

УДК 539.374

© 2004 г. Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, Д. М. КЛИМОВ, Б. Е. ПОБЕДРЯ

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ

Основной задачей механики деформируемого твердого тела (МДТТ) является моделирование процессов деформирования. При этом модели можно условно разбить на два класса: склерономные и реономные. Определяющие соотношения склерономных моделей инвариантны относительно преобразования времени. Реономные модели описываются операторными соотношениями, явно зависящими от времени. Простейшей реономной физически линейной моделью МДТТ является модель вязкоупругого тела, которая описывает свойства релаксации (уменьшения напряжений при постоянной деформации) и ползучести (возрастания деформаций при постоянном напряжении). Модель линейного вязкоупругого тела учитывает рассеивание энергии, возникающее вследствие тепловыделения при деформировании тела, а также другие эффекты, не описываемые другими моделями.

У истоков современной теории вязкоупругости стоял выдающийся ученый Ю.Н. Работнов [1]. Этой теории посвящена обширная литература (см., например, монографии [1–35], многие из которых стали классическими учебниками). Совершенствование техники требует расширения возможностей моделирования. Это относится также к модели линейного вязкоупругого тела. Целью настоящего обзора и является описать основные достижения такого моделирования.

1. Ядра и функции релаксации и ползучести. Рассмотрим сначала простейшие одномерные модели деформируемого вязкоупругого тела. Иногда такие модели называют наивными, однако с их помощью легко объяснить физическую природу явления вязкоупругости и характер возможных обобщений.

Наивные модели, по существу, состоят из двух элементов. Один из них называется гуковским, изображающимся в виде пружинки (фиг. 1). Относительное удлинение такой пружинки будем обозначать через ϵ' и называть упругой деформацией (штрих и означает, что деформация упругая). На фигурах удобно обозначать расстояние между концами пружинки через ϵ' , хотя правильно было бы считать, что оно равно $1 + \epsilon'$ (в случае, если длина недеформированной пружинки равна единице).

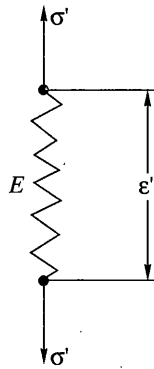
Силу натяжения пружинки, отнесенную к площади, обозначим через σ' (упругое напряжение). Тогда естественно записать для гуксовской модели соотношение

$$\sigma' = E\epsilon' \quad (1.1)$$

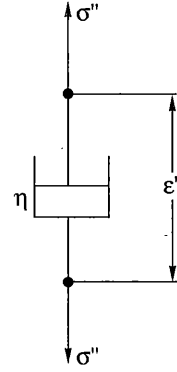
которое соответствует закону Гука с модулем упругости E .

Вторым из элементов, составляющих наивные модели, является ньютоновский элемент или поршенек (фиг. 2). Для него сила натяжения, отнесенная к площади, или вязкое напряжение σ'' пропорциональны скорости движения концов элемента

$$\sigma'' = \eta \frac{d\epsilon''}{dt} \quad (1.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Через ϵ'' обозначено относительное удлинение или вязкая деформация элемента (ход поршня). Два штриха будем приписывать величинам, относящимся к ньютоновским элементам. Постоянная η в соотношении (1.2) – коэффициент вязкости.

Для сохранения записи введем символ d , означающий оператор дифференцирования по времени

$$d \equiv d/dt, \quad d\epsilon'' \equiv d\epsilon''/dt \quad (1.3)$$

Обратным оператором к d будет интегральный оператор d^{-1} :

$$d^{-1}f \equiv \int f(t)dt \quad (1.4)$$

Однако первообразная функция $f(t)$ определяется соотношением (1.4) с точностью до постоянной. Чтобы исключить порождаемую этой постоянной неоднозначность введем класс так называемых основных функций $f(t)$, которые равны нулю для отрицательных значений t :

$$t < 0: f(t) \equiv 0 \quad (1.5)$$

Будем рассматривать определенный интеграл, причем положим

$$d^{-1}f \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{t+\alpha} f(\tau)d\tau \equiv \int_{0^-}^{t^+} f(\tau)d\tau \equiv \int_0^t f(\tau)d\tau \quad (1.6)$$

Здесь и далее α – любое положительное число. Из записи (1.6) следует, что для сокращения опускаются значки $(-)$ и $(+)$. Однако пределы интегрирования $\tau = 0$ и $\tau = t$ условны и истинное значение этих пределов определяется цепочкой тождественных записей (1.6).

Таким образом, если некоторая функция $f(t)$ n раз дифференцируема, то, применяя к ней n раз оператор d , получим

$$d^n f \equiv \frac{d^n}{dt^n} f \quad (1.7)$$

Тогда имеем оператор d^{-n} обратный к d^n :

$$d^{-n} f \equiv \underbrace{\int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_{n-1}} \dots \int_0^{\tau_1}}_n f(\tau_n) d\tau_n d\tau_{n-1} \dots d\tau_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (1.8)$$

Формулу (1.8), устанавливаемую $(n - 1)$ -кратным интегрированием по частям, применяют для определения производной дробного порядка (формально n можно положить не только натуральным, но и любым положительным числом большим либо равными единице). Развитие математического аппарата дробного интегро-дифференциального исчисления [36, 37] сделало возможным его применение в различных аспектах теории вязкоупругости [38–47].

Используем также процедуры интегрирования по частям и замены переменных, поэтому отметим сразу особенности этих процедур, вытекающие из определений (1.5), (1.6). Пусть дифференцируемые функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$ обладают свойством (1.5). Тогда из интегрирования по частям имеем

$$\int_0^t f(t-\tau)g^{(i)}(\tau)d\tau = \int_0^t f^{(i)}(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (1.9)$$

$$f^{(i)}(t-\tau) \equiv \frac{d}{d(t-\tau)}f(t-\tau) = \frac{\partial}{\partial t}f(t-\tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau}f(t-\tau) \quad (1.10)$$

а из замены переменных следует

$$\int_0^1 f(t-\tau)g^{(i)}(\tau)d\tau = \int_0^t g^{(i)}(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (1.11)$$

Действительно, используя в (1.9) свойства (1.6), получим

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t-\tau)g^{(i)}(\tau)d\tau &\equiv \int_{-\alpha}^{t+\alpha} f(t-\tau)g^{(i)}(\tau)d\tau = f(t-\tau)g(\tau)|_{\tau=-\alpha}^{t+\alpha} - \\ &- \int_{-\alpha}^{t+\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau}f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^1 f^{(i)}(t-\tau)g(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (1.12)$$

При замене

$$t-\tau = \xi, \quad -d\tau = d\xi, \quad g^{(i)}(t) = h(t) \quad (1.13)$$

из (1.11) и (1.6) находим

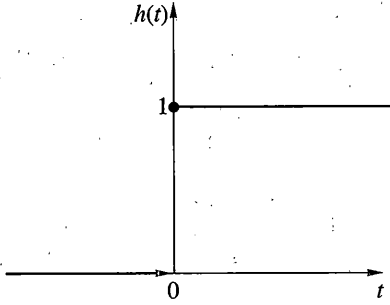
$$\int_0^t f(t-\tau)g^{(i)}(\tau)d\tau \equiv \int_{-\alpha}^{t+\alpha} f(t-\tau)h(\tau)d\tau = - \int_{t+\alpha}^{-\alpha} f(\xi)h(t-\xi)d\xi = \int_0^t g^{(i)}(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (1.14)$$

В формулах (1.9), (1.11)–(1.14) фигурирует обозначение (1.10). В дальнейшем используется значение функций в момент $t = 0$. При этом всегда имеется в виду, что

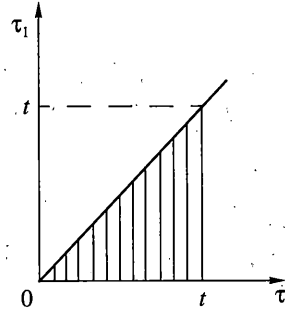
$$f(0) \equiv f(0^+) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha) \quad (1.15)$$

Отметим также свойства дельта-функции Дирака $\delta(t)$ и единичной функции Хевисайда $h(t)$ (фиг. 3):

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq \tau \\ 0, & \text{если } t < \tau \end{cases} \quad (1.16)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\delta(t) = dh(t)/dt \quad (1.17)$$

$$\int_0^t f(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_0^t \delta(t-\tau)f(\tau)d\tau = f(t) \quad (1.18)$$

$$\int_0^t \delta(\tau)d\tau = 1, \quad \delta(t) = 0 \quad \text{при } t \neq 0 \quad (1.19)$$

Используя свойства (1.16)–(1.19), можно записать определяющие соотношения Гука (1.1) и Ньютона (1.2) в интегральном виде

$$\sigma'(t) = \int_0^t \Gamma_1(t-\tau)\varepsilon'(\tau)d\tau, \quad \varepsilon'(t) = \int_0^t K_1(t-\tau)\sigma'(\tau)d\tau \quad (1.20)$$

$$\sigma''(t) = \int_0^t \Gamma_2(t-\tau)\varepsilon''(\tau)d\tau, \quad \varepsilon''(t) = \int_0^t K_2(t-\tau)\sigma''(\tau)d\tau \quad (1.21)$$

$$\Gamma_1 = E\delta(t), \quad K_1 = \delta(t)/E, \quad \Gamma_2(t) = \eta\delta^{(1)}(t), \quad K_2(t) = h(t)/\eta \quad (1.22)$$

Из соотношений (1.20), (1.21) следует, что связь между напряжением и деформацией может быть определена с помощью интегральных операторов

$$\sigma(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (1.23)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (1.24)$$

с интегральными ядрами $\Gamma(t)$ и $K(t)$. Разумеется, операторы (1.23) и (1.24) должны быть взаимно обратными. Подставим, например, (1.24) в (1.23) и изменим порядок интегрирования по заштрихованному на фиг. 4 треугольнику. Имеем

$$\sigma(t) = \iint_{00}^{t\tau} \Gamma(t-\tau)K(\tau-\tau_1)\sigma(\tau_1)d\tau_1d\tau = \int_0^t \left[\int_{\tau_1}^t \Gamma(t-\tau)K(\tau-\tau_1)d\tau \right] \sigma(\tau_1)d\tau_1 \quad (1.25)$$

Сравнивая (1.25) с соотношением (1.18), в котором надо положить $f(t) = \sigma(t)$, заключаем, что выражение в квадратных скобках в правой части (1.25) должно быть равно $\delta(t - \tau_1)$. Откуда при $\tau_1 = 0$ получим условие взаимнообратности

$$\int_0^t \Gamma(t - \tau)K(\tau)d\tau = \int_0^t K(t - \tau)\Gamma(\tau)d\tau = \delta(t) \quad (1.26)$$

Видно, что для соотношений (1.20) и (1.21) условия (1.26) выполняются.

Из выражения (1.26) следует, что далее придется иметь дело с сингулярностями в виде дельта-функций и их производных. При этом чем регулярнее одно из ядер $\Gamma(t)$ или $K(t)$ тем сингулярнее обратное к нему, с которым оно связано соотношениями (1.26). Если положить, например

$$\Gamma(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (1.27)$$

то, интегрируя (1.26) по частям $(n - 1)$ раз, получим n -кратный интеграл от функции $\Gamma(t)$. Поэтому

$$K(t) = \delta^{(n)}(t) \quad (1.28)$$

т.е. $K(t)$ имеет сингулярность в виде n -кратной производной от дельта-функции.

Одинаковую сингулярность взаимнообратные ядра $\Gamma(t)$ и $K(t)$ будут иметь лишь в том случае, если их можно представить в виде

$$K(t) = K_0\delta(t) + \tilde{K}(t), \quad \Gamma(t) = \Gamma_0\delta(t) - \tilde{\Gamma}(t) \quad (1.29)$$

где ядра $\tilde{\Gamma}(t)$ и $\tilde{K}(t)$ уже не имеют никаких сингулярностей вида дельта-функций и их производных. Знак минус во втором выражении (1.29) выбран в силу существующих традиций.

Подставляя (1.29) в (1.26), получим

$$\Gamma_0 K_0 = 1, \quad \int_0^t \tilde{\Gamma}(t - \tau)\tilde{K}(\tau)d\tau + K_0\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma_0\tilde{K}(t) \quad (1.30)$$

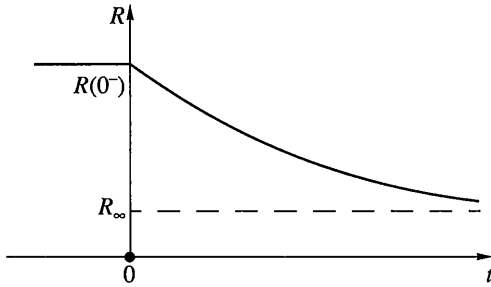
$$\int_0^t \tilde{K}(t - \tau)\tilde{\Gamma}(\tau)d\tau + K_0\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma_0\tilde{K}(t)$$

Для функций разрывных при $t = 0$ удобно пользоваться интегралами Стильтьеса. С их помощью соотношения (1.23) и (1.24) можно записать соответственно

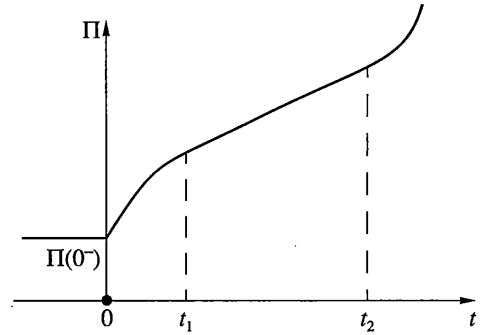
$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau)d\varepsilon(\tau) \quad (1.31)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau)d\sigma(\tau) \quad (1.32)$$

Будем считать, что напряжение σ , деформация ε и все их производные по времени являются основными функциями, т.е. равны нулю при $t < 0$ и могут иметь разрыв в



Фиг. 5



Фиг. 6

точке $t = 0$. Предположим также, что функция $\varepsilon(t)$ еще и непрерывна при $t \geq 0$. Обозначим при $t \geq 0$:

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(0^+), \quad \varepsilon(0^+) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varepsilon(\alpha) \quad (1.33)$$

Тогда, очевидно, при $-\infty < t < \infty$:

$$\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon}(t) + \varepsilon(0^+)h(t) \quad (1.34)$$

Из (1.34) согласно свойству (1.17) следует

$$d\varepsilon(t) = \frac{d\tilde{\varepsilon}(t)}{dt}dt + \varepsilon(0^+)\delta(t)dt \quad (1.35)$$

Функции $R(t)$ и $\Pi(t)$, введенные в (1.31), (1.32), не являются основными, а отличаются от них на положительные постоянные $R(0^-)$ и $\Pi(0^-)$ соответственно. Благодаря этому они непрерывны на всей временной оси $-\infty < t < \infty$ (фиг. 5, 6). Однако дифференцируемыми при $t = 0$ такие функции не являются, и для них справедливо равенство (1.35).

