

УДК 539.214;539.374

© 2004 г. Т.А. БЕЛЯКОВА, Е.В. ЛОМАКИН

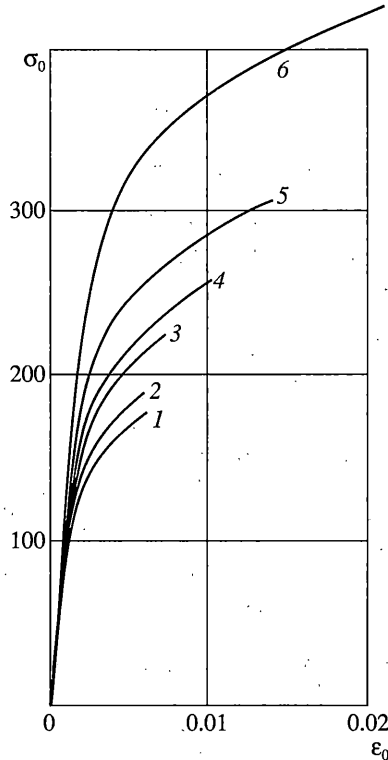
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДИЛАТИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ В БЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

В поврежденных средах поведение микродефектов структуры меняется в зависимости от условий нагружения. В связи с этим для материалов, содержащих микротрещины, включения, поры, характерна зависимость деформационных и прочностных характеристик от вида напряженного состояния, усложняющая описание процесса деформирования. Анализ экспериментальных данных позволяет отметить отсутствие для рассматриваемых сред единой диаграммы зависимости интенсивности касательных напряжений от интенсивности деформаций, взаимосвязь сдвигового и объемного деформирования, появление необратимых объемных деформаций, а также другие особенности. Подобными свойствами обладают конструкционные графиты, бетон, чугун, некоторые керамические и композитные материалы, горные породы и др. [1–7].

В работе исследуется влияние отмеченных особенностей деформирования на характер асимптотических решений в окрестности макротрещин в упрочняющемся материале. Рассмотрен случай плоского напряженного состояния. Предложен возможный вид аппроксимации материальных функций, позволяющий с достаточной степенью точности описать экспериментальные диаграммы деформирования. Для конкретных видов материальных функций получены распределения напряжений, деформаций и перемещений в окрестности вершины трещины и проведено их сравнение с решением аналогичной задачи для пластически несжимаемой среды. С помощью инвариантного интеграла определены условия начала роста трещины.

1. Зависимость деформационных характеристик материалов от вида напряженного состояния может быть описана путем введения в определяющие соотношения связи деформаций с напряжениями параметров вида напряженного состояния. Анализ результатов экспериментальных исследований свойств различных материалов показывает, что при описании зависимости их свойств от реализуемого при нагружении вида напряженного состояния может быть использован параметр $\xi = \sigma/\sigma_0$, представляющий собой отношение среднего напряжения $\sigma = 1/3\sigma_{kk}$ к интенсивности касательных напряжений $\sigma_0 = \sqrt{3/2} S_{ij}S_{ij}$, где $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ – девиатор напряжений [6–9]. Параметр ξ характеризует в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями в точке сплошной среды [9, 10]. В условиях плоского напряженного состояния значения параметра ξ принадлежат ограниченному интервалу $-2/3 \leq \xi \leq 2/3$.

На фиг. 1 приведены обобщенные диаграммы деформирования чугуна СЧ 15–32 [1, 2, 7], где $\varepsilon_0 = \sqrt{2/3} e_{ij}e_{ij}$ – интенсивность сдвиговых деформаций, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3\varepsilon\delta_{ij}$, $\varepsilon = \varepsilon_{kk}$ – объемная деформация. Испытания проводились на трубчатых образцах в условиях плоского напряженного состояния при совместном действии осевой нагрузки и крутя-



