

УДК 539.374

© 2004 г. Д.В. ГОЦЕВ, А.Н. СПОРИХИН

## ЛОКАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВЫРАБОТОК С МНОГОСЛОЙНОЙ КРЕПЬЮ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ МАССИВАХ

В рамках точных трехмерных уравнений устойчивости исследована локальная неустойчивость горизонтальной горной выработки с составной крепью при упругопластическом поведении массива горных пород и крепи материалов. Дана оценка влияния на критические контактные давления параметров массива горных пород и крепи.

Известно, что решение задач горной механики, относящихся к процессу проведения подземных выработок, сводится к постановке и решению задач локальной неустойчивости массива возле выработок при упруго-пластических деформациях [1–4]. Составной частью этой проблемы является решение вопроса об оптимальных параметрах контактных давлений на крепь и размерах поперечного сечения сооружаемых подземных выработок. В отличие от [2] в настоящей работе на основе точных трехмерных уравнений [5] исследуется локальная неустойчивость пород приствольной зоны горизонтальной горной выработки с учетом многослойности крепи.

Отметим, что постановка задачи определения горного давления как процесса потери устойчивости принадлежит Л. В. Ершову [6].

Рассмотрим локальную неустойчивость горизонтальной выработки с многослойной крепью в упругопластическом массиве. Примем, что свойства пород приствольной зоны и неупругих зон крепи моделируются соотношениями упругопластического тела с трансляционным упрочнением [7, 8].

В этом случае функция нагружения имеет вид

$$F = (s_s^j - c_i(\epsilon_s^j)^p)(s_s^j - c_i(\epsilon_s^j)^p) - k_i^2 \quad (s, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

а соотношения ассоциированного закона течения –

$$(e_s^j)^p = \eta(s_s^j - c_i(\epsilon_s^j)^p), \quad S_s^j = \sigma_s^j - \sigma \delta_s^j, \quad \sigma = \sigma_k^k/3 \quad (2)$$

Здесь  $c_i$  – коэффициент упрочнения,  $k_i$  – предел текучести,  $s_s^j$  – девиатор тензора напряжений,  $\delta_s^j$  – символ Кронекера,  $\epsilon_s^j$  – компоненты тензора деформаций,  $e_s^j$  – компоненты тензора скоростей деформаций,  $\eta$  – положительный множитель. Индекс  $i$  принимает значения 1, 2, ...,  $N$ . Его отсутствие у величин  $c$  и  $k$  в (1), (2) подчеркивает принадлежность этих величин к массиву. По повторяющимся индексам проводится суммирование.

Заменим горный массив с выработкой, подкрепленной многослойной ( $N$ -слойной) крепью, как это обычно делается, невесомой бесконечной пластиной с круговым отверстием радиуса  $R_N$ , в которое с некоторым натягом помещена система из  $N$  колец

(слои крепи), последовательно запрессованных одно в другое. К внутреннему контуру первого кольца радиуса  $R_0$  приложена равномерно распределенная нагрузка  $q_0$ . Из-за натягов на линиях сопряжения колец и пластины возникают сжимающие усилия  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . Величины  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) таковы, что образовавшиеся пластические области полностью охватывают внутренние контуры колец. На бесконечности напряжения в пластине стремятся к величине  $gh$  ( $g$  – объемный вес породы,  $h$  – глубина заложения выработки), т.е. начальное напряженное состояние в массиве (до проведения выработки) принимается гидростатическим. Предполагается, что пластина и включения выполнены из различных материалов.

Определение напряженно-деформированного докритического состояния составной конструкции в осесимметричном случае сводится к решению двух взаимосвязанных задач о концентрации напряжений. Первая задача сводится к определению напряженно-деформированного состояния в  $i$ -м кольце, вторая – к определению напряженно-деформированного состояния в пластине.