Продифференцируем по t равенство (1.32):

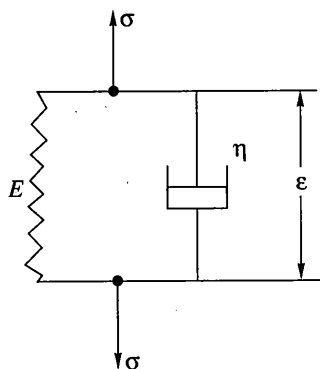
$$d\varepsilon(t) = dt \int_0^t \frac{\partial \Pi}{\partial t}(t - \tau) d\sigma(\tau) + \Pi(0^-)d\sigma(t) \quad (1.36)$$

и подставим (1.36) в (1.31). Меняя порядок интегрирования по заштрихованному треугольнику на фиг. 4, получим

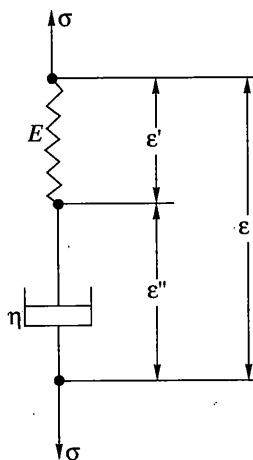
$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \iint_{00}^{t\tau} R(t - \tau) \frac{\partial \Pi}{\partial \tau}(\tau - \tau_1) d\sigma(\tau_1) d\tau + \Pi(0^-) \int_0^t R(t - \tau_1) d\sigma(\tau_1) = \\ &= \iint_{0\tau_1}^{t\tau} R(t - \tau) \frac{\partial \Pi}{\partial \tau}(\tau - \tau_1) d\tau d\sigma(\tau_1) + \Pi(0^-) \int_0^t R(t - \tau_1) d\sigma(\tau_1) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Сравнивая (1.37) с выражением

$$\int_0^t d\sigma(\tau) = \sigma(t) \quad (1.38)$$



Фиг. 7



Фиг. 8

получим при $\tau_1 = 0$:

$$\int_0^t R(t-\tau)\Pi^{(1)}(\tau)d\tau + \Pi(0^-)R(t) = 1 \quad (1.39)$$

В силу непрерывности $\Pi(0^-) = \Pi(0^+)$, поэтому из сравнения (1.39) и (1.35) следует, что

$$\int_0^t R(t-\tau)d\Pi(\tau) = \int_0^t \Pi(t-\tau)dR(\tau) = 1 \quad (1.40)$$

Различные аспекты задачи обращения определяющих соотношений, содержащих интегральные операторы, затронуты в работах последних лет [48–51].

Установим теперь связь между формами записи определяющих соотношений (1.23), (1.24) с одной стороны и (1.31), (1.32) с другой. Для этого, очевидно, исходя из (1.29), надо положить

$$\tilde{\Gamma}(t) = -R^{(1)}(t), \quad \tilde{K}(t) = \Pi^{(1)}(t) \quad (1.41)$$

$$\Pi(0^-) = \Pi(0^+) = \Pi(0) = K_0 = 1/\Gamma_0 \quad (1.42)$$

$$R(0^-) = R(0^+) = R(0) = \Gamma_0 = 1/K_0$$

В самом деле, дифференцируя тогда по t тождество (1.40) и используя обозначения (1.41), получим тождества (1.30).

Простейшие модели деформируемого тела могут включать в себя не только упругие пружинки и вязкие поршеньки, но и более сложные составляющие, например, пластический элемент [52] или поршневой элемент такой, что движение в нем начинается лишь при достижении некоторой критической деформации [53]. Набор таких элементов в сочетании с пружинами образует достаточно сложную стохастическую модель.

2. Многозвенные модели. Рассмотрим теперь двузвенные модели или модели, составленные из двух элементов: пружинки и поршенька. Очевидно, существует всего два принципиально разных соединения этих элементов, изображенные на фиг. 7 и 8.

Модель, основанная на параллельном соединении пружинки и поршенька (фиг. 7), называется моделью Фойгта, а модель, основанная на их последовательном соединении (фиг. 8), называется моделью Максвелла.

Рассмотрим сначала модель Фойгта. Из фиг. 7 нетрудно видеть, что для деформации ε можно записать так называемые кинематические структурные соотношения

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon \quad (2.1)$$

Кроме этого следует записать еще и статические структурные соотношения. Общая сила, растягивающая двузвенную модель на фиг. 7, складывается из силы растяжения пружинки (фиг. 1) и силы растяжения поршенька (фиг. 2):

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' \quad (2.2)$$

Подставим в статическое структурное соотношение (2.2) определяющие соотношения (1.1) и (1.2) и используем (2.1), получим

$$\sigma = E\varepsilon' + \eta d\varepsilon'' = (E + \eta d)\varepsilon \quad (2.3)$$

или

$$\sigma = E\varepsilon + \eta d\varepsilon/dt \quad (2.4)$$

Соотношения (2.3) и (2.4) можно записать в интегральном виде, воспользовавшись формами записи (1.23) и (1.31), причем

$$\Gamma(t) = E\delta(t) + \eta\delta^{(1)}(t), \quad R(t) = E + \eta\delta(t) \quad (2.5)$$

Чтобы обратить соотношение (2.3):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E + \eta d} \quad (2.6)$$

исследуем подробнее оператор $(a + bd)^{-1}$. Пусть имеются две основные функции $x(t)$ и $y(t)$, связанные этим оператором

$$y = (a + bd)^{-1}x \quad (2.7)$$

Помножим левую и правую части соотношения (2.7) на оператор $(a + bd)$:

$$(a + bd)y = x \quad (2.8)$$

или

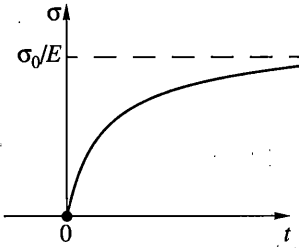
$$bdy/dt + ay = x(t) \quad (2.9)$$

Дифференциальное уравнение (2.9) легко решается хотя бы методом вариации постоянных

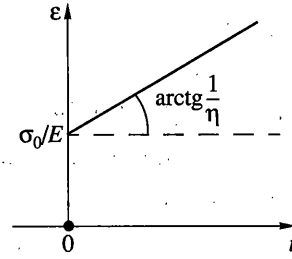
$$y = \frac{1}{b} \int_0^t e^{-a(t-\tau)/b} x(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

Сравнивая (2.9) и (2.4), получим согласно (2.10):

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} \int_0^t e^{-E(t-\tau)/\eta} \sigma(\tau) d\tau \quad (2.11)$$



Фиг. 9



Фиг. 10

Соотношение (2.11) можно записать в видах (1.24) и (1.32). При этом

$$K(t) = \frac{1}{\eta} e^{-Et/\eta}, \quad \Pi(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-Et/\eta}) \quad (2.12)$$

Если к образцу при $t = 0$ мгновенно приложить некоторую силу и затем поддерживать ее постоянной, т.е.

$$\sigma = \sigma_0 h(t) \quad (2.13)$$

то, как следует из соотношения (1.32), деформация будет изменяться по закону

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \Pi(t) \quad (2.14)$$

Явление возрастания деформации со временем при постоянной нагрузке называется ползучестью материала. В рассматриваемой модели Фойгта ползучесть описывается формулами (2.12), (2.14) (фиг. 9). Поэтому функцию $\Pi(t)$ называют функцией ползучести, а соответствующую ей по формулам (1.41), (1.42) функцию $K(t)$ – ядром ползучести.

Рассмотрим теперь модель Максвелла. Из фиг. 8 видно, что кинематическое структурное соотношение для нее имеет вид

$$\epsilon = \epsilon' + \epsilon'' \quad (2.15)$$

а статическими структурными соотношениями будут

$$\sigma' = \sigma'' = \sigma \quad (2.16)$$

Подставляя в (2.15) определяющие соотношения (1.1) и (1.2) и учитывая (2.16), получим

$$\epsilon = \frac{\sigma'}{E} + \frac{\sigma''}{\eta d} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta d} \right) \sigma \quad (2.17)$$

Можно расшифровать оператор d^{-1} и переписать соотношение (2.17) в виде

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

Из сравнения (2.18) и (1.24), (1.32) видно, что для модели Максвелла

$$K(t) = \frac{\delta(t)}{E} + \frac{h(t)}{\eta}, \quad \Pi(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \quad (2.19)$$

Из (2.19) следует, что напряжению, подчиняющемуся закону (2.13), соответствует возрастающая со временем деформация (фиг. 10). Следовательно, модель Максвелла описывает ползучесть.

Обратим теперь соотношения (2.17)

$$\sigma = \frac{E\eta d}{E + \eta d} \varepsilon = E\varepsilon - \frac{E^2}{E + \eta d} \varepsilon \quad (2.20)$$

С одной стороны, соотношение (2.20) можно записать в дифференциальной форме

$$E\sigma + \eta \frac{d\sigma}{dt} = E\eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.21)$$

а с другой, воспользовавшись формулами (2.9) и (2.10), в интегральном виде

$$\sigma = E\varepsilon - \frac{E^2}{\eta} \int_0^t e^{-E(t-\tau)/\eta} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (2.22)$$

Определяющее соотношение (2.22) можно представить в виде (1.23), (1.31), причем

$$\Gamma(t) = E\delta(t) - \frac{E^2}{\eta} e^{-Et/\eta}, \quad R(t) = Ee^{-Et/\eta} \quad (2.23)$$

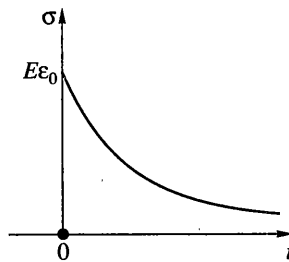
Если приложить теперь к образцу в момент $t = 0$ некоторую деформацию и поддерживать ее постоянной, т.е.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 h(t) \quad (2.24)$$

то соотношение (1.31) означает, что напряжение будет изменяться

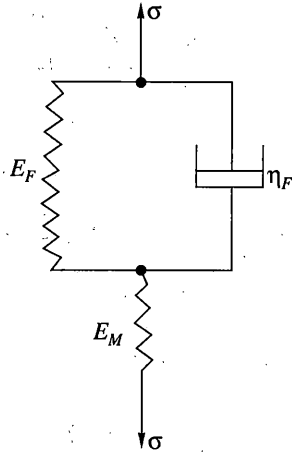
$$\sigma = \varepsilon_0 R(t) \quad (2.25)$$

С учетом (2.23) делаем вывод о том, что для модели Максвелла напряжение будет экспоненциально убывать (фиг. 11). Явление убывания напряжения при постоянной деформации называется релаксацией, а функции $\Gamma(t)$ и $R(t)$ – ядром релаксации и функцией релаксации. Из вышесказанного следует, что модель Максвелла релаксацию описывает.

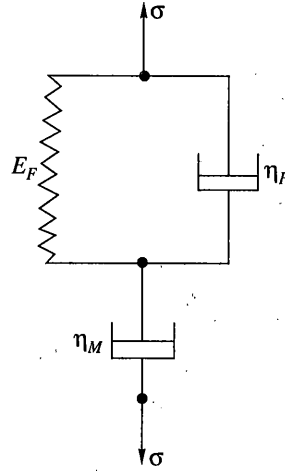


Фиг. 11

Некоторое обобщение моделей Фойгта и Максвелла предложено в [54]. Монотонности и экспоненциальному убыванию функций релаксации в линейных моделях посвящены работы [55, 56]. В [57] строится новый допустимый класс функций ползучести и релаксации. Кроме изложенных выше положительных и монотонно убывающих функций релаксации он включает нетрадиционные функции (локально немотонные и даже неположительные). Они оказываются более эффективными в феноменологическом моделировании материалов со сложной структурой, например, в исследовании



Фиг. 12



Фиг. 13

отрицательности коэффициента Пуассона в композитах. Примеры вязкоупругих моделей с отрицательными коэффициентами вязкости приведены в [58].

Нетрудно построить теперь различные трехзвенные модели. Они получаются последовательным присоединением к модели Фойгта пружинки (фиг. 12) или поршенька (фиг. 13), а также параллельным присоединением к модели Максвелла пружинки (фиг. 14) или поршенька (фиг. 15).

