

УДК 539.375

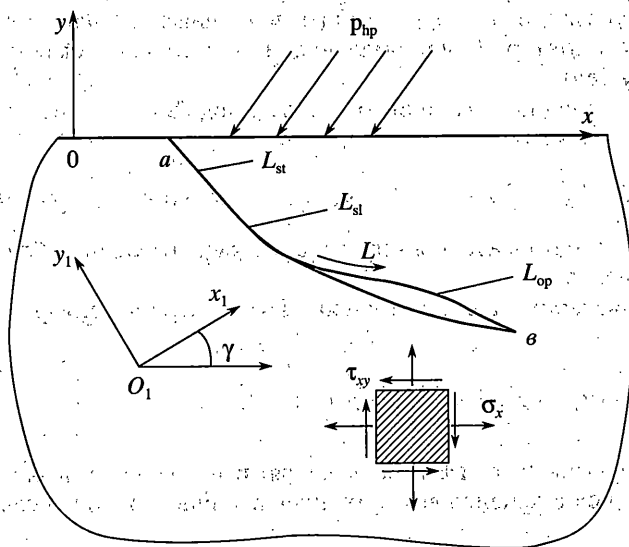
© 2003 г. А.В. АНДРЕЕВ

**РАСЧЕТ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ
КРАЕВЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ
С УЧЕТОМ АСИМПТОТИКИ НАПРЯЖЕНИЙ**

Процессы разрушения часто протекают в условиях, когда напряженное состояние в зоне трещины эквивалентно полю сжатия и сдвига. Задачи механики разрушения в этих условиях представляют собой комбинацию контактной задачи и задачи механики деформируемого твердого тела. При этом они требуют специальных методов решения, поскольку распределение областей контакта неизвестно. Причиной контакта поверхностей трещины может являться не только действие внешних нагрузок, но и форма трещины [1, 2], а также взаимодействие трещин и других дефектов между собой [3, 4] и с границей упругого тела [1, 5]. Как следствие, исследование предельного равновесия краевых трещин необходимо проводить с учетом возможного контакта их поверхностей.

В работе рассмотрена двумерная задача о напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости, ослабленной краевой криволинейной трещиной со взаимодействующими с трением поверхностями. Развита метод расчета предельного равновесия таких трещин, основанный на решении системы сингулярных интегральных уравнений, описывающих смешанную (контактную) краевую задачу теории упругости. При этом исследование осуществляется с учетом особенностей поведения решения вблизи краевой вершины, для чего в работе предлагается подход, использующий результаты проведенного ранее асимптотического анализа [5]. В публикуемой работе акцент делается на корректном учете особенностей поведения решения вблизи краевой вершины. Установлено существенное влияние учета краевой асимптотики на предельное равновесие трещин. Получены решения задач о равновесии краевых трещин как без взаимодействия их поверхностей, так и трещин с частично контактирующими поверхностями.

Краевые трещины в упругой полуплоскости без учета контакта их поверхностей рассматривались, в частности, в [1, 6–8]. Квазистатический рост произвольной криволинейной краевой трещины (без учета возможного контакта ее поверхностей) в упругой полуплоскости исследовался в [9], а в [10] дана постановка такого рода задачи с учетом контакта поверхностей трещины. Рассматривались двумерные (трехмерные) задачи о прямолинейных (плоских) краевых трещинах с учетом контакта их поверхностей с трением [8], исследовались также некоторые виды ломаных трещин с контактирующими с трением поверхностями в упругой полуплоскости [11]. В [12] рассмотрена задача о действии жесткого штампа на упругую полуплоскость с криволинейными трещинами с учетом возможного контакта их поверхностей (без трения, либо в случае полного сцепления на контакте). Метод исследования краевых трещин со взаимодействующими с трением поверхностями в двумерных областях был развит в [5]. Здесь осуществлено его уточнение с точки зрения количественного учета краевой асимптотики решения.



Фиг. 1

1. Постановка краевой задачи. Рассмотрим первую основную задачу теории упругости для полуплоскости, ослабленной гладкой краевой криволинейной трещиной, вытянутой вдоль некоторого контура L . Пусть тело занимает нижнюю полуплоскость ($y \leq 0$), на краю которой заданы напряжения (фиг. 1):

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = p_{hp}(x), \quad y = 0, \quad |x| < \infty, \quad \sqrt{i} = -1 \quad (1.1)$$

Отнесем контур L к локальной системе координат $x_1 O_1 y_1$. В основной декартовой системе координат xOy , связанной с краем полуплоскости, точка O_1 определяется комплексной координатой $z_1^0 = x_1^0 + iy_1^0$, а ось x_1 образует угол γ с осью x (фиг. 1).