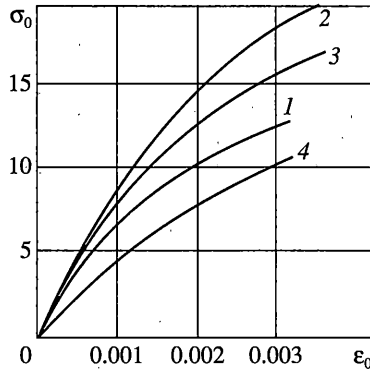
Фиг. 1

щего момента. Кривые 1 и 6 соответствуют одноосному растяжению ($\xi = 0.333$) и одноосному сжатию ($\xi = -0.333$); кривая 3 – чистому сдвигу ($\xi = 0$); кривые 2, 4, 5 – пропорциональному нагружению с отношением главных напряжений $\sigma_2/\sigma_1 = 0.217; -1.4; -2$ (параметр ξ при этом принимает значения $0.232, -0.064, -0.126$, соответственно). Диаграммы существенно нелинейны, при этом остаточное изменение объема перед разрушением может превышать 0.6% и сравнимо с величинами сдвиговых деформаций (σ_0 [МПа]).

Экспериментальные зависимости для конструкционного графита АРВ [3, 4] (фиг. 2) также нелинейны, хотя в данном случае эта нелинейность слабая. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют одноосному растяжению, одноосному сжатию, сдвигу, кривая 4 – равномерному двухосному растяжению, при котором для главных напряжений справедливо соотношение $\sigma_1/\sigma_2 = 1$.

Подобное расхождение обобщенных диаграмм деформирования отмечено для достаточно широкого класса сред [1–7], для которых не может быть использована классическая гипотеза “единой кривой” зависимости $\epsilon_0 \sim \sigma_0$. Кроме того, результаты экспериментальных исследований свидетельствуют, что процесс деформирования сопровождается нелинейной зависимостью между объемной деформацией ϵ и средним напряжением σ . При этом в процессе нагружения ϵ и σ могут иметь разные знаки, т.е. возможно объемное расширение материала при сжимающем среднем напряжении [5, 6]. Таким образом, гипотеза пластической несжимаемости и, соответственно, линейно упругой сжимаемости материала не может быть принята.

Приведенные диаграммы относятся к средам, которые с определенной степенью точности можно считать макрооднородными и изотропными [1, 2, 4, 5]. В условиях не-



Фиг. 2

равномерного напряженного состояния в материале может возникнуть неоднородность свойств и деформационная анизотропия, которая является следствием различного для разных точек среды изменения деформационных характеристик в зависимости от изменения соотношений между главными напряжениями.

Начальный наклон криволинейных диаграмм деформирования чаще всего совпадает для разных типов пропорционального нагружения. В большей степени чувствительность деформационных характеристик к виду напряженного состояния проявляется в области нелинейного деформирования, когда под действием достаточно высоких нагрузок происходит взаимодействие берегов микротрещин, а также образование и развитие новых дефектов.

Потенциал деформаций, описывающий нелинейное или пластическое деформирование рассматриваемого класса сред в случае активного нагружения может быть представлен в виде [6–8]:

$$\Phi = \frac{1}{2}(A + B\xi^2)\sigma_0^2 + [1 + \kappa(\xi)]g(\sigma_0), \quad A = \frac{2(1 + \nu)}{3E}, \quad B = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \quad (1.1)$$

Функция $g(\sigma_0)$, характеризующая нелинейность обобщенных диаграмм деформирования, может быть аппроксимирована степенной зависимостью $g(\sigma_0) = k\sigma_0^n/n$. Тогда уравнения связи деформаций и напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= 3/2[A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]S_{ij} + 1/3[B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\sigma\delta_{ij} \\ \lambda(\xi) &= 1 + \kappa(\xi) - \kappa'(\xi)\xi/n, \quad \Lambda(\xi) = \kappa'(\xi)/(\xi n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Взаимосвязь функций параметра вида напряжённого состояния $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ задается при помощи выражений

$$\lambda + \xi^2\Lambda = 1 + \kappa(\xi), \quad \lambda' + \xi^2\Lambda' = (n - 2)\xi\Lambda \quad (1.3)$$

При $\kappa(\xi) \equiv 0$ потенциал (1.1) и задаваемые им определяющие соотношения (1.2) совпадают с уравнениями деформационной теории пластичности.

Интенсивность деформаций и объёмная деформация определяются из соотношений

$$\epsilon_0 = [A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\sigma_0, \quad \epsilon = [B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\sigma \quad (1.4)$$

Выражения (1.4) представляют нелинейную зависимость интенсивности деформаций и объемной деформации от среднего напряжения и интенсивности напряжений. В зависимости от вида материальных функций $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ среднее напряжение и объемная деформация могут иметь разные знаки. При помощи введенных определяющих соотношений может быть описана также характерная для поврежденных сред взаимосвязь процессов объемного и сдвигового деформирования. Действительно, из выражений (1.4) следует

$$\varepsilon = \frac{B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}}{A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}}\xi\varepsilon_0$$

Таким образом, касательные напряжения наряду со сдвигом могут вызывать изменение объема.