Докритическое напряженно-деформированное состояние, соответствующее  $i$ -у кольцу, в полярных координатах  $(r, \theta)$  определено в виде [9]:

в пластической области ( $R_{i-1} < r < \psi_i$ ):

$$(u_r)_i^p = \frac{a_2^i}{r}, \quad (\epsilon_r)_i^p = -(\epsilon_\theta)_i^p = -\frac{k_i r^2 + 2\sqrt{2}a_2^i}{r^2 \sqrt{2}(2 + c_i)}$$

$$(\sigma_r)_i^p = \frac{2c_i a_2^i}{2 + c_i} \left( \frac{1}{R_{i-1}^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2\sqrt{2}k_i}{2 + c_i} \ln \frac{R_{i-1}}{r} - q_{i-1} \quad (3)$$

$$(\sigma_\theta)_i^p = \frac{2c_i a_2^i}{2 + c_i} \left( \frac{1}{R_{i-1}^2} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2\sqrt{2}k_i}{2 + c_i} \left( \ln \frac{R_{i-1}}{r} - 1 \right) - q_{i-1}$$

в упругой области ( $\psi_i < r < R_i$ ):

$$(u_r)_i^e = b_1^i \left( \frac{r}{3} + \frac{1}{r} \right) - \frac{r q_i}{6}, \quad (\sigma_r)_i^e = 2b_1^i \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) - q_i$$

$$(\sigma_\theta)_i^e = 2b_1^i \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) - q_i, \quad b_1^i = -\frac{\psi_i^2 R_i^2 (3\sqrt{2}k_i + c_i q_i)}{2(6 - c_i \psi_i^2)}$$

$$a_2^i = b_1^i \left( 1 + \frac{\psi_i^2}{3R_i^2} \right) - \frac{q_i \psi_i^2}{6} \quad (4)$$

Уравнение для определения радиуса  $\psi_i$  упругопластической границы в  $i$ -м кольце имеет вид

$$\frac{c_i}{2 + c_i} \left( \frac{1}{\psi_i^2} + \frac{1}{R_{i-1}^2} \right) \frac{q_i \psi_i^2}{3} - \frac{\psi_i^2 R_i^2 (3\sqrt{2}k_i + c_i q_i)}{6R_i^2 - c_i \psi_i^2} \left( \frac{1}{\psi_i^2} + \frac{1}{R_i^2} - \frac{c_i}{2 + c_i} \left( \frac{1}{\psi_i^2} + \frac{1}{R_{i-1}^2} \right) \left( \frac{\psi_i^2}{3R_i^2} + 1 \right) \right) + \frac{2\sqrt{2}k_i}{2 + c_i} \left( \ln \frac{\psi_i}{R_{i-1}} + 1 \right) + q_{i-1} - q_i = 0 \quad (5)$$

В равенствах (3)–(5)  $R_i$  – радиусы колец;  $i = 1, 2, \dots, N$  – количество слоев крепи.

Докритическое напряженно-деформированное состояние в пластине в полярных координатах определено в виде:

в пластической области ( $R_N < r < \gamma$ ):

$$u_r^p = \frac{b_1}{r}, \quad \varepsilon_r^p = -\varepsilon_\theta^p = -\frac{2\sqrt{2}b_1 - kr^2}{r^2\sqrt{2}(2+c)}, \quad \sigma_r^p = \frac{2b_1c}{2+c}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2\sqrt{2}k}{2+c}\ln r - q_N$$

$$\sigma_\theta^p = \frac{2b_1c}{2+c}\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2\sqrt{2}k}{2+c}(\ln r + 1) - q_N \quad (6)$$

в упругой области ( $\gamma < r < \infty$ ):

$$\sigma_r^e = -\frac{2b_1}{r^2} - gh, \quad \sigma_\theta^e = \frac{2b_1}{r^2} - gh, \quad b_1 = \frac{\sqrt{2}k\gamma^2}{4} \quad (7)$$

Уравнение для определения радиуса упругопластической границы  $\gamma$  имеет вид

$$q_N + gh - \frac{\sqrt{2}k}{2(2+c)}\left(4\ln\frac{\gamma}{R_N} + 2 + c\left(\frac{\gamma}{R_N}\right)^2\right) = 0 \quad (8)$$

В соотношениях (3), (4), (6)  $u_r$  – компонента вектора перемещения;  $c, k$  – коэффициент упрочнения и предел текучести для материала пластины.