Предположим, что под действием внешней нагрузки на части трещины L_{op} имеет место раскрытие ее поверхностей, и они свободны от напряжений (фиг. 1). При этом в области налегания на некоторой ее части L_{sl} возникает скольжение, а остальная часть L_{st} находится в состоянии сцепления. В этом случае граничные условия на трещине имеют вид

$$\begin{aligned} N_1^+ + iT_1^+ &= N_1^- + iT_1^-, \quad (v_n^+ - v_n^-) + i(v_\tau^+ - v_\tau^-) = 0, \quad t_1 \in L_{st} \\ v_n^+ - v_n^- &= 0, \quad T_1^\pm = \rho N_1^\pm, \quad \rho = \mu(v_\tau^+ - v_\tau^-) / |v_\tau^+ - v_\tau^-|, \quad t_1 \in L_{sl} \\ N_1^\pm + iT_1^\pm &= 0, \quad t_1 \in L_{op} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где N_1^\pm и T_1^\pm – нормальная и касательная компоненты напряжения на поверхностях трещины, v_n^\pm и v_τ^\pm – нормальная и касательная компоненты вектора смещений поверхностей трещины, μ – коэффициент трения Кулона. Здесь и далее верхний знак “плюс” (“минус”) означает принадлежность функции к левой (правой) поверхности трещины при движении в направлении увеличения параметра контура $t_1 = x_1 + iy_1(x_1)$, а

нижний индекс 1 указывает на то, что данная величина записана в локальных координатах и относится к контуру L (у нормальных и касательных компонент вектора смещений индекс опущен).

В областях реализации того или иного взаимодействия поверхностей трещины справедливы следующие условия:

$$v_n^+ - v_n^- > 0, \quad t_1 \in L_{op}; \quad N_1^+ < 0, \quad t_1 \in L_{sl} \cup L_{st}; \quad \mu |N_1^+| > |T_1^+|, \quad t_1 \in L_{st} \quad (1.3)$$

которые следует использовать для определения распределения областей раскрытия, налегания и сцепления.

2. Основные уравнения. Пусть на трещине L компоненты вектора смещений имеют разрыв, при этом

$$\frac{d}{dt_1} [(u_1 + iv_1)^+ - (u_1 + iv_1)^-] \equiv \frac{i(1 + \kappa)}{2G} g_1'(t_1), \quad t_1 \in L \quad (2.1)$$

напряжения непрерывны (знаки \pm в обозначениях напряжений в дальнейшем будем опускать), причем скачок смещений во внутренней вершине трещины равен нулю

$$g_1(\theta) = 0 \quad (2.2)$$

а напряжения и вращение на бесконечности равны нулю. Здесь u_1^\pm и v_1^\pm — компоненты вектора смещений поверхностей трещины в системе координат $x_1 O_1 y_1$, $\kappa = 3 - 4\nu$ при плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ при плоском напряженном состоянии, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига.

Пусть форма гладкого криволинейного контура L определяется параметрическим уравнением

$$x_1 = x_1(\xi), \quad y_1 = y_1(\xi), \quad |\xi| \leq 1 \quad (2.3)$$

В этом случае переменная точка контура представляется в следующем виде:

$$t_1 \equiv \omega(\xi) = x_1(\xi) + iy_1(\xi) \quad (2.4)$$

Тогда на основе интегрального представления комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили [1, 13, 14], получим интегральное представление напряжений на поверхностях трещины через скачок производной от смещений (2.1) ее поверхностей [5, 9, 12] в следующем виде:

$$[N_1 + iT_1]_{t_1 = \omega(\eta)} = \frac{1}{\pi \omega'(\eta)} \int_{-1}^1 [K(\xi, \eta) g'(\xi) + L(\xi, \eta) \overline{g'(\xi)}] d\xi + P_{hp}(\eta) - p_{cl}(\eta) \quad (2.5)$$

$$P_{hp}(\eta) = \frac{e^{-i\gamma}}{\pi \omega'(\eta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \text{Im} \left[\frac{e^{i\gamma} \omega'(\eta)}{T(\eta) - x} \right] p_{hp}(x) + \frac{\text{Im}[(T(\eta) - x) e^{-i\gamma} \overline{\omega'(\eta)}]}{(T(\eta) - x)^2} p_{hp}(x) \right\} dx \quad (2.6)$$