Для материала, описываемого определяющими соотношениями (1.1), (1.2), параметры связи между напряжениями и деформациями не инвариантны к условиям нагружения и в общем случае неоднородного напряженного состояния определяются в ходе решения конкретной краевой задачи.

2. Рассмотрим случай плоского напряженного состояния тела с трещиной. Вдали от трещины приложены нормальные к ее плоскости растягивающие напряжения σ_∞ . Будем предполагать, что область нелинейного или пластического деформирования в окрестности вершины разреза мала по сравнению с длиной трещины и характерным геометрическим размером тела. При таком допущении в непосредственной окрестности вершины трещины, где напряжения имеют сингулярную особенность, можно пренебречь упругими деформациями как имеющими малый порядок по сравнению с нелинейными составляющими тензора деформаций [8, 11, 12]. Определяющие соотношения (1.2) принимают вид

$$\varepsilon_{ij} = 3/2\lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}S_{ij} + 1/3\Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}\sigma\delta_{ij} \quad (2.1)$$

На расстояниях, больших по сравнению с величиной пластической области, но малых по сравнению с геометрическими размерами тела, материал можно считать линейно упругим. При этом поля напряжений, деформаций и перемещений представляются соответствующими асимптотическими зависимостями линейной теории упругости.

Компоненты тензора напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия, которые в полярной системе координат (r, ϑ) с центром в одной из вершин трещины имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{2\sigma_{r\vartheta}}{r} = 0 \quad (2.2)$$

Для компонентов тензора деформаций справедливо уравнение совместности деформаций

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varepsilon_{r\vartheta}}{\partial\vartheta}\right) = \frac{\partial^2\varepsilon_{rr}}{\partial\vartheta^2} - r\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial r} + r\frac{\partial^2(r\varepsilon_{\vartheta\vartheta})}{\partial r^2} \quad (2.3)$$

Уравнениям равновесия в плоской задаче можно удовлетворить, введя представление для компонентов тензора напряжений через функцию напряжений Эри $\Psi(r, \vartheta)$:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\vartheta^2}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\vartheta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial\vartheta} \quad (2.4)$$

На основе определяющих соотношений (2.1) и уравнения совместности деформаций (2.3) получаем для функции напряжений Ψ нелинейное уравнение в частных производных

$$\begin{aligned} & \sigma_0^{n-2} \left(\lambda + \frac{1}{9} \Lambda \right) r^2 \Delta \Psi - \left[3 \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{r\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (2 \sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}) \right] \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\lambda \sigma_0^{n-2}) + \frac{1}{2} (2 \sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}) \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} (\lambda \sigma_0^{n-2}) + \\ & + \frac{2}{9} \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\Lambda \sigma_0^{n-2}) + \frac{1}{9} \Delta \Psi \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} (\Lambda \sigma_0^{n-2}) - \\ & - \left[3 \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + 2 \sigma_{rr} - \frac{5}{2} \sigma_{\vartheta\vartheta} - r \frac{\partial}{\partial r} (2 \sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr}) \right] r \frac{\partial}{\partial r} (\lambda \sigma_0^{n-2}) + \\ & + \frac{1}{9} \left(\Delta \Psi + 2r \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) r \frac{\partial}{\partial r} (\Lambda \sigma_0^{n-2}) - 3r \sigma_{r\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta} (\lambda \sigma_0^{n-2}) + \\ & + \frac{1}{2} (2 \sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr}) r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\lambda \sigma_0^{n-2}) + \frac{1}{9} \Delta \Psi r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Lambda \sigma_0^{n-2}) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Однородность уравнения (2.5) относительно r и Ψ дает возможность использовать метод разделения переменных. Для определения асимптотических полей напряжений и деформаций вблизи вершины трещины ограничимся главной сингулярной частью решения, которую будем искать в форме