Однако далее рассмотрим четырехзвенную модель, (фиг. 16), которая носит название стандартного тела. Она представляет собой последовательное соединение модели Фойгта и модели Максвелла. Поэтому кинематическое структурное соотношение имеет для нее вид

$$\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_F \tag{2.26}$$

где ε_M – деформация модели Максвелла, связанная с напряжением σ_M по закону (2.17), а ε_F – деформация модели Фойгта, связанная с напряжением σ_F по закону (2.6). Из фиг. 16 видно, что статическими структурными соотношениями являются

$$\sigma_M = \sigma_F = \sigma \tag{2.27}$$

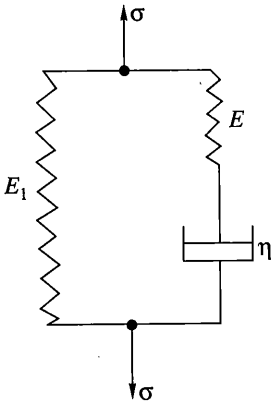
Подставляя в (2.26) определяющие соотношения (2.17) и (2.6) и учитывая (2.27), получим

$$\varepsilon = \left(\frac{E_M + \eta_M d}{E_M \eta_M d} + \frac{1}{E_F + \eta_F d} \right) \sigma \tag{2.28}$$

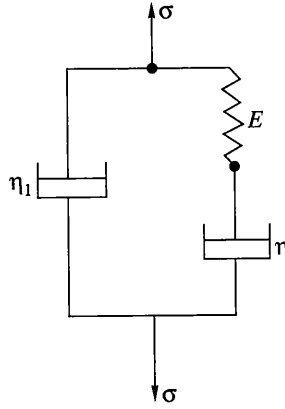
$$\sigma = E_M \frac{d(\omega_F + d)}{d^2 + d(\omega_M + \omega_F + \omega) + \omega_M \omega_F} \varepsilon \tag{2.29}$$

$$\omega_M = \frac{1}{\tau_M} = \frac{E_M}{\eta_M}, \quad \omega_F = \frac{1}{\tau_F} = \frac{E_F}{\eta_F}, \quad \omega = \frac{1}{\tau} = \frac{E_M}{\eta_F} \tag{2.30}$$

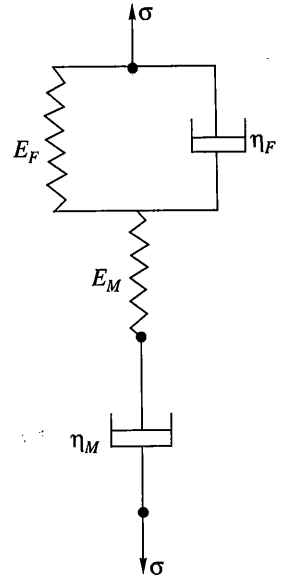
где ω_M , ω_F и ω – частоты релаксации. Величины τ_M , τ_F и τ , имеющие размерность времени, называются временами релаксаций.



Фиг. 14



Фиг. 15



Фиг. 16

Обозначим корни квадратного уравнения

$$x^2 + (\omega_M + \omega_F + \omega)x + \omega_M\omega_F = 0 \quad (2.31)$$

через \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 :

$$\tilde{x}_1 = -\frac{\omega_M + \omega_F + \omega}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\omega_M\omega_F}{(\omega_M + \omega_F + \omega)^2}} \right] \quad (2.32)$$

$$\tilde{x}_2 = -\frac{\omega_M + \omega_F + \omega}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\omega_M\omega_F}{(\omega_M + \omega_F + \omega)^2}} \right]$$

Положим также

$$x_1 = -\tilde{x}_1, \quad x_2 = -\tilde{x}_2, \quad A = \frac{\omega_M\omega_F - (\omega + \omega_M)x_1}{x_2 - x_1}, \quad B = \frac{\omega_M\omega_F - (\omega + \omega_M)x_2}{x_2 - x_1} \quad (2.33)$$

причем

$$A/x_1 + B/x_2 = 1 \quad (2.34)$$

Тогда из (2.28), (2.29) имеем

$$\varepsilon = \frac{1}{E_M} \left(1 + \frac{\omega_M}{d} + \frac{\omega}{d + \omega_F} \right) \sigma \quad (2.35)$$

$$\sigma = E_M \left(1 - \frac{A}{d + x_1} - \frac{B}{d + x_2} \right) \varepsilon \quad (2.36)$$

Из (2.35), (2.36) видно, что и в этом случае определяющие соотношения можно записать в виде (1.23), (1.24) или (1.31), (1.32), причем

$$K(t) = \frac{1}{E_M} [\delta(t) + \omega_M h(t) + \omega e^{-\omega_F t}], \quad \Pi(t) = \frac{1}{E_M} \left[1 + \omega_M t + \frac{\omega}{\omega_F} (1 - e^{-\omega_F t}) \right] \quad (2.37)$$

$$\Gamma(t) = E_M [\delta(t) - A e^{-x_1 t} - B e^{-x_2 t}], \quad R(t) = E_M \left[\frac{A}{x_1} e^{-x_1 t} + \frac{B}{x_2} e^{-x_2 t} \right] \quad (2.38)$$

Метод построения интегральных ядер, описывающих поведение стандартного тела и основанный на импульсных переходных функциях, исследован в [59].

Трехзвенная модель, изображенная на фиг. 12 (модель Кельвина), получается из модели стандартного тела при предельном переходе $\eta_M \rightarrow \infty$ или $\omega_M \rightarrow 0$. Из (2.32) и (2.33) следует, что $x_1 \rightarrow \omega_F + \omega$, $x_2 \rightarrow 0$, $A \rightarrow \omega$, $B \rightarrow 0$ и

$$\lim_{\omega_M \rightarrow 0, x_2} \frac{B}{\omega_M} = \frac{\omega_F}{\omega_F + \omega}$$

Таким образом, из (2.37) и (2.38) для модели Кельвина имеем

$$K(t) = \frac{1}{E_M} [\delta(t) + \omega e^{-\omega_F t}], \quad \Pi(t) = \frac{1}{E_M} \left[1 + \frac{\omega}{\omega_F} (1 - e^{-\omega_F t}) \right] \quad (2.39)$$

$$\Gamma(t) = E_M [\delta(t) - \omega e^{-(\omega_F + \omega)t}], \quad R(t) = \frac{E_M}{\omega_F + \omega} [\omega_F + \omega e^{-(\omega_F + \omega)t}] \quad (2.40)$$

Из модели стандартного тела при $E_M \rightarrow \infty$ ($\tau \rightarrow 0$, $\tau_M \rightarrow 0$) должна получаться модель, изображенная на фиг. 13. Выполнив данный предельный переход, получим ее дифференциальные соотношения

$$\sigma = \frac{\eta_M \eta_F}{\eta_M + \eta_F} \left[d + \frac{E_F \eta_M}{\eta_F (\eta_M + \eta_F)} - \frac{E_F^2 \eta_M}{\eta_F (\eta_F + \eta_M)^2 d + E_F / (\eta_M + \eta_F)} \right] \varepsilon \quad (2.41)$$

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{1}{\eta_M d} + \frac{1}{E_F + \eta_F d} \right) \sigma \quad (2.42)$$

Следовательно

$$K(t) = \frac{h(t)}{\eta_M} + \frac{1}{\eta_F} e^{-\omega_F t}, \quad \Pi(t) = \frac{t}{\eta_M} + \frac{1}{E_F} (1 - e^{-\omega_F t}) \quad (2.43)$$

$$\Gamma(t) = \frac{\eta_M \eta_F}{\eta_M + \eta_F} \delta'(t) + \frac{E_F \eta_M^2}{(\eta_M + \eta_F)^2} \delta(t) - \frac{E_F^2 \eta_M^2}{(\eta_M + \eta_F)^3} e^{-E_F t / (\eta_M + \eta_F)} \quad (2.44)$$

$$R(t) = \frac{\eta_M \eta_F}{\eta_M + \eta_F} \delta(t) - \frac{E_F \eta_M^2}{(\eta_M + \eta_F)^2} (h(t) - e^{-E_F t / (\eta_M + \eta_F)})$$

Заметим, что условия (1.29) для данной модели не выполняются (в выражение для $\Gamma(t)$ входит производная от дельта-функции по времени), поэтому свойства (1.42) не имеют места.

Трехзвенные модели, приведенные на фиг. 14 и 15, формально не получаются из стандартного тела устремлением каких-либо модулей упругости и коэффициентов

вязкости к нулю или к бесконечности. Поэтому выпишем для них все характерные функции. Для модели на фиг. 14 имеют место дифференциальные соотношения

$$\sigma = \left(E_1 + \frac{E\eta d}{E + \eta d} \right) \varepsilon = \left(E_1 + E - \frac{E^2}{\eta} \frac{1}{d + E/\eta} \right) \varepsilon \quad (2.45)$$

$$\varepsilon = \frac{E + \eta d}{E_1 E + (E_1 + E)\eta d} \sigma = \left(\frac{1}{E_1 + E} + \frac{E^2}{(E_1 + E)^2 \eta d + E_1 E / [(E_1 + E)\eta]} \right) \sigma \quad (2.46)$$

Они приводят к следующим ядрам и функциям ползучести и релаксации

$$K(t) = \frac{\delta(t)}{E_1 + E} + \left(\frac{E}{E_1 + E} \right)^2 \frac{1}{\eta} \exp\left(-\frac{E_1 E t}{(E_1 + E)\eta} \right) \quad (2.47)$$

$$\Pi(t) = \frac{E}{E_1(E_1 + E)} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_1 E t}{(E_1 + E)\eta} \right) \right] \quad (2.48)$$

$$\Gamma(t) = (E_1 + E)\delta(t) - \frac{E^2}{\eta} e^{-Et/\eta}, \quad R(t) = E_1 + E e^{-Et/\eta}$$

При $E_1 \rightarrow 0$ данное тело стремится к модели Максвелла с константами E и η , а при $E \rightarrow \infty$ — к модели Фойгта с константами E_1 и η .

Аналогично для модели, приведенной на фиг. 15, имеем дифференциальные определяющие соотношения

$$\sigma = \left(\eta_1 d + \frac{E\eta d}{E + \eta d} \right) \varepsilon = \left(\eta_1 d + E - \frac{E^2}{\eta} \frac{1}{d + E/\eta} \right) \varepsilon \quad (2.49)$$

$$\varepsilon = \left[\frac{1}{(\eta_1 + \eta)d} + \frac{\eta}{(\eta_1 + \eta)\eta_1 d + E(\eta_1 + \eta)/(\eta_1 \eta)} \right] \sigma \quad (2.50)$$

и соответствующие им ядра и функции ползучести и релаксации

$$K(t) = \frac{h(t)}{\eta_1 + \eta} + \frac{\eta}{(\eta_1 + \eta)\eta_1} \exp\left[-\frac{E(\eta_1 + \eta)t}{\eta_1 \eta} \right] \quad (2.51)$$

$$\Pi(t) = \frac{t}{\eta_1 + \eta} + \left(\frac{\eta}{\eta_1 + \eta} \right)^2 \frac{1}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E(\eta_1 + \eta)t}{\eta_1 \eta} \right) \right]$$

$$\Gamma(t) = \eta_1 \delta^{(1)}(t) + E\delta(t) - \frac{E^2}{\eta} e^{-Et/\eta}, \quad R(t) = \eta_1 \delta(t) + E(1 - e^{-Et/\eta}) \quad (2.52)$$

Если $\eta_1 \rightarrow 0$, то данное тело стремится к модели Максвелла с константами E и η , а если $\eta \rightarrow \infty$, то к модели Фойгта с константами E и η_1 .

Принципиально нетрудно рассмотреть и модели, состоящие из пяти, шести и т.д. пружинок либо поршеньков (соответствующую терминологию можно найти в [52, 60]).

3. Обобщенная модель. Предположим теперь, что составлена некоторая модель из M пружинок и N поршеньков. Будем считать, что эта модель связанная (никакой отдельный элемент не болтается). Обозначим, как и ранее, деформации и напряжения

пружинок через ε_i' и σ_i' ($i = 1, \dots, M$), а деформации и напряжения поршеньков через ε_j'' и σ_j'' ($j = 1, \dots, N$). Пусть имеется L кинематических

$$\sum_{i=1}^M A_{ki}' \varepsilon_i' + \sum_{j=1}^N A_{kj}'' \varepsilon_j'' = A_k \varepsilon \quad (k = 1, \dots, L) \quad (3.1)$$

и S статических

$$\sum_{i=1}^M B_{ki}' \sigma_i' + \sum_{j=1}^N B_{kj}'' \sigma_j'' = B_k \sigma \quad (k = 1, \dots, S) \quad (3.2)$$

структурных соотношений.

Определяющие соотношения оставим прежними, т.е. в виде (1.1), (1.2), их будет $N + M$. Таким образом, для $2(M + N) + 2$ величин ε_i' , σ_i' , ε_j'' , σ_j'' , ε , σ имеется всего $M + N + L + S$ определяющих и структурных соотношений. В силу предположенной связанности системы должно существовать единственное соотношение между общей деформацией ε и общим напряжением σ , т.е. необходимо, чтобы

$$M + N + L + S = 2(M + N) + 1 \quad (3.3)$$

или

$$L + S = M + N + 1 \quad (3.4)$$

Подставляя определяющие соотношения (1.1) и (1.2) в (3.1) и умножая их на оператор d , получим

$$\sum_{i=1}^M A_{ki}' \frac{d\sigma_i'}{E_i} + \sum_{j=1}^N A_{kj}'' \frac{\sigma_j''}{\eta_j} = A_k d\varepsilon \quad (3.5)$$

Соотношения (3.2), (3.5) можно рассматривать как систему $L + S$ линейных алгебраических уравнений относительно $L + S$ (в силу равенства (3.3)) неизвестных σ_i' , σ_j'' , σ . Эта система по физическому смыслу должна быть совместной, т.е. ранг матрицы системы, схематически изображенной на фиг. 17, равен рангу расширенной (заштрихованной) матрицы.