$$K(\xi, \eta) = \text{Re} \left[\frac{\omega'(\eta)}{\omega(\xi) - \omega(\eta)} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overline{\omega'(\eta)}}{\omega(\xi, \eta)} + \frac{\omega'(\eta)}{\omega(\xi, \eta)} + \frac{\omega(\xi, \xi)}{\omega^2(\xi, \eta)} \left[\overline{\omega'(\eta)} + \omega'(\eta) e^{2i\gamma} + 2e^{2i\gamma} \overline{\omega'(\eta)} \frac{\omega(\xi) - \omega(\eta)}{\omega(\xi, \eta)} \right] \right\} \quad (2.7)$$

$$L(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \omega(\xi) - \omega(\eta)}{\partial \eta \overline{\omega(\xi) - \omega(\eta)}} + \frac{\omega'(\eta)}{2} \left[\frac{1}{\omega(\xi, \eta)} + \frac{\omega(\xi) - \omega(\eta) \overline{\omega'(\eta)}}{\omega^2(\xi, \eta) \omega'(\eta)} + e^{-2i\gamma} \frac{\overline{\omega(\xi, \xi)}}{\omega^2(\xi, \eta)} \right] \quad (2.8)$$

$$\omega(\xi, \eta) = \overline{\omega(\eta)} - \omega(\xi) e^{2i\gamma} - 2ie^{i\gamma} \text{Im} z_1^0, \quad g'(\xi) = g'_1(t_1) \omega'(\xi), \quad |\eta| < 1$$

$$p_{cl}(\eta) \equiv p_1(\omega(\eta)), \quad T(\eta) = \omega(\eta) e^{i\gamma} + z_1^0, \quad \text{Im} T(\eta) < 0, \quad p_1(t_1) = -N_1^0 - iT_1^0$$

где N_1^0 и T_1^0 – нормальная и касательная компоненты напряжения на линии трещины в сплошной полуплоскости со свободным краем, обусловленные иными, нежели (1.1), нагрузками.

Используя соотношение (2.1), получим выражение скачков нормальных и касательных компонент смещений поверхностей трещины в виде (s_1 – параметр длины дуги контура L):

$$v_n^+ - v_n^- = \frac{1 + \kappa}{2G} \text{Re} \left[\frac{d\bar{t}_1}{ds_1} \int_{\sigma}^{t_1} g'_1(\zeta) d\zeta \right], \quad v_\tau^+ - v_\tau^- = -\frac{1 + \kappa}{2G} \text{Im} \left[\frac{d\bar{t}_1}{ds_1} \int_{\sigma}^{t_1} g'_1(\zeta) d\zeta \right]$$

поскольку, в соответствии с (2.2), скачки компонент смещений равны нулю во внутренней вершине (фиг. 1, точка σ).

Используя замену (2.4), получим

$$[v_n^+ - v_n^-]_{t_1 = \omega(\eta)} = \frac{1 + \kappa}{2G} \text{Re} \left[\frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\omega'(\eta)|} \int_1^\eta g'(\xi) d\xi \right] \quad (2.9)$$

$$[v_\tau^+ - v_\tau^-]_{t_1 = \omega(\eta)} = -\frac{1 + \kappa}{2G} \text{Im} \left[\frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\omega'(\eta)|} \int_1^\eta g'(\xi) d\xi \right]$$

Подстановка выражения (2.5) в первое граничное условие (1.2) приводит к его тождественному удовлетворению. Из других же граничных условий (1.2), на основе выражений (2.5) и (2.9), получим систему интегральных уравнений

$$\Delta_\tau(\eta) = 0, \quad \Delta_n(\eta) = 0, \quad \omega(\eta) \in L_{st}$$

$$\Delta_n(\eta) = 0, \quad \text{Im} \Omega(\eta) = \rho \text{Re} \Omega(\eta), \quad \omega(\eta) \in L_{s1} \quad (2.10)$$

$$\text{Re} \Omega(\eta) = 0, \quad \text{Im} \Omega(\eta) = 0, \quad \omega(\eta) \in L_{op}$$

$$\Omega(\eta) = \frac{1}{\pi \omega'(\eta)} \int_{-1}^1 [K(\xi, \eta) g'(\xi) + L(\xi, \eta) \overline{g'(\xi)}] d\xi + P_{hp}(\eta) - p_{cl}(\eta) \quad (2.11)$$

$$\Delta_n(\eta) = \text{Re} \left[\frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\omega'(\eta)|} \int_1^\eta g'(\xi) d\xi \right], \quad \Delta_\tau(\eta) = \text{Im} \left[\frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\omega'(\eta)|} \int_1^\eta g'(\xi) d\xi \right] \quad (2.12)$$

Система интегральных уравнений (2.10) описывает равновесное состояние краевой криволинейной трещины со взаимодействующими с трением поверхностями в полуплоскости, нагруженной краевыми усилиями (1.1) и другими (N_1^0 и T_1^0) нагрузками.