$$\Psi = Kr^s f(\vartheta) \quad (2.6)$$

Согласно (2.6) компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{rr} = Kr^{s-2} \tilde{\sigma}_{rr}(\vartheta) = Kr^{s-2} [sf(\vartheta) + f''(\vartheta)] \quad (2.7)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = Kr^{s-2} \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta}(\vartheta) = Kr^{s-2} s(s-1)f(\vartheta),$$

$$\sigma_{r\vartheta} = Kr^{s-2} \tilde{\sigma}_{r\vartheta}(\vartheta) = -Kr^{s-2} (s-1)f'(\vartheta)$$

$$\xi = \frac{s^2 f + f''}{3\sqrt{(f'')^2 + s(3-s)ff'' + 3(1-s)^2(f')^2 + s^2(3-3s+s^2)f^2}}$$

Как следует из соотношений (2.7), параметр вида напряженного состояния ξ не зависит от r и является функцией только полярного угла ϑ , поэтому часть слагаемых в уравнении (2.5) пропадает.

Коэффициент K в выражениях (2.6), (2.7) может быть определен с помощью инвариантного интеграла Черепанова – Райса, который в полярной системе координат для произвольного контура Γ , охватывающего вершину трещины, имеет вид [12, 13]:

$$J = r \int_{\Gamma} [U \cos \vartheta - r^{-1} \chi(\vartheta)] d\vartheta \quad (2.8)$$

$$\chi(\vartheta) = \sin \vartheta \left[\sigma_{rr} \left(u_{\vartheta} - \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right) - \sigma_{r\vartheta} \left(u_r + \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial \vartheta} \right) \right] + \frac{1}{2} \cos \vartheta (\sigma_{rr} u_r + \sigma_{r\vartheta} u_{\vartheta})$$

где $U = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \Phi$ – плотность энергии деформации.

На основе инвариантности интеграла (2.8) можно заключить, что произведение компонентов тензора напряжений на компоненты тензора деформаций имеет особенность вида $1/r$, откуда, с учетом определяющих соотношений (2.1) и представления (2.7), находим $s = (2n - 1)/n$.

Определяющие соотношения (2.1) и выражения (2.7) позволяют выписать представление для компонентов тензора деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= kK^{n-1} r^{-(n-1)/n} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\vartheta) \\ \tilde{\varepsilon}_{rr} &= [1/2\lambda(\xi)(2\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta}) + 1/3\Lambda(\xi)\xi\tilde{\sigma}_0] \tilde{\sigma}_0^{n-2} \\ \tilde{\varepsilon}_{\vartheta\vartheta} &= [1/2\lambda(\xi)(2\tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta} - \tilde{\sigma}_{rr}) + 1/3\Lambda(\xi)\xi\tilde{\sigma}_0] \tilde{\sigma}_0^{n-2} \\ \tilde{\varepsilon}_{r\vartheta} &= 3/2\lambda(\xi)\tilde{\sigma}_{r\vartheta}\tilde{\sigma}_0^{n-2}, \quad \tilde{\varepsilon}_{zz} = [-1/2\lambda(\xi) + 1/9\Lambda(\xi)](\tilde{\sigma}_{\vartheta\vartheta} + \tilde{\sigma}_{rr})\tilde{\sigma}_0^{n-2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Компоненты вектора перемещений, определенные на основе (2.9), имеют вид

$$\begin{aligned} u_r &= kK^{n-1} r^{1/n} n\tilde{\varepsilon}_{rr}(\vartheta) \\ u_\vartheta &= kK^{n-1} r^{1/n} \frac{n^2}{n-1} \left(\frac{d\tilde{\varepsilon}_{rr}(\vartheta)}{d\vartheta} - \frac{2}{n}\tilde{\varepsilon}_{r\vartheta}(\vartheta) \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

В случае, когда вдали от разреза напряженное состояние представляет собой одноосное растяжение σ_∞ , нормальное к плоскости трещины, неизвестная функция $f(\vartheta)$ может быть определена из уравнения (2.5) с учетом краевых условий, следующих из симметрии постановки задачи $\sigma_{r\vartheta} = \partial\sigma_{rr}/\partial\vartheta = \partial\sigma_{\vartheta\vartheta}/\partial\vartheta = 0$ при $\vartheta = 0$ и условий отсутствия напряжений на поверхности разреза $\sigma_{r\vartheta} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = 0$ при $\vartheta = \pm\pi$.