В (3)–(8) все величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к модулю сдвига  $G$  первого слоя крепи, а имеющие размерность длины – к внешнему радиусу первого кольца  $R_1$ . Верхний индекс  $p$  обозначает величины, относящиеся к пластической области,  $e$  – к упругой области.

Исследование устойчивости основного состояния (3)–(8) горизонтальной выработки с многослойной крепью при принятии обобщенной концепции продолжающегося нагружения [5] и при предположении, что слои работают совместно без проскальзывания и отставания, сводится к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях при соответствующих граничных условиях [10].

Уравнения равновесия для областей пластического  $V^p$  и упругого  $V^e$  деформирования массива и крепи имеют вид

$$\nabla_s(\sigma_j^s + \sigma_\alpha^{0s}\nabla^\alpha u_j) = 0, \quad \nabla_s(\sigma_{ji}^s + \sigma_{\alpha i}^{0s}\nabla^\alpha u_{ji}) = 0 \quad (9)$$

где по индексу  $i$  суммирование нет ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Здесь и далее  $\nabla$  – символ ковариантного дифференцирования, градус вверху соответствует компонентам основного невозмущенного состояния (3)–(8).

Граничные условия на внутренней поверхности  $S_{R_0}^p$  и условия затухания возмущений на внешней поверхности  $S_\infty^e$  массива запишем так

$$N_s(\sigma_j^s + \sigma_\alpha^{0s}\nabla^\alpha u_j) = 0, \quad u_j|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (10)$$

Условия непрерывности на упругопластической границе  $\gamma$  имеют вид:

$$[N_s(\sigma_j^s + \sigma_\alpha^{0s}\nabla^\alpha u_j)] = 0, \quad [u_j] = 0 \quad (11)$$

На упругопластических границах  $\psi_i (i = 1, 2, \dots, N)$  условия непрерывности имеют вид (11), где всем величинам следует приписывать индекс  $i$  внизу.

Связь между амплитудными значениями напряжений и перемещений для несжимаемой упругопластической модели среды в пластической и упругой областях представима в форме [10]:

$$\sigma_j^s = (a_{s\alpha} g^{\alpha\alpha} \nabla_\alpha u_\alpha + p) g_j^s + (1 - g_j^s) g^{ss} G_j^s (\nabla_s u_j + \nabla_j u_s) \quad (12)$$

$$a_{s\alpha} = 2\mu g_{s\alpha} - \frac{4\mu^2 \chi f_{ss}^0 f_{\alpha\alpha}^0}{k^2 (2\mu + c)}, \quad G_j^s = \mu = G, \quad f_{sj}^0 = S_{sj}^0 - c_\beta \epsilon_{sj}^{0p} \quad (13)$$

где  $p$  – множитель Лагранжа (суммирование по индексам  $s, j$  отсутствует).

Значение  $\chi = 1$  соответствует упругопластической среде,  $\chi = 0$  – упругой среде. Соотношения (12), (13) описывают напряженно деформированное состояние массива горных пород в пластической и упругой областях, а также и многослойной крепи, если в них всем величинам приписать индекс  $i$  внизу.