Отметим, что уравнения (2.10), содержащие функционал $\Omega(\eta)$, являются сингулярными интегральными уравнениями (СИУ) первого рода с ядром Коши. Существенно, что в рассматриваемом случае краевой трещины ($\text{Im} a = 0$) ядра (2.7) и (2.8), кроме

особенности типа Коши (первый член (2.7)), имеют неподвижную особенность в точке $\xi = \eta = -1$ (вторые члены в ядрах), т.е. являются обобщенными ядрами. Как следствие, решение в окрестности краевой вершины трещины, выходящей на границу полуплоскости, может быть ограничено либо иметь особенность, отличающуюся от корневой [1, 14, 15]. Этот вопрос подробно будет обсуждаться ниже.

Следует также отметить, что интегральные ядра (2.7), (2.8) известны в замкнутой форме также для полосы, клина и кругового диска, что позволяет строить системы СИУ, описывающие задачи о равновесии краевых криволинейных трещин с областями контакта в указанных телах на основе изложенного метода.

3. Численное решение СИУ. Для решения системы СИУ (2.10) используем метод механических квадратур, основанный на определенных формулах для интерполяционного полинома и квадратурных формулах для сингулярных интегралов [1, 5, 6, 15–19]. Данный метод позволяет сводить решение сингулярного интегрального уравнения к решению системы алгебраических уравнений относительно значений неизвестной функции в дискретном наборе точек. Особенностью применяемого в данной работе подхода, развитого в [19], являются явные (в элементарных функциях) выражения для узлов (точек аппроксимации), точек коллокации и весов квадратурных формул, полученные для случая произвольных (интегрируемых) вещественных особенностей неизвестной функции на концах промежутка интегрирования. Указанные выражения были получены для больших значений параметра дискретизации n ($n \gg 1$) [19]; там же была показана высокая точность и эффективность такого асимптотического представления.

Поскольку вблизи внутренней вершины краевой трещины в однородной изотропной упругой плоскости решение имеет корневую особенность, представим неизвестную функцию в виде

$$g'(\xi) = u(\xi)(1 + \xi)^\beta / \sqrt{1 - \xi} \quad (3.1)$$

где $u(\xi)$ – ограниченная непрерывная на отрезке $[-1, 1]$ функция, β – показатель сингулярности решения вблизи краевой вершины трещины ($-1/2 < \beta \leq 0$).

Применяя квадратурные формулы Гаусса – Якоби к выражению (2.11), получим [19]:

$$\Omega(\eta_m) = \frac{1}{\pi \omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^n W_k [K(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) + L(\xi_k, \eta_m) \overline{u(\xi_k)}] - p_{cl}(\eta_m) + P_{np}(\eta_m) \quad (3.2)$$

где точки аппроксимации ξ_k , точки коллокации η_m и веса W_k даются выражениями

$$\xi_k = \cos \theta_k, \quad \theta_k = (4k - 2)\pi / (4n + 2\beta + 1) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.3)$$

$$\eta_m = \cos \theta_m, \quad \theta_m = 4m\pi / (4n + 2\beta + 1) \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (3.4)$$

$$W_k = 4\pi \sqrt{1 + \xi_k} (1 + \xi_k)^\beta / (4n + 2\beta + 1) + O(n^{-2}) \quad (3.5)$$

Здесь сохранен один из членов порядка $O(n^{-2})$ с тем, чтобы веса квадратурных формул принимали точное значение при $\beta = \pm 1/2$ ($\forall n$), причем для таких величин β выражения для точек аппроксимации и коллокации также оказываются точными [1, 5, 15].

Выражения (2.12) на основе дискретизации (3.3)–(3.5) аппроксимируются в виде [19]:

$$\Delta_n(\eta_m) = -\text{Re} \left[\frac{\omega'(\eta_m)}{\omega(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} W_k u(\xi_k) \right], \quad \Delta_\tau(\eta_m) = -\text{Im} \left[\frac{\omega'(\eta_m)}{\omega(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} W_k u(\xi_k) \right] \quad (3.6)$$