Заштрихованная часть матрицы содержит в качестве множителя оператор d . Определитель $(M + N + 1)$ -го порядка этой системы является дифференциальным оператором \check{P} :

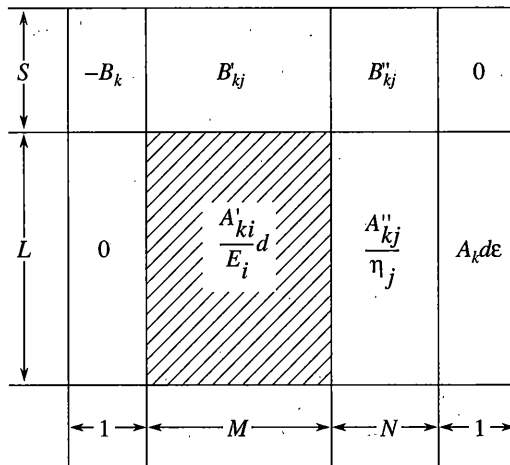
$$\check{P} = \sum_{i=0}^m a_i d^i \quad (3.6)$$

Из фиг. 17 видно, что $m = \min\{L, M\}$. Решение алгебраической системы (3.2), (3.5) удобно представить в виде

$$\sigma = \check{Q}\varepsilon/\check{P} \quad \text{или} \quad \check{P}\sigma = \check{Q}\varepsilon \quad (3.7)$$

$$\check{Q} = \sum_{j=0}^n b_j d^j \quad (3.8)$$

где \check{Q} – дифференциальный оператор, причем $n = \min\{L, M + 1\}$.



Фиг. 17

Таким образом, порядок оператора \check{Q} равен или на единицу больше порядка оператора \check{P} , как бы ни была составлена модель из пружинок и поршеньков. Если число кинематических соотношений L меньше или равно числу пружинок M , то порядки дифференциальных операторов равны. Если $M + 1 < L$, то $m = M$, а $n = M + 1$, т.е. порядок дифференциального оператора \check{Q} на единицу выше чем порядок \check{P} .

Как видно, любая модель, составленная из пружинок и поршеньков, приводит к выражению (3.7). Однако, вообще говоря, различные модели могут приводить к одним и тем же соотношениям (3.7), в которых операторы \check{P} и \check{Q} определяются выражениями (3.6) и (3.8). Предположим теперь, что задано операторное соотношение (3.7); причем числа a_i и b_j , определяющие операторы (3.6) и (3.8), не обязательно находятся из решения алгебраической системы (3.2), (3.5). Тогда и в этом случае операторное определяющее соотношение (3.7) представимо в интегральном виде (1.23), (1.24) или (1.31), (1.32).

Действительно, рассмотрим рациональную функцию $L(\lambda)$:

$$L(\lambda) = Q(\lambda)/P(\lambda) \tag{3.9}$$

Предположим, что все корни полинома $P(\lambda)$ действительны, отрицательны и имеют кратность единица. Обозначим их абсолютные значения через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Разлагая функцию $L(\lambda)$ на элементарные дроби, получим для оператора (3.7):

$$L(d) = \frac{Q(d)}{P(d)} = c_1 d + c_0 + \frac{c_{-1}}{d + \lambda_1} + \dots + \frac{c_{-m}}{d + \lambda_m} \tag{3.10}$$

Поэтому операторное соотношение (3.7) эквивалентно интегральным равенствам (1.23) и (1.31), причем

$$\Gamma(t) = c_{-1} \delta^{(1)}(t) + c_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^m c_i e^{-\lambda_i t} \tag{3.11}$$

$$R(t) = c_{-1} \delta(t) + c_0 + \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{\lambda_i} (1 - e^{-\lambda_i t}) \tag{3.12}$$

Из (3.11), (3.12) видно, что среди корней λ_i не может быть комплексных, ибо ядра ползучести необходимо должны быть монотонными функциями.

Соотношения (3.7) можно разрешить относительно деформаций

$$\varepsilon = \check{P}\sigma/\check{Q} \quad (3.13)$$

Тогда обозначим абсолютные значения действительных корней полинома $Q(\mu)$ через $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Может оказаться, что один из корней все-таки равен нулю, как это было, например, в модели (2.41). Положим, что нулевой корень μ_1 . Тогда получим

$$L^{-1}(d) = \frac{P(d)}{Q(d)} = e_0 + \frac{e_1}{d} + \frac{e_2}{d + \mu_2} + \dots + \frac{e_n}{d + \mu_n} \quad (3.14)$$

Следовательно, дифференциальный оператор (3.13) представим в виде (1.24) или (1.32), причем

$$K(t) = e_0\delta(t) + e_1h(t) + \sum_{j=1}^n e_j e^{-\mu_j t} \quad (3.15)$$

$$\Pi(t) = e_0 + e_1 t + \sum_{j=1}^n \frac{e_j}{\mu_j} (1 - e^{-\mu_j t}) \quad (3.16)$$

Если дифференциальные операторы P и Q имеют один и тот же порядок ($m = n$), то в (3.10)–(3.12), (3.14)–(3.16) будут выполнены условия

$$c_{-1} = 0, \quad e_0 \equiv \Gamma_0 = 1/K_0 \equiv 1/c_0 \quad (3.17)$$

и справедливы соотношения (1.41), (1.42).

Сделаем теперь некоторые обобщения. Дифференциальная модель (3.7), (3.13) эквивалентна интегральной (1.23), (1.24) или (1.31), (1.32) только в том случае, если ядра и функции релаксации и ползучести имеют вид (3.11), (3.12) или (3.15), (3.16), т.е. представляются в виде суммы экспонент. Однако первоначально можно задать модель вязкоупругого тела с определяющими соотношениями (1.23), (1.24) или (1.31), (1.32). При этом ядра указанных интегральных операторов определимы экспериментально.

Рассмотрим, например, соотношения (1.31), (1.32) и проведем эксперименты на ползучесть, положив, что напряжение имеет вид (2.13). Тогда, измеряя деформацию со временем, получим из формулы (2.14) функцию ползучести $\Pi(t)$ (фиг. 6):

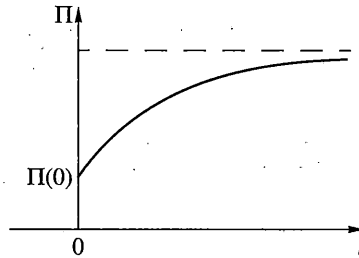
$$\Pi(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0 \quad (3.18)$$

Зная функцию ползучести, можно найти функцию релаксации $R(t)$ из решения уравнения (1.40). Из (1.39) видно, что это уравнение является интегральным уравнением Вольтерры второго рода, поэтому оно всегда однозначно разрешимо. Однако для нахождения функции релаксации $R(t)$ также используем эксперимент. Зададим в образце деформацию в виде (2.24) и, измеряя напряжение со временем, найдем из формулы (2.25) функцию релаксации (фиг. 5)

$$R(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0 \quad (3.19)$$

Отметим некоторые особенности графика функции ползучести (фиг. 6). Его можно условно разбить на три этапа. Первый из них ($0 \leq t \leq t_1$) называется начальной ползучестью. На этом этапе функция ползучести выпукла вверх. Второй этап ($t_1 \leq t \leq t_2$) носит название установившейся ползучести, на нем функция $\Pi(t)$ мало отличается от

прямой линии. Третий этап ($t_2 \leq t < \infty$) характеризуется выпуклостью функции ползучести вниз и называется неограниченной ползучестью. Эти этапы условны и могут для различных материалов отсутствовать или быть заменены на другие. Так, например, функция ползучести, показанная на фиг. 18, имеет всего один этап (начальной ползучести). Про такую модель говорят, что она имеет ограниченную ползучесть ($\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi(t) = \Pi_\infty$ при $t \rightarrow \infty$).



Фиг. 18

Функция релаксации (фиг. 5) может иметь предел R_∞ при $t \rightarrow \infty$ больший либо равный нулю. Из формулы (2.23) и фиг. 11 следует, что для модели Максвелла $R_\infty = 0$, т.е. модель Максвелла релаксирует до нуля.

Для сокращения в дальнейшем будем использовать операторную форму записи определяющих соотношений. Так, будем записывать соотношения (1.31) в виде

$$\sigma = \check{R}\epsilon \quad (3.20)$$

а соотношения (1.32) в виде

$$\epsilon = \check{\Pi}\sigma \quad (3.21)$$

Тогда (1.40) эквивалентно условиям

$$\check{R}\check{\Pi} = \check{\Pi}\check{R} = 1 \quad (3.22)$$

Таким образом, с операторами \check{R} и $\check{\Pi}$ можно обращаться формально как с числами:

$$\check{R} = 1/\check{\Pi}, \quad \check{\Pi} = 1/\check{R} \quad (3.23)$$

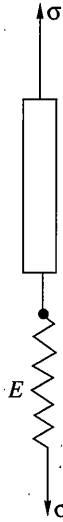
Допускают экспериментальные решения и более сложные интегральные уравнения второго рода. Пусть, например, необходимо решить операторные уравнения

$$y(t) = \frac{1}{A + \check{R}}x(t) \quad (3.24)$$

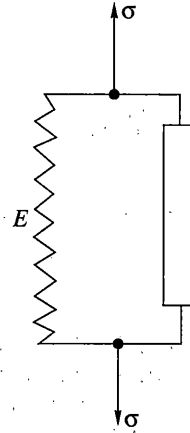
$$y(t) = \frac{1}{B + \check{\Pi}}x(t) \quad (3.25)$$

где A, B – некоторые размерные постоянные. Решение, по существу, сводится к нахождению ядер операторов

$$\check{R}_A \equiv \frac{1}{A + \check{R}}, \quad \check{\Pi}_B \equiv \frac{1}{B + \check{\Pi}} \quad (3.26)$$



Фиг. 19



Фиг. 20

Зная эти ядра, из (3.24), (3.25) получим

$$y(t) = \int_0^t R_A(t-\tau) dx(\tau), \quad y(t) = \int_0^t \Pi_B(t-\tau) dx(\tau) \quad (3.27)$$

Решить их можно обычным способом, умножив левую и правую части уравнений (3.24), (3.25) соответственно на операторы $(A + \check{R})$ и $(B + \check{\Pi})$:

$$Ay(t) + \int_0^t R(t-\tau) dy(\tau) = x(t), \quad By(t) + \int_0^t \Pi(t-\tau) dy(\tau) = x(t) \quad (3.28)$$

Однако существует и экспериментальный способ нахождения ядер $R_A(t)$ и $\Pi_B(t)$. Соединим некоторый образец с определяющими соотношениями (3.20), (3.21) последовательно (фиг. 19) и параллельно (фиг. 20) с реальным упругим стержнем, имеющим модуль Юнга E (вместо реального стержня можно взять и реальную упругую пружину с известной жесткостью). Тогда из фиг. 19 видно, что

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{E} + \check{\Pi} \right) \sigma \quad (3.29)$$

или

$$\sigma = \frac{1}{1/E + \check{\Pi}} \varepsilon \equiv \check{\Pi}_B \varepsilon \quad (3.30)$$

Задавая теперь деформацию в виде

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 h(t) \quad (3.31)$$

и измеряя в эксперименте на релаксацию конструкции напряжение $\sigma(t)$, будем иметь

$$\Pi_B(t) = \sigma(t), \quad B \equiv 1/E \quad (3.32)$$

Аналогично из фиг. 20 следует

$$\sigma = (E + \check{R})\varepsilon \quad (3.33)$$

или

$$\varepsilon = \frac{1}{E + \check{R}}\sigma \equiv \check{R}_A\sigma \quad (3.34)$$

Задавая напряжение в виде

$$\sigma = \sigma_0 h(t) \quad (3.35)$$

и измеряя в эксперименте на ползучесть конструкции, изображенной на фиг. 20, деформацию $\varepsilon(t)$, получим

$$R_A(t) = \varepsilon(t), \quad A \equiv E \quad (3.36)$$

4. Поведение вязкоупругих моделей. Отметим различие введенных моделей, обусловленное присутствием или отсутствием слагаемого, содержащего коэффициент c_{-1} в разложениях (3.11), (3.12). Совершенно очевидно, что это различие связано с поведением модели при $t \rightarrow 0$ (при мгновенном нагружении). Так как все простейшие модели были составлены только из пружинок и поршеньков, то при мгновенном нагружении модель может себя вести либо как упругое тело (фиг. 1, 8, 12, 14, 16), либо как вязкая жидкость (фиг. 2, 7, 13, 15). В первом случае $c_{-1} = 0$, а во втором $c_{-1} \neq 0$. Заметим, что авторы первых работ по вязкоупругости называли в зависимости от этого свои модели вязкоупругими либо упруговязкими. Однако и при $t \rightarrow \infty$ модель может вести себя либо как упругое тело, либо как вязкая жидкость. Рассмотрим четыре случая.

a) При $t \rightarrow 0$ тело упругое, а значит, должно выполняться одно из условий

$$0 \neq R(0) < \infty \quad \text{или} \quad \Pi(0) \neq 0 \quad (4.1)$$

b) При $t \rightarrow 0$ тело является вязкой жидкостью. Тогда

$$R(0) = \infty \quad \text{или} \quad \Pi(0) = 0 \quad (4.2)$$

c) При $t \rightarrow \infty$ тело упругое, т.е.

$$R_\infty \neq 0 \quad \text{или} \quad 0 \neq \Pi_\infty < \infty \quad (4.3)$$

d) При $t \rightarrow \infty$ тело является вязкой жидкостью. Тогда

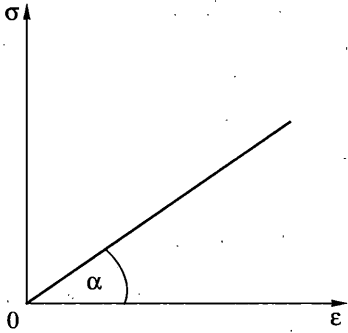
$$R_\infty = 0 \quad \text{или} \quad \Pi_\infty = \infty \quad (4.4)$$

В дальнейшем будем интересоваться преимущественно моделями, для которых при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ проявляются упругие свойства, т.е. случаи *a)* и *b)*.