Уравнения (9)–(13) с учетом условий несжимаемости в области  $V^p$  массива и в областях  $V_i^p$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) крепи представляют собой взаимосвязанную замкнутую систему уравнений для исследования устойчивости горизонтальной выработки с многослойной крепью, когда имеются границы раздела областей упругого и пластического поведения материала при нагружении в горном массиве и крепи. Система уравнений (9), (12), (13) – система  $4(N + 1)$  дифференциальных уравнений в частных производных относительно амплитудных значений векторов перемещений  $u, v, w, u_i, v_i, w_i$  и гидростатических давлений  $p$  и  $p_i$  соответствующих пластической и упругой зонам массива и крепи. Нетривиальное решение этой задачи соответствует потери устойчивости основного состояния. Для нахождения собственных значений задачи перемещения и гидростатические давления в зонах упругого и пластического деформирования для горного массива и крепи аппроксимируем двойными тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned} u &= \sum_n \sum_m A_{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz), & v &= \sum_n \sum_m B_{nm}(r) \sin(m\theta) \cos(nz) \\ w &= \sum_n \sum_m C_{nm}(r) \cos(m\theta) \sin(nz), & p &= \sum_n \sum_m D_{nm}(r) \cos(m\theta) \cos(nz) \end{aligned} \quad (14)$$

Решения (14) соответствуют областям крепи  $V_i^p$  и  $V_i^e$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), если функциям  $u, v, w, p, A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D_{nm}$  припишем индекс  $i$  внизу. Здесь  $n, m$  – параметры волнообразования. Выбор решений в форме (14) допускает локальную потерю устойчивости массива и крепи по одинаковой форме.

Подставляя функции  $u, v, w, p$  в линеаризированные уравнения устойчивости (9) и учитывая (12), (13), а также условие несжимаемости, после ряда преобразований получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$ :

$$\begin{aligned} \xi_1 A(r) + \xi_2 A'(r) + \xi_3 A''(r) + \xi_4 B(r) + \xi_5 B'(r) + \xi_6 B''(r) + \xi_7 B'''(r) &= 0 \\ \xi_8 A(r) + \xi_9 A'(r) + \xi_{10} A''(r) + \xi_{11} A'''(r) + \xi_{12} B(r) + \xi_{13} B'(r) + \xi_{14} B''(r) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\xi_1 = \sigma_\theta^0 (1 - m^2) - m^2 - 2r \sigma_{\theta,r}^0 - n^2 r^2 + 1$$

$$\xi_2 = r^2 \sigma_{r,r}^0 - r(2\sigma_\theta^0 + 1 - \sigma_r^0), \quad \xi_3 = r^2 (1 - 2a_0 + \sigma_r^0)$$

$$\begin{aligned} \xi_4 &= (1 + \sigma_\theta^0) \left( \frac{1}{m} - m \right) - \frac{r \sigma_{\theta,r}^0 (1 + m^2)}{m^3} - \frac{r^2 n^2}{m^3} \\ \xi_5 &= r \left\{ (2a_0 - 1 - \sigma_\theta^0) m - \frac{1}{m} (1 + \sigma_\theta^0) \right\} + \frac{r^3}{m} (\sigma_{r,rr}^0 - n^2) + \frac{r^2}{m} 2\sigma_{r,r}^0 \\ \xi_6 &= \frac{2r^2}{m} (\sigma_r^0 + \sigma_{r,r}^0 + 1), \quad \xi_7 = \frac{r^3}{m} (\sigma_r^0 + 1) \\ \xi_8 &= nr^2 (a_0 - 1 - 2\sigma_\theta^0) + \frac{m^2 r}{n} (1 + \sigma_\theta^0) - \frac{r}{n} (1 + \sigma_r^0 - r\sigma_{r,r}^0) \\ \xi_9 &= nr^3 (1 - a_0) - \frac{m^2 r}{n} (1 + \sigma_\theta^0) - \frac{r}{n} (1 + \sigma_r^0 - r\sigma_{r,r}^0) \\ \xi_{10} &= \frac{r^2}{n} (2 + \sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0), \quad \xi_{11} = \frac{r^3}{n} (1 + \sigma_r^0) \\ \xi_{12} &= mn r^2 a_0 - \frac{n^3 r^2}{m} - \left( \frac{1}{m} + \frac{m^3}{nr^2} \right) (\sigma_\theta^0 + 1) + \frac{m}{nr^2} (1 + \sigma_r^0 - r\sigma_{r,r}^0) \\ \xi_{13} &= \frac{rm}{n} (\sigma_{r,r}^0 - \sigma_r^0 - 1) - \frac{r^3 n}{m} (1 + \sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0) \\ \xi_{14} &= (1 + \sigma_r^0) \left( \frac{mr^2}{n} + \frac{r^4 n}{m} \right), \quad a_0 = \frac{2}{2+c} \end{aligned} \quad (16)$$