Следовательно, на основе (3.2) и (3.6) система СИУ (2.10) сводится к алгебраической системе уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \Delta_\tau(\eta_m) = 0, \quad \Delta_n(\eta_m) = 0, \quad \omega(\eta_m) \in L_{st} \\ \Delta_n(\eta_m) = 0, \quad \text{Im}\Omega(\eta_m) = \rho \text{Re}\Omega(\eta_m), \quad \omega(\eta_m) \in L_{sl} \\ \text{Re}\Omega(\eta_m) = 0, \quad \text{Im}\Omega(\eta_m) = 0, \quad \omega(\eta_m) \in L_{op} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Система алгебраических уравнений (3.7) позволяет однозначно определить набор значений $u(\xi_k)$ неизвестной функции u , в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} [v_n^+ - v_n^-]_{t_1 = \omega(\eta_m)} &= -\frac{1 + \kappa}{2G} \text{Re} \left[\frac{\omega'(\eta_m)}{\omega(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} W_k u(\xi_k) \right] \\ [v_\tau^+ - v_\tau^-]_{t_1 = \omega(\eta_m)} &= \frac{1 + \kappa}{2G} \text{Im} \left[\frac{\omega'(\eta_m)}{\omega(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} W_k u(\xi_k) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} N + iT|_{t_1 = \omega(\eta_m)} &= \frac{1}{\pi \omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^n W_k [K(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) + L(\xi_k, \eta_m) \overline{u(\xi_k)}] - \\ &- P_{cl}(\eta_m) + P_{hp}(\eta_m) \end{aligned} \quad (3.9)$$

рассчитать скачки смещений поверхностей трещины и напряжения на них.

Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) во внутренней вершине определяются по формулам [1]:

$$k_1 - ik_2 = -\lim_{t_1 \rightarrow \theta} [\sqrt{2|t_1 - \theta|} g_1'(t_1)] \quad (3.10)$$

С учетом замены (2.4), используя интерполяционный полином Лагранжа, получим

$$k_1 - ik_2 = -\sqrt{|\omega'(1)|} \frac{u(1)}{\omega'(1)} = -\frac{\sqrt{|\omega'(1)|}}{\omega'(1)} \sum_{k=1}^n u(\xi_k) \prod_{j \neq k} \frac{1 - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \quad (3.11)$$

Как отмечалось выше, решение в окрестности краевой вершины трещины, выходящей на границу полуплоскости, может быть ограничено либо иметь особенность, отличающуюся от корневой [1, 5, 15].

В случае, если поверхности трещины не контактируют вблизи этой вершины ($a \in L_{op}$), реализуется первая ситуация $-\beta = 0$ (см. (3.1)). Этот вывод легко сделать, если учесть, что функция $g_1'(t_1)$ определяется через граничные значения комплексного потенциала Колосова – Мусхелишвили $\Phi(z)$ на контуре трещины [13], а также принять во внимание, что функция $\Phi(z)$ в окрестности угловой точки в клиновидных областях ограничена для углов при вершине $\vartheta \leq \pi$ [20].

В случае, если поверхности трещины в окрестности ее краевой вершины контактируют, т.е. $a \notin L_{op}$, необходим дополнительный асимптотический анализ. Он заключается в выявлении параметров задачи, при которых решение в окрестности краевой вершины имеет особенность, а также в определении величины последней. Такого рода анализ был выполнен в [5]. В указанной работе использовался метод поиска собственного решения задачи теории упругости об асимптотике напряжений вблизи краевой вершины трещины со взаимодействующими (с трением, либо без него) поверхностями. Данный метод основан на удовлетворении граничным условиям вблизи этой

вершины с помощью комплексных потенциалов Колосова – Мухелишвили [13], отыскиваемых в виде степенной функции координат. Следует отметить, что такой метод является альтернативой асимптотическому анализу главной части СИУ, описывающего краевую задачу [14, 15], и ранее он использовался, например, в [20].

Показано [5], что при $\mu \neq 0$ существует диапазон углов между касательной к линии трещины, проведенной в ее краевой вершине, и границей полуплоскости (см. фиг. 2), в котором решение имеет особенность, отличающуюся от корневой (вне этого диапазона решение ограничено). При увеличении коэффициента трения этот диапазон расширяется, причем величина особенности возрастает. Напротив, в отсутствие трения, решение в окрестности краевой вершины ограничено во всем диапазоне углов $0 < \varphi \leq 90^\circ$ ($\beta = 0$). Отметим также, что особенность в решении вблизи краевой вершины существует только в том случае, когда режим скольжения поверхностей трещины соответствует перемещению ее поверхности, принадлежащей остроугольной области (см. фиг. 2), вглубь полуплоскости (относительно другой поверхности). Таким образом, при определенных параметрах задачи решение следует искать в виде (3.1), где величина β дается зависимостью, показанной на фиг. 2.

Отметим, что поиск решения в виде (3.1) обеспечивает учет асимптотического поведения неизвестной функции, обусловленного как сингулярной составляющей типа Коши, так и неподвижной особенностью интегральных ядер.