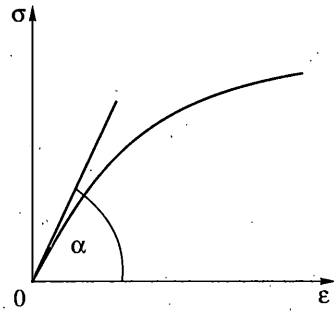
Нередко возникает сложность при определении линейности определяющих соотношений. Иногда полагают, что, если график зависимости $\sigma \sim \varepsilon$ линейный (фиг. 21), то определяющее соотношение линейно. Если же этот график выглядит, например, так, как показано на фиг. 22, то определяющее соотношение нелинейно. В действительности это не так. Рассмотрим линейные определяющие соотношения (1.31), (1.32)

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau) \equiv \check{R}\varepsilon \quad (4.5)$$

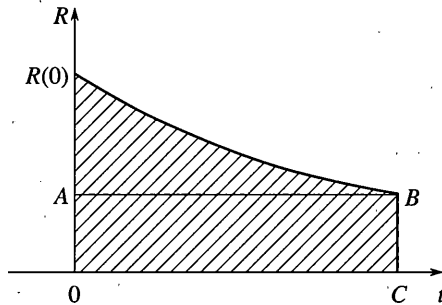
$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau) \equiv \check{\Pi}\sigma \quad (4.6)$$



Фиг. 21



Фиг. 22



Фиг. 23

Положим, что деформация изменяется линейно со временем

$$\epsilon = v_0 t, \quad v_0 = \text{const} \quad (4.7)$$

Тогда из (4.5) следует, что

$$\sigma = \Phi(t)\epsilon \quad (4.8)$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t R(\tau) d\tau \quad (4.9)$$

где $\Phi(t)$ – среднее значение функции $R(t)$ на интервале $(0; t)$. Нетрудно видеть, что функция $\Phi(t)$ монотонно убывает. Действительно,

$$\Phi^{(1)}(t) = \frac{1}{t^2} \left[R(t)t - \int_0^t R(\tau) d\tau \right], \quad (4.10)$$

но $\int_0^t R(\tau) d\tau$ ($0 \leq \tau \leq t$) – площадь криволинейной трапеции, заштрихованной на фиг. 23, а $R(t)t$ – площадь прямоугольника $OABC$. В силу монотонного убывания $R(t)$:

$$R(t)t < \int_0^t R(\tau) d\tau \quad (4.11)$$

Ясно, что $\Phi(t)$ представляет собой тангенс угла наклона касательной к кривой на фиг. 22. По правилу Лопиталья можно вычислить тангенс угла наклона этой кривой при $t = 0$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \Phi(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} \int_0^t R(\tau) d\tau \right) = \lim_{t \rightarrow 0} R(t) = R(0) \quad (4.12)$$

Следовательно, наклон кривой $\sigma \sim \varepsilon$ (фиг. 22) определяется выбором процесса деформации.

Что касается возможности использования линейных определяющих соотношений (4.5), (4.6), выбранных здесь, то она должна быть проверена экспериментально для интересующего материала. Для этого достаточно проверить справедливость принципа суперпозиции. Выбрав два произвольных процесса деформации $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$, находим экспериментально соответствующие им процессы напряжения $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$. Затем осуществим процесс деформирования

$$\varepsilon(t) = a_1 \varepsilon_1(t) + a_2 \varepsilon_2(t) \quad (4.13)$$

где a_1 и a_2 – отличные от нуля числа. Получив экспериментальную кривую для процесса напряжения $\sigma(t)$, соответствующего деформации (4.13), проверим, выполняется ли равенство

$$\sigma(t) = a_1 \sigma_1(t) + a_2 \sigma_2(t) \quad (4.14)$$

Если с заданной точностью ответ на этот вопрос положителен, то с большой долей вероятности можно утверждать, что определяющие соотношения для исследуемого тела линейны.

Иногда нелинейность определяющих соотношений следует из вида кривой ползучести. Например, если эта кривая имеет третий этап, показанный на фиг. 6, то заведомо можно утверждать, что при $t > t_2$ для данного материала нельзя пользоваться линейными определяющими соотношениями (4.5), (4.6).

Рассмотрим ступенчатый процесс напряжения (фиг. 24):

$$\sigma(t) = \sigma_0 [h(t) - h(t - t_0)] \quad (4.15)$$

Согласно соотношению (4.6) ему соответствует процесс деформации (фиг. 25):

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau) = \sigma_0 [\Pi(t) - \Pi(t - t_0)] \quad (4.16)$$

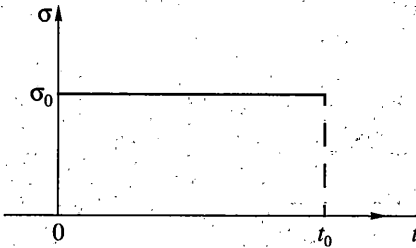
Кривая на фиг. 25 носит название кривой обратной ползучести. В эксперименте обнаруживается, что для одних материалов величина a отлична от нуля, для других равна нулю.

Для исследования этого вопроса предположим, что функция ползучести $\Pi(t)$ на бесконечности ведет себя как степенная

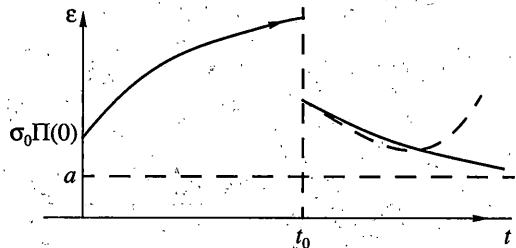
$$t \rightarrow \infty: \Pi(t) \sim t^\alpha \quad (4.17)$$

где показатель степени α – некоторая постоянная величина (достаточно рассмотреть случай, когда α – целое неотрицательное число). Обозначим далее через $\xi(t)$ разность в квадратных скобках в (4.16) при больших t :

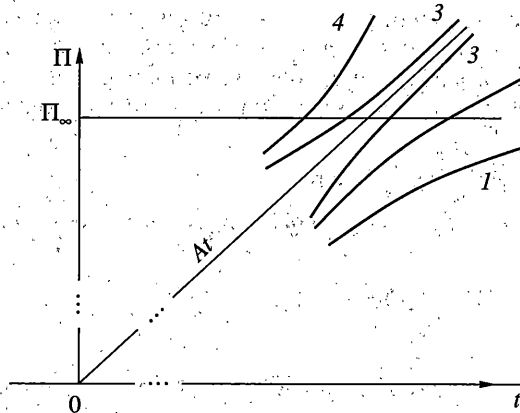
$$t \rightarrow \infty: \xi(t) \sim \Pi(t) - \Pi(t - t_0) \quad (4.18)$$



Фиг. 24



Фиг. 25



Фиг. 26

Имеем:

$$\begin{aligned} \xi &= t^\alpha - (t - t_0)^\alpha = \\ &= t^\alpha \left[\alpha \frac{t_0}{t} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \left(\frac{t_0}{t}\right)^2 + \dots + (-1)^m \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m)}{(m+1)!} \left(\frac{t_0}{t}\right)^{m+1} + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Рассмотрим четыре частных случая.

1. $\alpha = 0$. Тогда из (4.19) следует, что $\xi = 0$, поэтому величина a на фиг. 25 равна нулю.
2. $0 < \alpha < 1$. Из (4.9) следует, что $\xi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.
3. $\alpha = 1$. Тогда из (4.19) получаем, что $\xi = t_0$. Следовательно, для этого случая согласно закону (4.16):

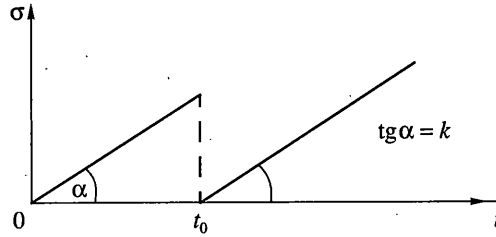
$$a = A\sigma_0 t_0 \quad (4.20)$$

где A – тангенс угла наклона асимптоты в области установившейся ползучести.

4. $\alpha > 1$. Тогда $\xi(t)$ неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$.

Условно все четыре случая изображены на фиг. 26 в виде графика асимптотического поведения функции ползучести при больших t . Все графики, лежащие ниже прямой Π_∞ , относятся к случаю 1; графики, лежащие между прямыми At и Π_∞ , относятся к случаю 2; графики, имеющие асимптоту At относятся к случаю 3; и, наконец, графики, лежащие выше прямой At , соответствуют случаю 4, т.е. области неустановившейся ползучести ($t > t_2$) на фиг. 6.

В этом последнем случае величина ξ должна неограниченно возрастать так же, как и график обратной ползучести (на фиг. 25 он показан штриховой линией). Ясно, что



Фиг. 27

физически такой случай не реализуется, поэтому неустановившаяся ползучесть не может описываться линейными определяющими соотношениями (4.5), (4.6).

Приведем пример, иллюстрирующий одну из особенностей поведения вязкоупругого материала. Эту особенность часто называют отставание по фазе. Рассмотрим процесс напряжения (фиг. 27):

$$\sigma(t) = k[t - t_0 h(t - t_0)], \quad 0 < k = \text{const} \quad (4.21)$$

Ему по формуле (4.6) соответствует процесс деформации (фиг. 28):

$$\varepsilon(t) = k \left[\int_0^t \Pi(\tau) d\tau - t_0 \Pi(t - t_0) h(t - t_0) \right] \quad (4.22)$$

Как видно из фиг. 27, в момент t_0^+ происходит догрузка, а на фиг. 28 показано, что в этот же момент деформация может убывать, т.е.

$$\left. \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right|_{t=t_0^+} < 0 \quad (4.23)$$

Из (4.22) следует, что

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = k \left[\Pi(t) - t_0 \frac{\partial \Pi}{\partial t}(t - t_0) h(t - t_0) - t_0 \Pi(t - t_0) \delta(t - t_0) \right] \quad (4.24)$$

Из (4.24) имеем

$$\left. \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right|_{t=t_0^+} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} k \left[\Pi(t_0 + \alpha) - t_0 \frac{\partial \Pi}{\partial t}(\alpha) \right] = k \left[\Pi(t_0^+) - t_0 \frac{\partial \Pi}{\partial t}(0^+) \right] \quad (4.25)$$

Очевидно, неравенство (4.23) эквивалентно неравенству

$$\Pi(t_0^+) < t_0 \left. \frac{d\Pi(t)}{dt} \right|_{t=0^+} \quad (4.26)$$

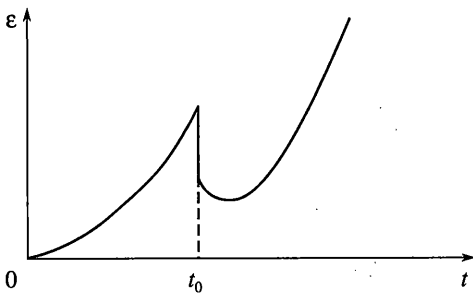
следующему из (4.25).

Отметим еще одно свойство поведения вязкоупругих материалов, подчиняющихся соотношениям (4.5), (4.6). Пусть деформация образца происходит так, что, начиная с некоторого момента времени $t = t_1$, она постоянна (фиг. 29), а соответствующее напряжение в этот же момент t_1 равно нулю (фиг. 30). Итак

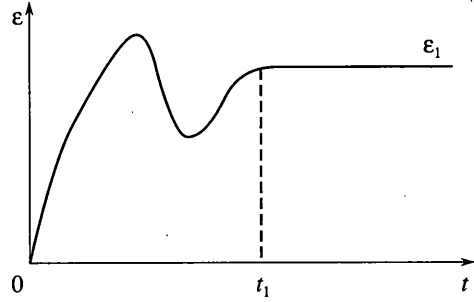
$$\sigma(t_1) = 0, \quad t > t_1: \quad \varepsilon(t) \equiv \varepsilon_1 = \text{const} \quad (4.27)$$

Тогда возможен случай, при котором

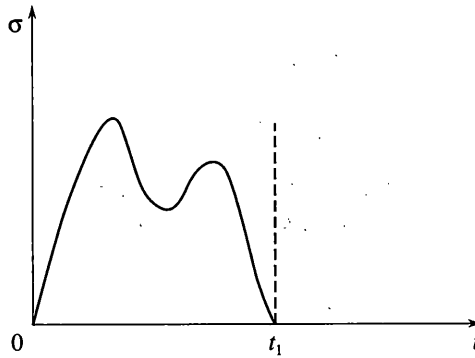
$$t > t_1: \quad \sigma(t) > 0. \quad (4.28)$$



Фиг. 28



Фиг. 29



Фиг. 30

Как показано в [61], единственным исключением является материал Максвелла с определяющими соотношениями (2.22), для которого при $t > t_1$ всегда $\sigma(t) \equiv 0$.