При этом в горном массиве в области  $V^p$  докритическое состояние определяется по формулам (6), а в области  $V^e$  – по формулам (7) соответственно. Система уравнений (15) соответствует зонам крепи  $V_i^p$  и  $V_i^e$ , если функциям  $A$  и  $B$  припишем индекс  $i$  внизу.

Докритические состояния в областях крепи  $V_i^p$  определяются по формулам (3), а в областях крепи  $V_i^e$  – по формулам (4) соответственно.

Для упрощения записи здесь в (15) и далее индексы  $n, m$  у величин  $A, B$  опущены.

Граничные условия на внутреннем контуре первого кольца при  $r = R_0$  с учетом (12), (13) принимают вид

$$\begin{aligned} & A_1^p \left\{ \frac{2}{R_0} (a_0 - (\sigma_\theta^0)_1^p - 1) \right\} + (A')_1^p (2 - 2a_0 + (\sigma_r^0)_1^p) + \\ & + B_1^p \left\{ \frac{1}{R_0} \left[ ma_0 - \frac{1}{m} (1 + (\sigma_\theta^0)_1^p) + m^2 ((\sigma_\theta^0)_1^p + 1 - a_0) \right] - \frac{n^2 R_0}{m} \right\} + \\ & + (B'')_1^p \frac{1}{m} [1 + (\sigma_r^0)_1^p + R_0 (\sigma_{\theta,r}^0)_1^p] + (B''')_1^p \frac{R_0}{m} [1 + (\sigma_r^0)_1^p] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$mA_1^p + B_1^p - R_0(B')_1^p [1 + (\sigma_r^0)_1^p] = 0$$

$$A_1^p \left[ n - \frac{1 + (\sigma_r^0)_1^p}{nR_0^2} \right] + \frac{1 + (\sigma_r^0)_1^p}{nR_0} \left[ (A')_1^p - \frac{m}{R_0} B_1^p + m(B')_1^p + R_0(A'')_1^p \right] = 0$$

Из условий сопряжения (11) на упругопластической границе  $\psi_i (i = 1, 2, \dots, N)$  при учете (12), (13) получаем

$$A_i^p \frac{1}{\psi_i} - (A')_i^p + B_i^p \frac{m}{\psi_i} + (B')_i^p \left\{ \frac{\psi_i}{2ma_0} [(\sigma_{r,r}^0)_i^p - (\sigma_{r,r}^0)_i^e] \right\} + \frac{\psi_i}{2ma_0} [(\sigma_r^0)_i^e + 1] [(B'')_i^p - (B'')_i^e] = 0, \quad (A'')_i^p - (A'')_i^e = 0 \quad (18)$$

На границе раздела  $\gamma$  упругой и пластической областей массива имеют место условия, аналогичные (18), где следует опустить индекс  $i$  и  $\psi_i$  заменить на  $\gamma$ .

На границе запрессованных  $i$ -го и  $(i + 1)$ -го слоев крепи согласно (10) имеют место соотношения

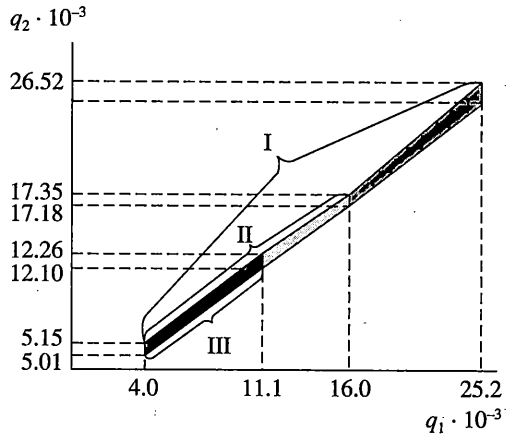
$$A_{i+1}^p - (A')_{i+1}^p + \frac{m}{R_i} B_{i+1}^p + (B')_{i+1}^p \left\{ \frac{R_i}{2ma_0} [(\sigma_{r,r}^0)_{i+1}^p - (\sigma_{r,r}^0)_{i+1}^e] \right\} + \frac{R_i}{2ma_0} [(\sigma_r^0)_i^e + 1] [(B'')_{i+1}^p - (B'')_i^e] = 0 \quad (19)$$