Таким образом, изложенный метод решения системы СИУ (2.10), описывающей равновесное состояние краевой трещины со взаимодействующими поверхностями в упругой полуплоскости, позволяет адекватно учитывать особенности поведения решения вблизи краевой и внутренней вершин трещины, и, следовательно, корректно определять КИН во внутренней вершине.

Будем сравнивать предлагаемый метод с двумя приближенными методами, использовавшимися ранее при исследовании краевых трещин как без контакта берегов [1, 6, 9], так и со взаимодействующими с трением поверхностями [5, 10].

В работах [1, 6, 10] при рассмотрении краевых трещин использовался метод численного решения СИУ задачи, соответствующий поиску его решения в виде

$$g'(\xi) = u(\xi)/\sqrt{1-\xi^2} \quad (3.12)$$

т.е. при $\beta = -1/2$. При этом на решение задачи налагалось дополнительное условие

$$u(-1) = 0 \quad (3.13)$$

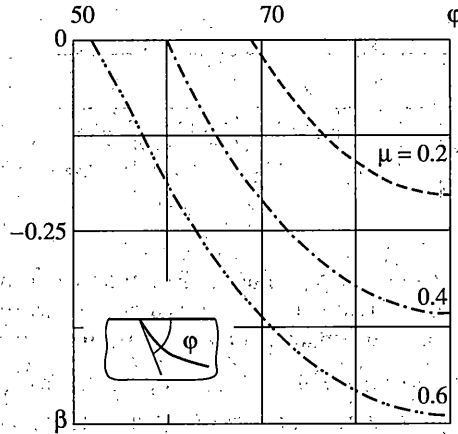
указывающее на то, что функция $g'(\xi)$ имеет вблизи краевой вершины (при $\xi = -1$) особенность меньшего порядка, чем $1/\sqrt{1+\xi}$. Основным достоинством данного метода является использование точных квадратурных формул Гаусса–Чебышева. С другой стороны, именно их использование потребовало привлечения дополнительного условия (3.13), строго обосновать которое, как отмечалось в [16], невозможно.

В [5] также использовался описанный выше приближенный метод в том случае, если решение вблизи краевой вершины трещины имело слабую особенность. В случае же ограниченности напряжений вблизи краевой вершины, осуществлялся поиск решения в виде

$$g'(\xi) = u(\xi)\sqrt{1+\xi}/\sqrt{1-\xi} \quad (3.14)$$

т.е. при $\beta = 1/2$. При этом использовались точные квадратурные формулы Гаусса – Якоби [15].

Таким образом, использовавшиеся ранее приближенные методы учета асимптотики решения вблизи краевой вершины соответствовали либо усилению особенности по отношению к реальной ее величине – (3.12) (при условии (3.13)), либо обращению в



Фиг. 2

нуль решения вблизи этой вершины – (3.14). Ниже приводятся результаты расчетов в соответствии с указанными приближенными методами и развитым в работе методом адекватного учета краевой асимптотики. На основе сравнения результатов численных расчетов различными методами и аналитического анализа соответствующих им квадратурных методик показано, что первый метод (поиск решения в виде (3.12)) завышает КИН во внутренней вершине трещины, второй же метод поиск решения в виде (3.14) занижает КИН. При этом, как отмечалось выше, изложенная квадратурная методика полностью адекватна при поиске решения в виде (3.14), в то время, как при поиске решения в соответствии с (3.12), требуется незначительная ее коррекция. Сущность ее состоит в том, что последняя точка коллокации (3.4) не используется ($\eta_n = -1$), а необходимое для замыкания алгебраической системы условие (3.13) с использованием интерполяционного полинома Лагранжа записывается в виде [19]

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k u(\xi_k) \operatorname{tg}[(2k-1)\pi/(4n)] = 0 \quad (3.15)$$

4. Алгоритм определения областей раскрытия, налегания и сцепления. Алгоритм определения областей раскрытия, налегания и сцепления поверхностей трещины основан на установленном в [21] свойстве непрерывности скачков смещений на трещине при малой вариации как нагрузки, так и областей раскрытия и взаимных сдвиговых смещений.

За начальное приближение неизвестных областей налегания и сцепления примем распределение областей $L_{st} \cup L_{sl}$ и L_{st} , определяемое из условий (1.3), в которых в качестве нормальной и касательной компонент напряжения выбираются напряжения на линии трещины в сплошной полуплоскости. После решения системы (3.7) следует на каждом шаге итерации выполнять расчет напряжений на поверхностях трещины в соответствии с (3.9). Новое положение областей определяется на основе подстановки расчетных напряжений в условия (1.3). Итерационный процесс заканчивается, когда в рамках данной дискретизации перемещение границ областей прекращается. Абсолютная погрешность определения положения границы в этом случае составляет $|\delta\xi| < 1/n$.