Действительно, всякую функцию $f_i(\tau)$ (например, функцию релаксации $R(t - \tau)$) непрерывную на $0 \leq \tau \leq t_1 \leq t < \infty$ и интегрируемую на отрезке $0 \leq \tau \leq t_1$ можно однозначно представить в виде

$$f_i(\tau) = \varphi(t_1, t)R(t_1 - \tau) + \Psi_{(t_1, t)}(\tau) \quad (4.29)$$

где $\varphi: (t_1, t) \rightarrow \mathbf{R}$, а функция $\Psi_{(t_1, t)}(\tau)$ ортогональна $R(t_1 - \tau)$:

$$\int_0^{t_1} R(t_1 - \tau)\Psi_{(t_1, t)}(\tau)d\tau = 0 \quad (4.30)$$

Отсюда следует, что

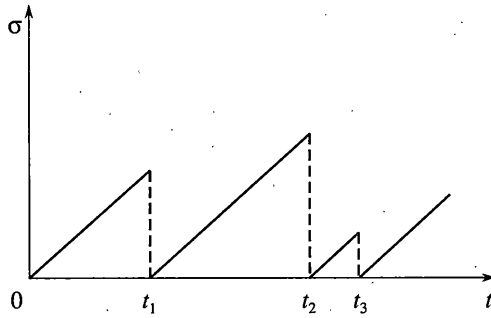
$$\varphi(t_1, t) = \left[\int_0^{t_1} R(t - \tau)R(t_1 - \tau)d\tau \right] / \int_0^{t_1} [R(t_1 - \tau)]^2 d\tau \quad (4.31)$$

Если положить в (4.29) $\Psi_{(t_1, t)}(\tau) \equiv 0$, то

$$R(t - \tau) = \varphi(t_1, t)R(t_1 - \tau) \quad (4.32)$$

или при $\tau = t_1$:

$$\varphi(t_1, t) = R(t - t_1)/R(0) \quad (4.33)$$



Фиг. 31

Решение функционального уравнения (4.32) после подстановки в него (4.33) следующее

$$R(t) = Ce^{\alpha t}, \quad \alpha = \text{const}, \quad C = \text{const} \quad (4.34)$$

Это значит, что $\Psi_{(t_1, t)}(\tau) \equiv 0$ только для модели Максвелла.

В противном случае построим процесс деформации

$$\varepsilon_*(t) = \begin{cases} \int_0^t \Psi_{(t_1, t)}(\tau) d\tau & \text{для } t \leq t_1 \\ 0 & \\ t_1 & \\ \int_0^{t_1} \Psi_{(t_1, t)}(\tau) d\tau = \varepsilon^{(0)} = \text{const} & \text{для } t \leq t_1 \end{cases} \quad (4.35)$$

Этот процесс является непрерывным и ему соответствует процесс напряжения $\sigma(t)$, вычисленный по формуле (4.5). При $t \leq t_1$:

$$\sigma_*(t) = \int_0^t R(t-\tau) \Psi_{(t_1, t)}(\tau) d\tau \quad (4.36)$$

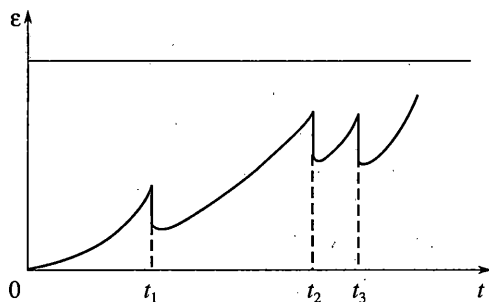
В частности, при $t = t_1$ в силу ортогональности (4.30) выполняется условие (4.27). Однако при $t > t_1$:

$$\begin{aligned} \sigma_*(t) &= \int_0^{t_1} R(t-\tau) \Psi_{(t_1, t)}(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{t_1} [\varphi(t_1, t) R(t_1-\tau) + \Psi_{(t_1, t)}(\tau)] \Psi_{(t_1, t)}(\tau) d\tau = \int_0^{t_1} [\Psi_{(t_1, t)}(\tau)]^2 d\tau > 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

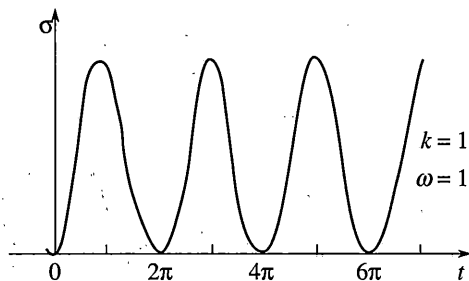
что и требовалось доказать.

5. Комплексные модули. Исследуем так называемый зубчатый процесс напряжения (фиг. 31):

$$\sigma(t) = k \left[t - \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) h(t - t_j) \right] \quad (5.1)$$



Фиг. 32



Фиг. 33

Согласно формуле (4.6) ему соответствует процесс деформации

$$\epsilon(t) = k \left[\int_0^t \Pi(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) \Pi(t - t_j) h(t - t_j) \right] \quad (5.2)$$

Рассмотрим для иллюстрации функцию ползучести в виде

$$\Pi(t) = 1 - e^{-t/2} \quad (5.3)$$

Полагая $k = 1$, для этой функции из (5.2) имеем

$$\begin{aligned} \epsilon_n(t) &= t + \frac{1}{2}(e^{-t} - 1) - \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) [1 - e^{-(t-t_j)}] / 2 = \\ &= t - t_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) e^{-(t-t_j)} + e^{-(t-t_0)} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Выберем, например, $t_j = j$, тогда

$$\epsilon_n(t) = t - \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n e^{-(t-j)} \quad (5.5)$$

Разность между деформациями $\epsilon_n(t_{n+1})$ и $\epsilon_{n+1}(t_{n+2})$ равна

$$\pi_n \equiv \epsilon_n(t_{n+1}) - \epsilon_{n+1}(t_{n+2}) = -e^{-(n+2)}/2 \quad (5.6)$$

Отсюда следует, что при $n \rightarrow \infty$ колебания устанавливаются (фиг. 32):

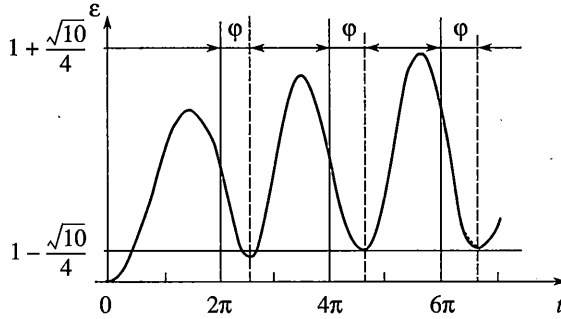
$$\pi_\infty = 0, \quad \epsilon_\infty \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n(t_{n+1}) = \frac{e}{2(e-1)} \quad (5.7)$$

В качестве другого примера рассмотрим процесс напряжения (фиг. 33):

$$\sigma(t) = k(1 - \cos \omega t) h(t) \quad (5.8)$$

Соответствующий процесс деформации при $k = 1$ имеет вид

$$\epsilon(t) = \omega \int_0^t \Pi(t - \tau) \sin \omega \tau d\tau \quad (5.9)$$



Фиг. 34

Полагая функцию ползучести, например, в виде (5.3), а частоту ω равной единице, из (5.9) получим

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left(1 - \frac{1}{2}e^{-(t-\tau)}\right) \sin \tau d\tau = \quad (5.10)$$

$$= 1 - \frac{e^{-t}}{4} - \frac{1}{4} \sin t - \frac{3}{4} \cos t = 1 - \frac{e^{-t}}{4} - \frac{\sqrt{10}}{4} \cos(t - \varphi)$$

$$\varphi = \arctg(1/3) \approx 0.322 \quad (5.11)$$

Из фиг. 34 видно, что при достаточно больших t , когда экспонента в правой части (5.10) перестает играть роль, деформация тоже представляет собой периодическую функцию, которая меняется в диапазоне от $1 - \sqrt{10}/4$ до $1 + \sqrt{10}/4$, имеет тот же период, что и напряжения, но, что важно, сдвиг по фазе (5.11).

Рассмотрим колебательный процесс деформации

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 e^{i\omega t} & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

или

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} h(t) \quad (5.13)$$

Здесь ε_0 – амплитуда, ω – частота колебаний. Используем запись (5.12) или (5.13) из-за того, что действия с экспоненциальными функциями проще чем с тригонометрическими. Подразумевается, что после проведения линейных процедур с выражениями типа (5.12), (5.13) могут быть взяты действительная либо мнимая части результата.

Согласно (1.35) из (5.13) имеем

$$d\varepsilon/dt = i\omega\varepsilon_0 e^{i\omega t} + \varepsilon_0 \delta(t) \quad (5.14)$$

Подставляя (5.14) в (4.5), получим

$$\sigma(t) = i\omega\varepsilon_0 \int_0^t R(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau + \varepsilon_0 R(t) = \varepsilon_0 R(t) + i\omega\varepsilon(t) \int_0^t R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (5.15)$$

Слагаемое $\varepsilon_0 R(t)$ в правой части (5.15) связано с начальными условиями при $t = 0$. Если мы хотим изучать установившиеся колебания, то следует в (5.15) положить $t \rightarrow \infty$, ибо при очень больших временах начальные условия не будут сказываться. Тогда вместо (5.15) следует записать

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 R_\infty + i\omega \varepsilon \int_0^\infty R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \varepsilon(t) \left[R_\infty + i\omega \int_0^\infty \tilde{R}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] \quad (5.16)$$

$$\tilde{R}(t) = R(t) - R_\infty \quad (5.17)$$

Величина, заключенная в квадратные скобки в правой части (5.16), называется комплексным модулем

$$E^*(i\omega) = R_\infty + R^s + iR^c \quad (5.18)$$

$$R^s(\omega) = \omega \int_0^\infty \tilde{R}(\tau) \sin \omega\tau d\tau \quad (5.19)$$

$$R^c(\omega) = \omega \int_0^\infty \tilde{R}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (5.20)$$

Формулами (5.19) и (5.20) задают соответственно синус-преобразование Фурье. По трансформантам Фурье, стоящим в левых частях равенств (5.19) и (5.20) восстанавливается функция-оригинал

$$\tilde{R}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{R^s(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega \quad (5.21)$$

$$\tilde{R}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{R^c(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega \quad (5.22)$$

Из (5.21) и (5.22) следует, что между трансформантами (5.19) и (5.20) имеет место зависимость

$$R^s(\omega) = \frac{2\omega^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{R^c(\xi)}{\xi(\omega^2 - \xi^2)} d\xi \quad (5.23)$$

Итак, соотношения (5.16) в силу (5.18) допускают следующую запись:

$$\sigma = E^*(i\omega)\varepsilon \quad (5.24)$$

Из (5.15) или (5.24) видно, что процессу деформации (5.12) или (5.13) соответствует процесс напряжения

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 e^{i(\omega t + \varphi)} & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

или

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i(\omega t + \varphi)} h(t) \quad (5.26)$$

$$\sigma_0 = |E^*(i\omega)|, \quad |E^*| \equiv \sqrt{(R_\infty + R^s)^2 + (R^c)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{R^c}{R_\infty + R^s} \quad (5.27)$$

Величина φ и показывает отставание по фазе аналогичное тому, которое указано на фиг. 34.

Соотношения (5.24) можно обратить:

$$\varepsilon = J^*(i\omega)\sigma \quad (5.28)$$

Величина $J^*(i\omega)$ называется комплексной податливостью и имеет вид

$$J^*(i\omega) = \frac{1}{E^*(i\omega)} = \Pi_\infty + \Pi^s + i\Pi^c \quad (5.29)$$

$$\Pi_\infty + \Pi^s = \frac{R_\infty + R^s}{|E^*|^2}, \quad \Pi^c = \frac{R^c}{|E^*|^2} \quad (5.30)$$

$$\Pi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi(t) = \frac{1}{R_\infty}, \quad |J^*| = \frac{1}{|E^*|}, \quad J^* = |J^*| e^{-i\varphi} \quad (5.31)$$

Если теперь первоначально задать процесс напряжения в виде

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t} h(t) \quad (5.32)$$

то, используя представление

$$\tilde{\Pi}(t) = \Pi(t) - \Pi_\infty \quad (5.33)$$

аналогичное (5.17), получим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t + \psi)} = J^*(i\omega)\sigma \quad (5.34)$$

где $J^*(i\omega)$ определяется выражением (5.29). Кроме того,

$$\Pi^s(\omega) = \omega \int_0^\infty \tilde{\Pi}(\tau) \sin \omega \tau d\tau \quad (5.35)$$

$$\Pi^c(\omega) = \omega \int_0^\infty \tilde{\Pi}(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (5.36)$$

$$\varepsilon_0 = |J^*(i\omega)|, \quad |J^*| \equiv \sqrt{(\Pi_\infty + \Pi^s)^2 + (\Pi^c)^2}, \quad \psi = \arctg \frac{\Pi^c}{\Pi_\infty + \Pi^s} \quad (5.37)$$

Сравнивая между собой выражения (5.27) и (5.37), с учетом (5.30) заключаем, что

$$\operatorname{tg} \psi = -\operatorname{tg} \varphi \quad (5.38)$$

Заметим, что соотношения

$$\Pi(0)R(0) = 1, \quad \Pi_{\infty}R_{\infty} = 1 \quad (5.39)$$

следуют из формул (1.40), если использовать свойства (1.35), (1.42). Действительно, из (1.35) имеем

$$dR(\tau) = R^{(1)}(\tau)d\tau + R(0)\delta(\tau)d\tau \quad (5.40)$$

Подставляя (5.40) в (1.40), получим

$$\int_0^t \Pi(t-\tau)R^{(1)}(\tau)d\tau + R(0)\Pi(t) = 1 \quad (5.41)$$

Откуда при $t = 0$ следует первое из равенств (5.39), а, устремляя в (5.41) t в бесконечность, будем иметь

$$\int_0^{\infty} \Pi_{\infty}R^{(1)}(\tau)d\tau + R(0)\Pi_{\infty} \equiv \Pi_{\infty}[R_{\infty} - R(0)] + R(0)\Pi_{\infty} = 1 \quad (5.42)$$

Отсюда следует и второе из равенств (5.39).