Поскольку уравнение (2.5) является однородным, для функции $f(\vartheta)$ необходимо принять некоторое условие нормировки, например $f(0) = 1$. Таким образом краевые условия для функции $f(\vartheta)$ имеют вид

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = f'''(0) = 0, \quad f(\pi) = f'(\pi) = 0 \quad (2.11)$$

но, как следует из уравнений равновесия (2.2), из них независимых только четыре.

Для конкретного вида материальных функций $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ и показателя упрочнения n , определяемых на основе экспериментальных диаграмм деформирования, с помощью численного интегрирования уравнения (2.5) можно получить асимптотические распределения напряжений, деформаций и перемещений в окрестности вершины трещины.

Для определения амплитуды K в выражениях (2.7), (2.9), (2.10) необходимо вычислить значения интеграла (2.8) вблизи вершины трещины и на удалении от нее. Его значение на контуре в пластической области, окружающей вершину трещины определяется на основе представлений (2.7) и (2.10) с учетом того, что для плотности упругой энергии U справедливо

$$U = (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \Phi) \Big|_{\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})} = \frac{n-1}{n} k [\lambda(\xi) + \xi^2 \Lambda(\xi)] \sigma_0^n = (n-1)\Phi$$

В результате для интеграла (2.8) на контуре Γ_1 вблизи от трещины получим выражение

$$J = 2K^n k \int_0^\pi R(\vartheta) d\vartheta$$

$$\begin{aligned}
 R(\vartheta) = & \frac{n-1}{n} [\lambda(\xi) + \xi^2 \Lambda(\xi)] \tilde{\sigma}_0^n \cos \vartheta - \\
 & - \sin \vartheta \left[\tilde{\sigma}_{rr} \frac{n}{n-1} \left(\frac{d\tilde{\varepsilon}_{rr}(\vartheta)}{d\vartheta} - 2\tilde{\varepsilon}_{r\vartheta}(\vartheta) \right) - \tilde{\sigma}_{r\vartheta} \tilde{\varepsilon}_{\vartheta\vartheta}(\vartheta) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \cos \vartheta \left[\tilde{\sigma}_{rr} n \tilde{\varepsilon}_{rr}(\vartheta) + \tilde{\sigma}_{r\vartheta} \frac{n^2}{n-1} \left(\frac{d\tilde{\varepsilon}_{rr}(\vartheta)}{d\vartheta} - \frac{2}{n} \tilde{\varepsilon}_{r\vartheta}(\vartheta) \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Пределы интегрирования в (2.12) указаны с учетом четности подынтегрального выражения. Принимая во внимание, что в рамках сделанных допущений состояние среды вдали от трещины описывается соотношениями линейной теории упругости, значение интеграла (2.8) на удаленном от трещины контуре Γ_2 задается выражением

$$J = 2\pi K_0^2 (A + 1/9B), \quad K_0 = \sigma_\infty \sqrt{l} \sqrt{2}
 \tag{2.13}$$

Приравнявая значения (2.12) и (2.13), можно получить значение амплитуды сингулярности напряжений K в решении нелинейной задачи.

3. Нелинейность обобщенных диаграмм деформирования $\varepsilon_0 \sim \sigma_0$, представленных на фиг. 1 и 2, хорошо отражает степенная функция упрочнения $g(\sigma_0)$ при значениях постоянных $n = 6$, $k = 5.274 \cdot 10^{-14}$ (МПа)⁻⁵ для чугуна (фиг. 1), при этом константы $A = 9.470 \cdot 10^{-6}$ (МПа)⁻¹, $B = 1.705 \cdot 10^{-5}$ (МПа)⁻¹. Диаграммам деформирования графита (фиг. 2) соответствуют значения $n = 4$, $k = 2.295 \cdot 10^{-7}$ (МПа)⁻³, $A = 1.357 \cdot 10^{-4}$ (МПа)⁻¹, $B = 1.755 \cdot 10^{-4}$ (МПа)⁻¹. Для функции параметра вида напряженного состояния $\lambda(\xi)$ может быть использована аппроксимация вида