Данный алгоритм отыскания неизвестных границ характеризуется быстрой сходимостью итерационного процесса и приводит к построению адекватного их распределения с заданной точностью, причем вне зависимости от выбора начального прибли-

Таблица 1

	M1						M2	M3	
β	0.5	0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	0.5	-0.5
\tilde{k}_1	0.793	1.121	1.201	1.288	1.380	1.480	1.586	0.793	1.586

жения. Так, в частности, выбор в условиях (1.3) начального приближения тривиальным (нулевым) приводит к идентичным конечным результатам.

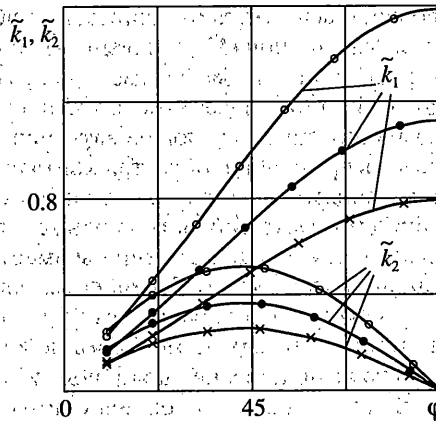
Отметим, что для адекватности расчета на каждом шаге итерации следует, используя (3.8), выполнять проверку условия $v_n^+ - v_n^- \geq 0, t_1 \in L$. Такого рода проверка позволяет корректировать в случае необходимости нефизическую ситуацию, когда на части поверхности расчет показывает, что $v_n^+ - v_n^- < 0, t_1 \in L_{wr}$ (“перехлест” поверхностей). Коррекцию такого рода ситуации следует осуществлять на основе задания L_{wr} как области контакта поверхностей на следующем шаге итерации.

5. Результаты расчета. Для выявления качественного и количественного влияния особенности в решении вблизи краевой вершины трещины на КИН во внутренней вершине рассмотрим модельную задачу, которая соответствует задаче о прямолинейной трещине длины $2l$, перпендикулярной границе полуплоскости и нагруженной на поверхностях давлением p . При этом, однако, величина показателя сингулярности решения вблизи краевой вершины искусственно меняется в пределах $-1/2 < \beta < 0$. Результаты решения такой модельной задачи (КИН $\tilde{k}_1 = k_1/p\sqrt{l}$) приведены в табл. 1 (столбец M1). Здесь же приведены результаты расчета при $\beta = -1/2$ и $\beta = 1/2$. Как видно, увеличение особенности (уменьшение показателя сингулярности) приводит к увеличению КИН во внутренней вершине. В последних двух столбцах приведены для сравнения КИН, полученные в рамках приближенных методов, описанных в п. 3. Столбец M2 соответствует методу, основанному на представлении (3.14), а КИН в столбце M3 получены в рамках метода, использующего представление (3.12) при дополнительном условии (3.13). Как видно, решения, полученные в рамках различных методов, совпадают при соответствующих показателях сингулярности. Последнее обстоятельство связано с тем, что развитая квадратурная методика является обобщением частных случаев квадратур Гаусса – Чебышева (при $\beta = -1/2$) и Гаусса – Якоби (при $\beta = 1/2$). С другой стороны, данное сравнение показало, что условие (3.13), накладываемое на решение вблизи краевой вершины, не оказывает заметного влияния на КИН во внутренней вершине.

Следует также отметить, что КИН в колонке M1 при $\beta = -1/2$ был получен с использованием специального выбора точек коллокации [19], отличного от (3.4), поскольку в этом случае $\eta_n = -1$. Этот, а также другие вопросы применения квадратурной методики, используемой в данной работе, подробно обсуждались в [19].

В дальнейшем изложении будем придерживаться выбранной терминологии, то есть КИН, полученные в рамках развитого в работе численного метода, будем называть решениями “M1”, а КИН, полученные в рамках приближенных методов, соответствующих представлениям (3.14) и (3.12), решениями “M2” и “M3” соответственно.