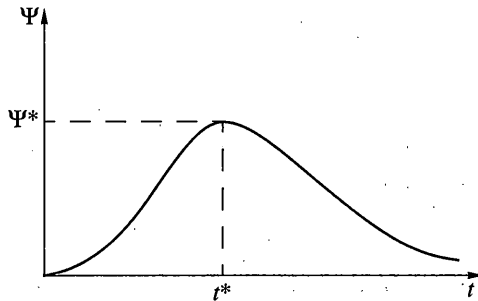
Заметим, что в связи с равенствами (5.39) полезно ввести в рассмотрение функцию

$$\Psi(t) = \Pi(t)R(t) - 1 \quad (5.43)$$

Так как

$$\Psi(0) = \Psi(\infty) = 0 \quad (5.44)$$

то эта функция (фиг. 35) должна иметь максимум Ψ^* в точке t^* . В [62, 63] представлены экспериментальные значения функции $\Psi(t)$, полученные для эпоксидной смолы С-100-0-8 холодного отверждения.



Фиг. 35

Нетрудно также получить следствия соотношений (5.41) в виде

$$\int_0^t \Pi(t-\tau)R(\tau)d\tau = \int_0^t R(t-\tau)\Pi(\tau)d\tau = t \quad (5.45)$$

6. Неразностные ядра и стареющие материалы. Если свойства материала изменяются со временем (такие материалы иногда называют стареющими), то приходится вводить в определяющие соотношения дополнительно ко времени нагружения еще и время существования материала. Первые теоретические и экспериментальные иссле-

дования ползучести стареющих материалов выполнены в [64, 65] для бетонов и в [66] для почв и грунтов.

Линейные определяющие соотношения стареющих материалов записываются в виде

$$\sigma(t) = \int_0^t \Gamma(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \equiv \check{\Gamma} \varepsilon \quad (6.1)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \equiv \check{K} \sigma \quad (6.2)$$

Таким образом, ядро релаксации $\Gamma(t, \tau)$ и ядро ползучести $K(t, \tau)$ зависят от двух времен: t и τ . Примем соглашение обозначать операторы разностного типа галочкой сверху, например, $\check{\Gamma}$, \check{K} , и понимать под записью $\sigma = \check{\Gamma} \varepsilon$ и $\varepsilon = \check{K} \sigma$ соотношения (4.5), (4.6). Операторы же неразностного типа будем обозначать крышкой сверху и под записью $\sigma = \hat{\Gamma} \varepsilon$ и $\varepsilon = \hat{K} \sigma$ иметь ввиду (6.1), (6.2).

Введем операторный формализм, т.е. определим некоторые простейшие операции над операторами, так чтобы с ними можно было обращаться, как с числами. Произведение двух операторов означает их последовательное применение. Если операторы \hat{A} и \hat{B} соответствуют ядрам разностного типа с функциями $A(t)$ и $B(t)$, то

$$\hat{A}\hat{B}f \equiv \int_0^t A(t-\tau) d \int_0^{\tau} B(\tau-\xi) df(\xi) \quad (6.3)$$

Если же операторы \hat{A} и \hat{B} соответствуют ядрам неразностного типа с функциями $A(t, \tau)$ и $B(t, \tau)$, то

$$\hat{A}\hat{B}f \equiv \int_0^t A(t, \tau) \left[\int_0^{\tau} B(\tau, \xi) f(\xi) d\xi \right] d\tau \quad (6.4)$$

Можно привести пример, показывающий, что умножение операторов неразностного типа, вообще говоря, некоммутативно. Пусть

$$A(t, \tau) = t^\alpha - \tau^\alpha, \quad B(t, \tau) = t^\beta - \tau^\beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (6.5)$$

Примем, например, $f(\xi) \equiv 1$ и согласно (6.4) запишем

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B}f &= \int_0^t (t^\alpha - \tau^\alpha) \int_0^{\tau} (\tau^\beta - \xi^\beta) d\xi d\tau = \\ &= \frac{\beta}{\beta+1} \int_0^t (t^\alpha - \tau^\alpha) \tau^{\beta+1} d\tau = \frac{\alpha\beta t^{\alpha+\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)(\alpha+\beta+2)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

С другой стороны, меняя в (6.6) α и β местами, получим

$$\hat{B}\hat{A}f = \frac{\beta\alpha t^{\beta+\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+\alpha+2)} \quad (6.7)$$

Из сравнения (6.6) и (6.7) видно, что $\hat{A}\hat{B}f \neq \hat{B}\hat{A}f$, а равенство реализуется только если $(\alpha + 1)(\alpha + 2) = (\beta + 1)(\beta + 2)$, что при положительных α и β возможно только в тривиальном случае $\alpha = \beta$.

Умножение же операторов разностного типа коммутативно

$$\check{A}\check{B}f = \check{B}\check{A}f \quad (6.8)$$

что дает возможность действовать с ними, как с числами.

Итак, ядра $\Gamma(t, \tau)$ и $K(t, \tau)$ являются функциями не одной, а двух переменных. В этом случае условия взаимнообратности соотношений (6.1) и (6.2) можно записать в виде

$$\int_0^t \Gamma(t, \tau)K(\tau, \xi)d\tau = \int_0^t K(t, \tau)\Gamma(\tau, \xi)d\tau = \delta(t - \xi) \quad (6.9)$$

Операторы $\hat{\Gamma}$ и \hat{K} взаимнообратны, так что можно следующим образом определить единицу, деленную на оператор

$$\hat{\Gamma} = 1/\hat{K}, \quad \hat{K} = 1/\hat{\Gamma} \quad (6.10)$$

Как следует из (6.9), левая и правая единицы в алгебре этих операторов совпадают.

Если материал обладает мгновенной упругостью, то аналогично (1.29), (1.30) имеем

$$K(t, \tau) = K_0\delta(t - \tau) + \tilde{K}(t, \tau), \quad \Gamma(t, \tau) = \Gamma_0\delta(t - \tau) - \tilde{\Gamma}(t, \tau) \quad (6.11)$$

$$\Gamma_0 K_0 = 1, \quad \int_0^t \tilde{\Gamma}(t, \tau)\tilde{K}(\tau, \xi)d\tau + K_0\tilde{\Gamma}(t, \xi) = \Gamma_0\tilde{K}(t, \xi) \quad (6.12)$$

$$\int_0^t \tilde{K}(t, \tau)\tilde{\Gamma}(\tau, \xi)d\tau + K_0\tilde{\Gamma}(t, \xi) = \Gamma_0\tilde{K}(t, \xi)$$

Найти экспериментально неразностные ядра релаксации $\Gamma(t, \tau)$ и ползучести $K(t, \tau)$ сложнее чем для разностных ядер. Обозначим далее

$$\partial\Pi/\partial\tau(t, \tau) = -\tilde{K}(t, \tau), \quad \Pi(t, t) = K_0 = 1/E \quad (6.13)$$

и примем во внимание соотношения (6.11). Тогда связь деформации и напряжения (6.2) примет вид

$$\varepsilon(t) = K_0\sigma(t) + \int_0^t \tilde{K}(t, \tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (6.14)$$

Рассмотрим следующий процесс напряжения:

$$\sigma(t) = \sigma_0 h(t - t_0) \quad (6.15)$$

Тогда соответствующий ему процесс деформации получим, интегрируя в (6.14) по частям:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 [K_0 h(t - t_0) - \Pi(t, t)h(t - t_0) + \Pi(t, t_0)] = \sigma_0 \Pi(t, t_0) \quad (6.16)$$

Проведя серию экспериментов (6.15), (6.16) с различными t_0 , построим экспериментальную кривую $\Pi(t, t_0)$. Дифференцируя ее по параметру t_0 , согласно (6.13) найдем

ядро ползучести. Вопросы экспериментального построения ядер ползучести для стареющих материалов подробно затронуты в [17, 67, 68], им также посвящены работы [69–71].

После этого можно найти и ядро релаксации $\Gamma(t, \tau)$, решая интегральное уравнение второго рода (6.12). Кроме того ядро $\Gamma(t, \tau)$ может быть получено из эксперимента на релаксацию образца. Обозначая

$$\partial R / \partial \tau(t, \tau) = \tilde{\Gamma}(t, \tau), \quad R(t, t) = \Gamma_0 = E \quad (6.17)$$

и подставляя (6.17) в соотношение

$$\sigma(t) = \Gamma_0 \varepsilon(t) + \int_0^t \tilde{\Gamma}(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (6.18)$$

выражение для ступенчатого процесса деформации

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 h(t - t_0) \quad (6.19)$$

находим

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 [\Gamma_0 h(t - t_0) - R(t, t) h(t - t_0) - R(t, t_0)] = -\varepsilon_0 R(t, t_0) \quad (6.20)$$

Отсюда описанным выше способом определяем $\Gamma(t, \tau)$.

Предположим теперь, что оператор $\hat{\Gamma}$ (6.1) инвариантен относительно сдвига по времени. Это означает следующее. Пусть некоторому процессу деформации $\varepsilon(t)$ оператором $\hat{\Gamma}$ ставится в соответствие процесс напряжения

$$\varepsilon(t) \xrightarrow{\hat{\Gamma}} \sigma(t) \quad (6.21)$$

Тогда, используя (6.1), запишем

$$\sigma(t - \xi) = \int_0^{t - \xi} \Gamma(t - \xi, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (6.22)$$

Если оператор $\hat{\Gamma}$ инвариантен относительно сдвига по времени, то процессу деформации $\varepsilon(t - \xi)$ соответствует процесс напряжения $\sigma(t - \xi)$. Так что

$$\sigma(t - \xi) = \int_0^t \Gamma(t, \tau) \varepsilon(\tau - \xi) d\tau \quad (6.23)$$

Сделаем замену переменных в (6.22):

$$\tau + \xi = \tau_1 \rightarrow \tau \quad (6.24)$$

Тогда из (6.22) имеем

$$\sigma(t - \xi) = \int_{\xi}^t \Gamma(t - \xi, \tau - \xi) \varepsilon(\tau - \xi) d\tau \quad (6.25)$$

В силу того, что по принятому условию

$$\varepsilon(\tau - \xi) = 0 \quad \text{при} \quad \tau < \xi \quad (6.26)$$

можно изменить в (6.25) нижний предел интегрирования

$$\sigma(t - \xi) = \int_0^t \Gamma(t - \xi, \tau - \xi) \varepsilon(\tau - \xi) d\tau \quad (6.27)$$

Из сравнения (6.23) и (6.27) следует, что $\Gamma(t, \tau)$ удовлетворяет для любого ξ следующему функциональному уравнению

$$\Gamma(t, \tau) = \Gamma(t - \xi, \tau - \xi) \quad (6.28)$$

Продифференцируем теперь левую и правую части (6.28) по ξ :

$$\partial\Gamma/\partial t + \partial\Gamma/\partial\tau = 0 \quad (6.29)$$

Но дифференциальное уравнение (6.29) имеет общее решение

$$\Gamma = \Gamma(t - \tau) \quad (6.30)$$

так что Γ – функция фактически одного переменного, а именно, разности t и τ .

Следовательно, если интегральный оператор $\hat{\Gamma}$ инвариантен относительно сдвига по времени, то его ядро является ядром разностного типа. Аналогичные утверждения, очевидно, справедливы и для интегрального оператора \hat{K} .

Метод реологических моделей хорошо развит в линейной теории, однако применение его при конечных деформациях в вязкоупругости имеет свои особенности. В [72] сформулированы условия параллельного и последовательного соединения пружинок, поршеньков и пластических элементов, приводящие к согласованным теориям. Приведены также типичные ошибки и парадоксы, которые могут здесь возникнуть. Различные формы записи определяющих соотношений в теории вязкоупругости при конечных деформациях можно найти в [73–81].

Классификация различных нелинейных теорий вязкоупругости проведена в [7, 34, 82–85]. Для определения ядер ползучести и релаксации используются простейшие эксперименты. Введение многократных интегралов при построении нелинейной вязкоупругой модели нецелесообразно, так как ошибки экспериментальных данных сказываются существенно при выполнении большого числа интегрирований [18]. Поэтому иногда более точными оказываются теории, учитывающие экспериментальный факт подобия изохронных кривых ползучести [18]. С помощью нелинейных интегральных моделей в [86] исследован ряд задач об идентификации вязкоупругих сред. Отмечено, что эти задачи часто бывают некорректны по Адамару, и для их решения требуются специальные методы регуляризации [87].

Известны также разномодульные теории ползучести, описывающие среды с различным сопротивлением растяжению и сжатию [88]. В [89] модель строится на базе нелинейной теории, учитывающей влияние шарового тензора напряжений на время релаксации с помощью баро-временной аналогии. В [90] предложен энергетический вариант теории ползучести начально изотропных материалов, содержащих микротрещины. Определяющие соотношения для нелинейных реономных процессов, основанные на концепции перманентной памяти, с учетом различия при нагружении и разгрузки (асфальтобетон, твердое топливо) приведены в [91].

Построение на основе реологических моделей определяющих соотношений вязкоупругости с привлечением термодинамики (термовязкоупругости) изложено в [7, 9, 92–95]. В [96] сформулированы основные принципы для моделей с нелинейной дисси-

пацией. В [97] описаны способы определения материальных функций в нелинейной термовязкоупругости с использованием иерархической структуры.