$$(A'')_{i+1}^p - (A'')_i^e = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

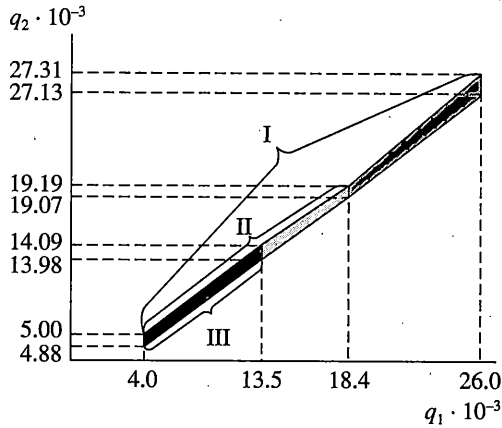
Из условия локальности возмущений  $u_j \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty (j = 1, 2, 3)$  следует

$$(A')^e = 0, \quad (A'')^e = 0, \quad (B')^e = 0, \quad (B'')^e = 0 \quad (20)$$

Найти точное аналитическое решение краевой задачи (15)–(20) не представляется возможным. Будем искать приближенное решение методом конечных разностей [11]. В результате получаем бесконечную систему однородных алгебраических уравнений, линейных относительно параметров  $A_{nm}, B_{nm}, A_{nm}^i, B_{nm}^i$ . Отсюда следует, что определение допустимых комбинаций критических параметров контактных давлений  $q_i (i = 0, 1, \dots, N)$ , соответствующих локальной потере устойчивости горизонтальной выработки с многослойной крепью сводится к разрешимости матричного уравнения. При вычислении определителя наряду с нахождением основного напряженно-деформированного состояния для каждой области  $V_i^p, V_i^e (i = 1, 2, \dots, N)$  крепи (3), (4) и областей  $V^p, V^e$  массива (6), (7) необходимо учитывать уравнения (5) и (8), определяющие положения упруго-пластических границ  $\psi_i$  многослойной крепи и  $\gamma$  – в горном массиве. Минимизация должна производиться по шагу разностной сетки, параметрам волнообразования по контуру  $m$  и образующей  $n$ , параметрам материала и конструкции  $\lambda_j$ . Таким образом, получаем задачу многомерной оптимизации величин  $q_i (i = 0, 1, 2, \dots, N)$  в зависимости от  $m, n$  при условии равенства нулю определителя полученной алгебраической системы:  $\det(q, m, n, \lambda_j) = 0$ .