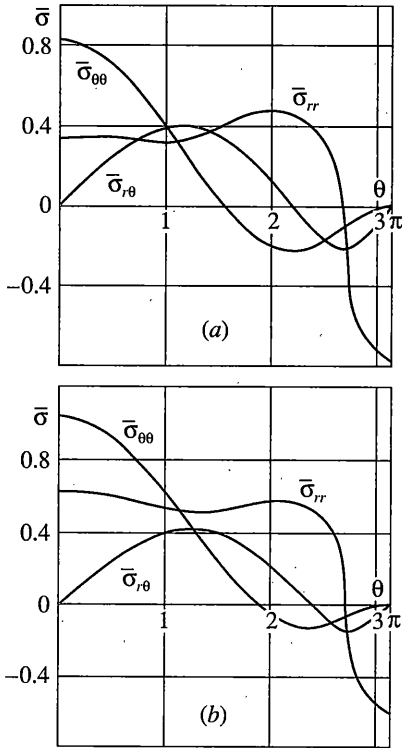
$$\lambda(\xi) = A_0 + C_1 \arctg \left[(\xi - \xi_0) / C_2 \right]
 \tag{3.1}$$

Аппроксимация (3.1) позволяет с достаточной степенью точности описать экспериментальные зависимости. Функция $\Lambda(\xi)$ определяется по известной функции $\lambda(\xi)$ из второго соотношения (1.3). В результате решения дифференциального уравнения находим

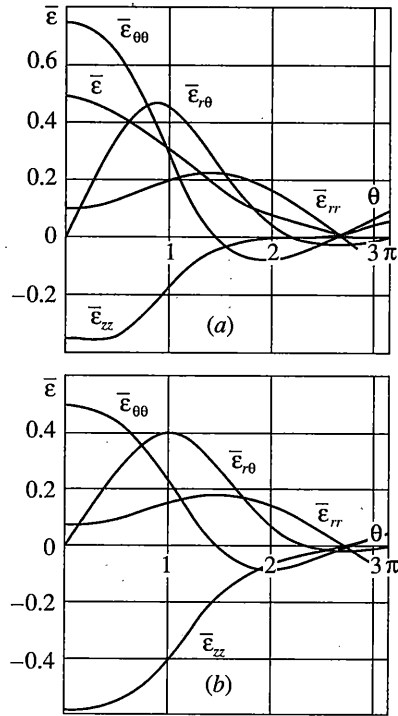
$$\Lambda(\xi) = \left(- \int \left[\lambda'(\xi) / \xi^n \right] d\xi + C_0 \right) \xi^{n-2}
 \tag{3.2}$$

Коэффициенты аппроксимации A_0 , C_0 , C_1 , C_2 и ξ_0 , определяемые на основе экспериментальных диаграмм [6, 7], должны удовлетворять условиям выпуклости и положительной определенности потенциала деформаций, полученным в [6], что обеспечивает единственность решения краевых задач.

Диаграммам деформирования чугуна СЧ 15–32 соответствуют следующие значения коэффициентов: $A_0 = 2.9327$, $C_1 = 2.3$, $C_2 = 0.43$, $\xi_0 = 0.48$, $C_0 = 18.3$. При указанных коэффициентах аппроксимации выполнялось численное интегрирование уравнения (2.5) методом Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага, точность интегрирования составляла 10^{-7} . Полученные диаграммы изменения компонентов тензора напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}(\vartheta) = \sigma_{ij}(\pi K_0^2 (A + B/9)/kr)^{-1/6}$ и компонентов тензора деформаций $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\vartheta) = \varepsilon_{ij}(\pi K_0^2 (A + B/9)/r)^{-5/6} k^{-1/6}$ в зависимости от полярного угла показаны соответственно на фиг. 3,а и фиг. 4,а. Для сравнения на фиг. 3,б и 4,б показано распределение напряжений и деформаций в пластически несжимаемом материале, решение для которого можно получить, положив $\lambda(\xi) \equiv 1$, $\Lambda(\xi) \equiv 0$. Напряжения, рассчитанные для материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами, оказываются ниже, чем в несжимаемой среде.