В заключение отметим работы последних лет [98–103], относящиеся к тем или иным разделам линейной и нелинейной теории вязкоупругости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 02-01-00780, 02-01-00567).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
3. *Bland D.R.* The Theory of Linear Viscoelasticity. Oxford: Pergamon Press, 1960. = *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 199 с.
4. *Ferry J.D.* Viscoelastic Properties of Polymers. N.-Y., London: Wiley, 1961. = *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 565 с.
5. *Reiner M.* Berlin etc.: Springer, 1958. = *Рейнер.* Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.
6. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.
7. *Ильюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
8. *Работнов Ю.Н., Милейко С.Т.* Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. 222 с.
9. *Day W.A.* The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory. Berlin, Heidelberg, N.-Y.: Springer, 1972. = *Дэй У.А.* Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. 190 с.
10. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязко-упругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1972. 327 с.
11. *Бугаков И.И.* Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 287 с.
12. *Odqvist F.K.G.* Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture. Oxford: Clarendon Press, 1974. 206 p.
13. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 398 с.
14. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. М.: Изд-во МГУ, 1975. 528 с.
15. *Постнов В.А.* Теория пластичности и ползучести. Л.: Изд-во Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1975. 130 с.
16. *Flügge W.* Viscoelasticity. N.-Y.: Springer, 1975. 194 p.
17. *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк., 1976. 280 с.
18. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
19. *Савин Г.Н.* Механика деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1979. 466 с.
20. *Kraus H.* Creep Analysis. N.-Y.: Wiley, 1980. 250 p.
21. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 571 с.
22. *Gurtin M.E.* An Introduction to Continuum Mechanics. N.-Y.: Acad. Press, 1981. 265 p.
23. *Русинко К.Н.* Теория пластичности и неуставившейся ползучести. Львов: Вища шк., 1981. 148 с.
24. *Christensen R.M.N.* Theory of viscoelasticity. An introduction. N.-Y., L.: Acad. Press, 1971. = *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
25. *Уржумцев Ю.С.* Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов. М.: Наука, 1982. 222 с.
26. *Rüsch H., Junfirth D., Hilsdorf H.* Creep and shrinkage: their effect on the behavior. N.-Y.: Springer, 1983. 284 p.
27. *Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
28. *Čadek J.* Creep kovových materiálu. Praha: Academia, 1984. = *Чадек Й.* Ползучесть металлических материалов. М.: Мир, 1987. 304 с.
29. *Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С.* Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985. 303 с.

30. Pipkin A.C. Lectures on Viscoelasticity Theory. N.-Y., Berlin: Springer, 1986. 188 p.
31. Шарафутдинов Г.З. Фотовязкоупругость. М.: Изд-во МГУ, 1987. 199 с.
32. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
33. Бугаков И.И., Демидова И.И. Метод фототермовязкоупругости. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1993. 166 с.
34. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
35. Drozdov A.D. Viscoelastic Structures. San Diego: Acad. Press, 1998. 596 p.
36. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
37. Podlubny I. Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Mathematics in Science and Engineering. V. 198. San Diego, Ca.: Acad. Press, 1999. 340 p.
38. Eldred L.B., Baker W.P., Palazotto A.N. Kelvin-Voigt vs fractional derivative models as constitutive relations for viscoelastic materials // AIAA Journal. 1995. V. 33. № 3. P. 547–550.
39. Shimizu N., Iijima M. Fractional differential model of viscoelastic material // Trans. Japan Soc. Mech. Eng. Ser. C. 1996. V. 62. № 604. P. 4447–4451.
40. Rossikhin Y.A., Shitinkova M.V. Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass systems // Acta mech. 1997. V. 120. № 1–4. P. 109–125.
41. Drozdov A.D. Fractional differential models in finite viscoelasticity // Acta mech. 1997. V. 124. № 1–4. P. 155–180.
42. Enelund M., Mähler L., Runesson K., Josefson B.L. Formulation and integration of the standard linear viscoelastic solids with fractional order rate laws // Intern. J. Solids and Structures. 1999. V. 36. № 16. P. 2417–2442.
43. Welch S.W.J., Rorrer R.A.L., Duren R.G. Application of time-based fractional calculus methods to viscoelastic creep and stress relaxation of materials // Mech. Time-Depend. Mater. 1999. V. 3. № 3. P. 279–303.
44. Сургуладзе Т.А. Об одном применении дробной функции Грина // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 53–60.
45. Surguladze T.A. On certain applications of fractional calculus to viscoelasticity // J. Math. Sci. 2002. V. 112. № 5. P. 4517–4557.
46. Enelund M., Fenander Å., Olsson P. Fractional integral formulation of constitutive equations of viscoelasticity // AIAA Journal. 1997. V. 35. № 8. P. 1356–1362.
47. Победря Б.Е. Диссипация энергии в теории вязкоупругости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2003. № 4. С. 35–46.
48. Fabrizio M. On the inversion of a linear viscoelastic constitutive equation // Mat. Appl. 1992. V. 3. № 2. P. 141–148.
49. Matarazzo G. Time-irreversibility and existence and uniqueness of solutions of problems in linear viscoelasticity // Укр. мат. ж. 2000. Т. 52. № 7. С. 923–930.
50. Park S.W., Schapery R.A. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. P. I. A numerical method based on Prony series // Intern. J. Solids and Structures. 1999. V. 36. № 11. P. 1653–1675.
51. Schapery R.A., Park S.W. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. P. II. An approximate analytical method // Intern. J. Solids and Structures. 1999. V. 36. № 11. P. 1677–1699.
52. Пальмов В.А. Реологические модели в нелинейной механике деформируемых тел // Успехи механики (Advances in Mechanics). 1980. Т. 3. № 3. С. 75–115.
53. Egan J. A new look at linear visco-elasticity // Mater. Letters. 1997. V. 31. № 3–6. P. 351–357.
54. Ильюшин А.А., Огибалов П.М. Некоторое обобщение моделей Фойгта и Максвелла // Механика полимеров. 1966. № 2. С. 190–196.
55. Del Piero G., Deseri L. Monotonic, completely monotonic, and exponential relaxation functions in linear viscoelasticity // Quart. Appl. Math. 1995. V. 53. № 2. P. 273–300.
56. Morro A., Fabrizio M. Further inequalities for viscoelastic relaxation functions // Mech. Res. Comm. 1995. V. 22. № 4. P. 349–353.
57. Hazanov S. New class of creep-relaxation functions // Intern. J. Solids and Structures. 1995. V. 32. № 2. P. 165–172.

58. *Akyildiz F., Jones R.S., Walters K.* On the spring-dashpot representation of linear viscoelastic behaviour // *Rheol. Acta.* 1990. V. 29. № 5. P. 482–484.
59. *Вороицов Г.В., Резниченко А.И.* О соотношениях между матрицами линейных дифференциальных и интегральных моделей вязкоупругого тела при пространственном напряженно-деформированном состоянии // *Изв. вузов Северо-Кавказ. рег. Техн. науки.* 1998. № 3. С. 99–100.
60. *Савин Г.Н., Руцицкий Я.Я.* Элементы механики наследственных сред. Киев: Вища шк., 1976. 251 с.
61. *Mazilu P.* On the constitutive law of Boltzmann–Volterra // *Rev. Roum. Math. Pure Appl.* 1973. V. 18. № 7. P. 1067–1069.
62. *Малинин Н.И.* Ползучесть элементов конструкций из полимерных материалов // *ПМТФ.* 1970. № 2. С. 109–125.
63. *Theocaris P.S.* Creep and relaxation contraction ratio of linear viscoelastic materials // *J. Mech. and Phys. Solids.* 1964. V. 12. № 3. P. 125–138.
64. *Маслов Г.Н.* Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона // *Изв. НИИГ.* 1941. Т. 28. С. 175–188.
65. *Улицкий И.И.* Ползучесть бетона. Киев; Львов: Укргостехиздат, 1948. 136 с.
66. *Флорин В.А.* Одномерная задача уплотнения земляной среды с учетом старения, нелинейной ползучести и разрушения структуры // *Изв. АН СССР. ОТН.* 1953. № 9. С. 1229–1234.
67. *Ильюшин А.А.* Экспериментальный метод решения одного интегрального уравнения теории вязкоупругости // *Механика полимеров.* 1969. № 4. С. 584–587.
68. *Малинин Н.Н.* Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. 370 с.
69. *Якубовский Ю.Е.* Об определении параметров ядер ползучести для стареющих материалов // *Прикл. механика.* 1991. Т. 27. № 6. С. 37–44.
70. *Drozdov A.L.* On constitutive laws for ageing viscoelastic materials at finite strains // *Europ. J. Mech. Ser. A.* 1993. V. 12. № 3. P. 305–324.
71. *Пестриков В.М.* Об определяющих соотношениях стареющих материалов с учетом протекающих физико-химических процессов // *Изв. РАН. МТТ.* 1999. № 4. С. 134–140.
72. *Palmov V.A.* General principles of nonlinear rheology and typical mistakes in applications // *Тр. СПб. АН по проблемам прочности.* 1997. Т. 1. С. 126–139.
73. *Леонов А.И.* Об описании реологического поведения упруговязких сред при больших упругих деформациях. Препринт 34. М.: Ин-т проблем механики АН СССР. 1973. 63 с.
74. *Громов В.Г.* Неустойчивость, бифуркации, катастрофы установившихся движений наследственно деформируемых тел. Дисс. на соискание учен. степени докт. физ.-мат наук. Тула: Тульский политехн. ин-т, 1984. 371 с.
75. *Громов В.Г.* Метод построения определяющих соотношений вязкоупругих тел при конечных деформациях // *Докл. АН СССР.* 1985. Т. 285. № 1. С. 69–73.
76. *Durban D., Zeitoun D.G., Benaim H.E.* Finite linear viscoelasticity // *J. Eng. Mech.* 1990. V. 116. № 11. P. 2449–2462.
77. *Palmov V.A.* Large strains in viscoelastoplasticity // *Acta mech.* 1997. V. 125. № 1–4. P. 129–139.
78. *Reese S., Govindjee S.* A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects // *Intern. J. Solids and Structures.* 1998. V. 35. № 26–27. P. 3455–3482.
79. *Schapery R.A.* Nonlinear viscoelastic solids // *Intern. J. Solids and Structures.* 1999. V. 37. № 1–2. P. 359–366.
80. *Palmov V.A.* Comparison of different approaches in viscoelastoplasticity for large strains // *ZAMM.* 2000. V. 80. № 11–12. P. 801–806.
81. *Vonet J.* Large strain viscoelastic constitutive models // *Intern. J. Solids and Structures.* 2001. V. 38. № 17. P. 2953–2968.
82. *Ильюшин А.А., Огибалов П.М.* Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра // *Механика полимеров.* 1966. № 2. С. 170–189.
83. *Победря Б.Е.* Об уравнениях состояния в нелинейной теории вязкоупругости // *Механика полимеров.* 1967. № 3. С. 427–435.
84. *Победря Б.Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости // *Упругость и неупругость.* М.: Изд-во МГУ, 1973. Вып. 3. С. 95–173.
85. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории вязкоупругости // *Механика полимеров.* 1973. № 3. С. 417–428.

86. Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г. Об идентификации математических моделей вязкоупругих сред в реологии и электрореологии // Мех. композиц. матер. и конструкций. 2001. Т. 7. № 1. С. 114–130.
87. Grasselli M. Identifying relaxation kernels of linearly viscoelastic bodies // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1996. V. 4. № 5. P. 391–407.
88. Шестериков С.А., Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 13. С. 3–104.
89. Ольховик О.Е. Разномодульная теория ползучести // Изв. вузов. Машиностроение. 1994. № 10–12. С. 21–25.
90. Золочевская Л.А., Скленус А.Н. Энергетический вариант теории ползучести материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Пробл. прочности. 2001. № 2. С. 108–115.
91. Басалов Ю.Г., Кузнецов В.Н., Шестериков С.А. Определяющие соотношения для реономного материала // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 6. С. 69–81.
92. Победря Б.Е. Термодинамика вязко-упругих моделей // Прикладная математика и программирование. Вып. 1: Кишинев: Изд-во АН МССР. 1969. С. 75–86.
93. Быков Д.Л., Ильюшин А.А., Огибалов П.М., Победря Б.Е. Некоторые основные проблемы теории термовязкоупругости // Механика полимеров. 1971. № 1. С. 41–58.
94. Гольденблат И.И., Бажанов В.Л. Термодинамическая теория ползучести // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1971. Вып. 2. С. 202–218.
95. Победря Б.Е. О связанных задачах механики сплошной среды // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1971. Вып. 2. С. 224–253.
96. Hassani S., Alaoui Soulimani A., Ehrlacher A. A nonlinear viscoelastic model: The pseudo-linear model // Europ. J. Mech. Ser. A. 1998. V. 17. № 4. P. 567–598.
97. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Определение материальных функций нелинейной теории термовязкоупругости с использованием ее иерархической структуры // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 189–205.
98. Murdoch A.I. Remarks on the foundations of linear viscoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1992. V. 40. № 7. P. 1559–1568.
99. Sobotka Z. Differential equations and their integrals following from viscoelasticity // Acta techn. CSAV. 1994. V. 39. № 6. P. 675–710.
100. Sobotka Z. Związki różniczkowe i całkowe w lepkości // Zecz. nauk. Mech. PSI. 1994. № 115. P. 367–372.
101. Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. Заметки о линейных моделях вязкоупругих сред // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. Математика и механика. 1996. № 1. С. 135–147.
102. Brilla J. Laplace transform and new mathematical theory of viscoelasticity // Meccanica. 1997. V. 32. № 3. P. 187–195.
103. Каминский А.А., Подильчук И.Ю. Об одном методе решения граничных задач линейной теории вязкоупругости // Прикл. механика. 1998. Т. 34. № 12. С. 77–85.

Москва

Поступила в редакцию
30.09.2003