Фиг. 1

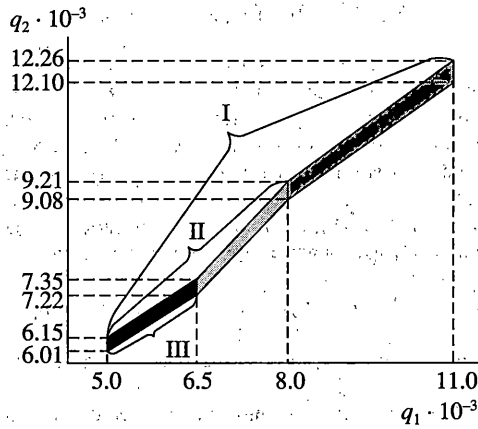


Фиг. 2

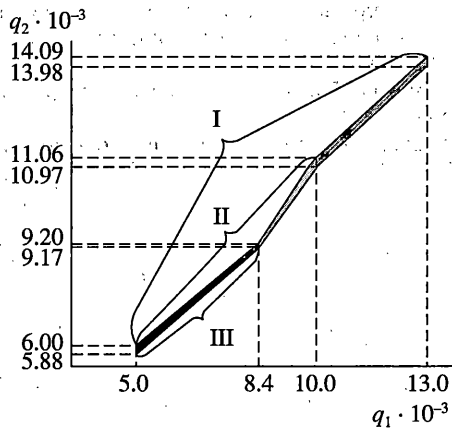
Вычисления проводились для случая, когда горный массив содержал выработку, подкрепленную двухслойной крепью. Рассмотрены следующие варианты: фиг. 1, материал массива – песчаник, не опасный по выбросам; внешний слой крепи – железобетон, внутренний – бетон; фиг. 2, материал массива – песчаник, не опасный по выбросам; внешний слой крепи – бетон, внутренний – железобетон; фиг. 3, материал массива – аргиллит; внешний слой крепи – железобетон, внутренний – бетон; фиг. 4, материал массива – аргиллит; внешний слой крепи – бетон, внутренний – железобетон.

Безразмерные характеристики материалов ( $M$ ): песчаник, аргиллит, бетон и железобетон приведены в таблице.

На фигурах 1–4 показаны области (I, II, III) значений критических контактных давлений  $q_1$ ,  $q_2$ , при различной геометрии выработки и крепи, которым соответствуют значения параметров волнообразования  $m = n = 4$ . Область I соответствует  $R_0 = 0.001$ ,  $R_2 = 1.1$  и включает в себя область II –  $R_0 = 0.003$ ,  $R_2 = 1.1$ , которая в свою очередь содержит область III –  $R_0 = 0.005$ ,  $R_2 = 1.1$ . Во всех случаях на внутреннем контуре первого слоя крепи  $q_0 = 0$ , а безразмерное значение гидростатического давления в нетронутом массиве  $gh = 0.01$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Анализ численного эксперимента показал, что при одночленной аппроксимации перемещений (14) значения критических контактных давлений  $q_1, q_2$  оказываются завышенными. Как следует из фиг. 1–4 при замене материала внешнего слоя крепи на материал внутреннего слоя область критических значений контактных давлений  $q_1, q_2$  изменяется не существенно (3–6%), а при уменьшении значений физико-механических характеристик  $c, k$  – уменьшается. При увеличении ширины внутреннего слоя крепи область критических значений  $q_1, q_2$  увеличивается.

$M$	$c$	$k$	$E \cdot 10^5$ [Па]
Песчаник	2.9496	0.017	297255
Аргиллит	1.5533	0.008	199555
Бетон	0.4252	0.006	242910
Железобетон	0.4698	0.007	242910



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спорыхин А.Н., Шашкин А.И. Устойчивость вертикальных выработок, упрочняющихся в пластических массивах // Прикл. механика. 1974. Т. 10. Вып. 11. С. 76–80.
2. Спорыхин А.Н. К устойчивости горизонтальных выработок в массивах, обладающих упруго-вязкопластическими свойствами // Изв. АН КазССР. 1975. № 1. С. 67–72.
3. Алимжанов М.Т. Проблема устойчивости равновесия в задачах геомеханики // Успехи механики. 1990. Т. 13. Вып. 3. С. 21–57.
4. Спорыхин А.Н., Чеботарев А.С. Локальная неустойчивость стенок бурящихся скважин в сжимаемых упрочняющихся упруго-вязкопластических массивах // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 6. С. 177–183.
5. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища шк., 1986. 511 с.
6. Ершов Л.В. О проявлении горного давления в горизонтальных выработках // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 2. с. 298–300.
7. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
8. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
9. Гоцев Д.В., Ковалев А.В., Спорыхин А.Н. Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упруго-пластическом поведении материалов // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 3. С. 146–151.
10. Спорыхин А.Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1997. 359 с.
11. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения М.: Наука, 1964. 192 с.

Воронеж

Поступила в редакцию  
7.05.2001