Фиг. 3

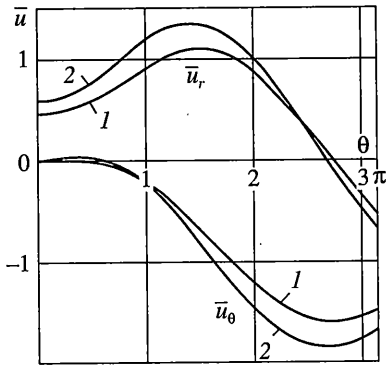


Фиг. 4

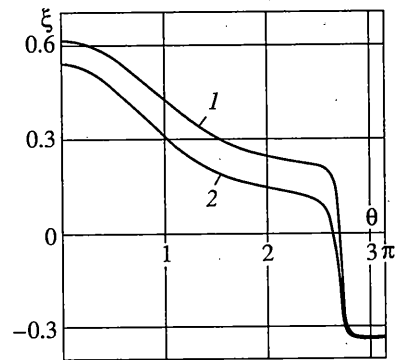
В отличие от напряжений, значения деформаций и перемещений существенно превышают соответствующие величины в несжимаемом материале. При этом значения объемной пластической деформации сравнимы со сдвиговыми деформациями. Поле перемещений $\bar{u}_i(\vartheta) = u_i(\pi K_0^2(A + B/9))^{-5/6}(kr)^{-1/6}$ и зависимость параметра ξ от полярного угла показаны на фиг. 5 и 6, соответственно. Цифрой 1 обозначены диаграммы, относящиеся к несжимаемой среде, а цифрой 2 – диаграммы для материала, деформирование которого описывается соотношениями (2.1).

Произведенные при указанной аппроксимации экспериментальных диаграмм расчеты показывают, что значение амплитуды сингулярности K для материала с зависимостью деформационных свойств от вида напряженного состояния оказывается существенно ниже соответствующего значения K_* , полученного при решении той же задачи в предположении несжимаемости материала $K/K_* = 0.7942$. Таким образом, учет пластической сжимаемости среды и чувствительности ее механических свойств к изменению вида напряженного состояния вносит существенную поправку в распределение напряжений, деформаций и перемещений по сравнению с соответствующим решением для несжимаемой среды с тем же показателем упрочнения.

Аналогичные зависимости получают при проведении расчетов для конструкционного графита АРВ. При аппроксимации материальных функций $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ для графита в выражениях (3.1) и (3.2) можно положить $A_0 = 2.0924$, $C_1 = 1.3$, $C_2 = 0.43$, $\xi_0 = 0.48$, $C_0 = 11.56$ при $n = 4$. Значение амплитуды напряжений K , как и в приведен-



Фиг. 5



Фиг. 6

ном выше значении для чугуна, оказывается существенно ниже соответствующей величины для несжимаемого материала с тем же показателем упрочнения ($n = 4$), а именно, $K/K_* = 0.7430$. Тип полученных распределений напряжений, деформаций и перемещений сходен с приведенными на фиг. 3–6 для чугуна.

Полученные решения позволяют оценить степень влияния зависимости свойств материала от вида напряженного состояния и пластической сжимаемости среды на характер асимптотических распределений в непосредственной окрестности вершин трещин. Учет отмеченных особенностей деформирования приводит к снижению уровня напряжений и в то же время к заметному увеличению деформаций по сравнению с решением для пластически несжимаемой среды.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-00077 и 03-01-06042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонов М.Я., Паняев В.А., Русинко К.Н.* Зависимость между деформациями и напряжениями для полухрупких тел // Инж. ж. МТТ. 1967. № 6. С. 26–32.
2. *Паняев В.А.* Экспериментальное исследование деформации серого чугуна // Сложная деформация твердого тела. Фрунзе, "Илим", 1969. С. 126–135.
3. *Березин А.В., Ломакин Е.В., Строков В.И., Барабанов В.Н.* Сопротивление деформированию и разрушению изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния // Проблемы прочности. 1979. № 2. С. 60–65.
4. *Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П.* Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1983. 366 с.
5. *Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г.* Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.
6. *Ломакин Е.В.* Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 66–75.
7. *Ломакин Е.В.* Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 92–99.
8. *Ломакин Е.В.* Деформирование дилатирующей среды вблизи вершины трещины в условиях плоского напряженного состояния. // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 5. С. 99–109.
9. *Ломакин Е.В.* Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряженного состояния I. Экспериментальные зависимости и определяющие соотношения // Механика композитных материалов. 1988. № 1. С. 3–9.

10. Новожилов В.В. О физическом смысле инвариантов напряжения, используемых в теории пластичности // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 5. С. 617–619.
11. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // J. Mech. and Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 1. P. 13–31.
12. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 1. P. 1–12.
13. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.10.2003