\theta \\
\upsilon^{10e} &= -\frac{1}{4}(M_4\rho^{-3} - 3M_5\rho^2 - M_6)\sin\theta
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$$
M_1 = 2(\rho_s^0)^2 M_5, \quad M_3 = (\rho_s^0)^2 M_5, \quad M_4 = (\rho_s^0)^4 M_5 \tag{30}
$$

$$
M_6 = 4(\rho_s^0)^2 \ln\rho_s^0 + 4M_2, \quad M_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad M_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta}, \quad c_2 = -\frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^2
$$

$$
\Delta_2 = \kappa\left(1 + \frac{c_2}{\alpha^2}\right)[(1 + c_2)(\rho_s^0)^4 + 4c_2(\rho_s^0)^2 \ln\rho_s^0 + (1 - c_2)^4 + c_2]
$$

$$
\Delta_5 = 4\kappa c_2(1 + c_2\alpha^{-2})
$$

Для σ_ρ^{01p}, ..., υ^{01e} система уравнений, а также условия сопряжения будут с точностью до соответствующих индексов полностью совпадать с системами (25), (27). Граничные же условия будут такими

при $\rho = \alpha + u^{0p}(\alpha)$:

$$
\sigma_\rho^{01e} + \frac{\partial\sigma_\rho^{0p}}{d\rho} u^{01p}(\theta, \alpha) = 0, \quad \tau^{01p} + \frac{\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}}{\rho} \frac{\partial u^{01p}(\theta, \alpha)}{\partial\theta} = 0 \tag{31}
$$

при $\rho = 1 + u^{0e}(1)$:

$$
\sigma_\rho^{01e} + \frac{\partial\sigma_\rho^{0e}}{d\rho}[(1 + c_2)\varphi_2 + u^{01e}(\theta, 1)] = 0,
$$

$$
\tau^{01e} + \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{\rho}\left[(1 + c_2)\frac{d\varphi_2}{d\theta} + \frac{\partial u^{01e}(\theta, 1)}{\partial\theta}\right] = 0
$$

Решая соответствующую систему уравнений для этого приближения при граничных условиях (31), получаем, что

$$
\begin{aligned}
\sigma_\rho^{01p} &= \sigma_\theta^{01p} = N_1 \frac{1}{\rho}\cos\theta, \quad \tau^{01p} = N_1 \frac{1}{\rho}\sin\theta \\
u^{01p} &= -(N_2 + N_3 \ln\rho + 1/2 N_1 c_2 \rho^{-2})\cos\theta \\
\upsilon^{01p} &= (N_2 + N_3 + N_3 \ln\rho - 1/2 N_1 c_2 \rho^{-2})\sin\theta \\
\sigma_\rho^{01e} &= (N_4\rho^{-3} + N_5\rho)\cos\theta, \quad \sigma_\theta^{01e} = (3N_5\rho - N_4\rho^{-3})\cos\theta
\end{aligned}
\tag{32}
$$

$$\tau^{01e} = (N_4\rho^{-3} + N_5\rho)\sin\theta, \quad u^{01e} = -\frac{1}{4}(N_4\rho^{-2} + N_5\rho^2 + N_6)\cos\theta$$

$$\upsilon^{01e} = -\frac{1}{4}(N_4\rho^{-2} - 3N_5\rho^2 - N_6)\sin\theta$$

$$N_1 = 2(\rho_s^0)^2 N_5, \quad N_3 = (\rho_s^0)^2 N_5, \quad N_4 = (\rho_s^0)^4 N_5$$

$$N_6 = 4(\rho_s^0)^2 \ln\rho_s^0 + 4N_2, \quad N_2 = \frac{\bar{\Delta}_2}{\Delta}, \quad N_5 = \frac{\bar{\Delta}_5}{\Delta} \tag{33}$$

$$\bar{\Delta}_2 = \kappa(\rho_s^0)^2(1 + c_2)(1 + c_2\alpha^{-2} - \kappa\ln\alpha)$$

$$\bar{\Delta}_5 = \kappa^2(1 + c_2)$$

Итак, с точностью до величин первого порядка малости напряженно-деформированное состояние трубы будет характеризоваться следующими выражениями

$$\sigma_\rho^p = \sigma_\rho^{0p} + \varepsilon_1\sigma_\rho^{10p} + \varepsilon_2\sigma_\rho^{01p}$$

....

$$\upsilon^p = \varepsilon_1\upsilon^{10p} + \varepsilon_2\upsilon^{01p} \tag{34}$$

$$\sigma_\rho^e = \sigma_\rho^{0e} + \varepsilon_1\sigma_\rho^{10e} + \varepsilon_2\sigma_\rho^{01e}$$

....

$$\upsilon^e = \varepsilon_1\upsilon^{10e} + \varepsilon_2\upsilon^{01e}$$

так как остаточные члены рядов Тейлора (24) будут величинами второго порядка малости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д., Ершов Л.В.* Метод возмущений в теории упругопластических деформаций. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. *Ершов Л.В., Ивлев Д.Д.* О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. ОТН. № 8. 1957. С. 149–152.
3. *Лейбензон Л.С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собр. тр. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 468 с.
4. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. матем. ж. Т. 6. № 2. 1954. С. 140–146.
5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
6. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1968. 526 с.
7. *Артемов М.А., Минаева Н.В.* О существовании состояний системы с распределенными параметрами // Сб.: Математическое моделирование систем. Воронеж: Изд-во Воронежс. ун-та, 1998. С. 8–12.

Воронеж

Поступила в редакцию
24.04.2001