На фиг. 3 представлены результаты решения задачи о прямолинейной трещине длины $2l$, наклонной под углом φ к границе полуплоскости, при действии на бесконечности растягивающих усилий σ ($\sigma > 0$), параллельных границе полуплоскости. Расчет КИН $\tilde{k}_1 = k_1/\sigma\sqrt{l}$ и $\tilde{k}_2 = k_2/\sigma\sqrt{l}$ проводился по различным методам: темные точки со-



Фиг. 3

ответствуют решению $M1$, косые кресты – решению $M2$, светлые точки – решению $M3$. Анализ приведенных результатов позволяет сделать следующий вывод: КИН, полученные в соответствии с используемой в данной работе методикой ($M1$), в $\sqrt{2}$ раз больше КИН решения $M2$, и напротив, в $\sqrt{2}$ раз меньше КИН решения $M3$. Аналогичный вывод можно сделать и из данных табл. 1. Причина таких отношений между КИН заключается в следующем. Рассмотрим веса (3.5) квадратурных формул для различных значений β при $\xi_k \rightarrow 1$.

Итак, при $\beta = 0$ ($M1$):

$$\lim_{\xi_k \rightarrow 1} W_k = \lim_{\xi_k \rightarrow 1} 2\pi \sqrt{1 + \xi_k} / (2n + 1/2) = 2\pi \sqrt{2} / (2n + 1/2) = \sqrt{2}\pi/n + O(n^{-2}) \quad (5.1)$$

при $\beta = 1/2$ ($M2$):

$$\lim_{\xi_k \rightarrow 1} W_k = \lim_{\xi_k \rightarrow 1} 2\pi(1 + \xi_k) / (2n + 1) = 4\pi / (2n + 1) = 2\pi/n + O(n^{-2}) \quad (5.2)$$

при $\beta = -1/2$ ($M3$):

$$W_k = \pi/n \quad (5.3)$$

Предел $\xi_k \rightarrow 1$ соответствует внутренней вершине трещины, т.е: коэффициенты перед неизвестными в уравнениях с точностью до постоянных множителей, определяемых формой трещины $\omega(\xi)$ и параметрами γ ; z_1^0 и n , стремятся к $\sqrt{2}$ ($M1$), 2 ($M2$) и 1 ($M3$) соответственно. Следовательно, сами неизвестные $u(\xi_k)$ при заданной правой части с точностью до постоянного множителя стремятся к $1/\sqrt{2}$ ($M1$), $1/2$ ($M2$) и 1 ($M3$). Отмеченная закономерность в отношении решений, полученных различными методами, наблюдается вследствие того, что КИН во внутренней вершине трещины определяется величиной $u(1)$ (см. (3.11)). При этом следует еще раз подчеркнуть, что уравнение (3.15), соответствующее условию (3.13), не оказывает заметного влияния на $u(1)$ (как следствие, и на КИН).

Таким образом, на основе изложенного (не совсем строгого) рассуждения можно заключить, что решения, полученные на основе приближенных методов, использовав-

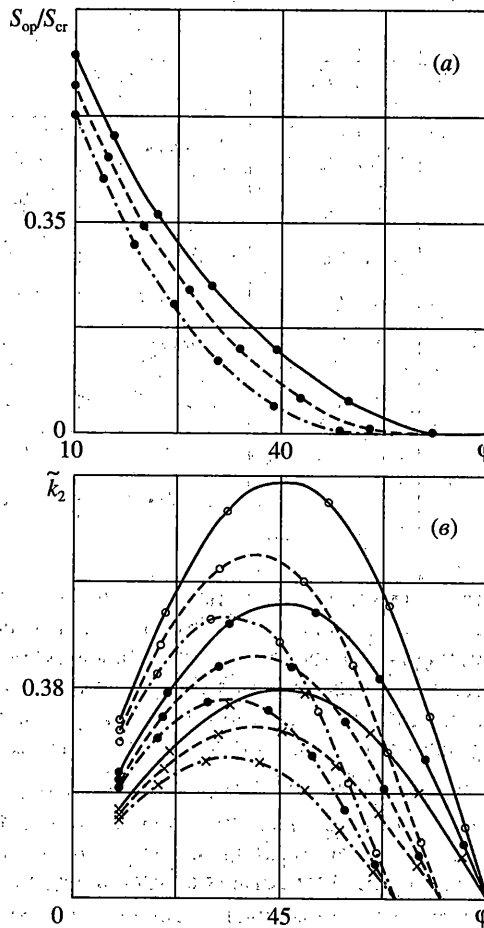
шихся ранее для моделирования асимптотики напряжений вблизи краевой вершины трещины (см. п. 3), являются заниженной ($M2$) и завышенной ($M3$) оценками КИН.

Такая взаимосвязь между КИН, по-видимому, имеет место всегда, когда поверхности трещины не контактируют. Если же поверхности трещины приходят в контакт, то теоретически возможно возникновение следующей ситуации. Предположим, что имеется качественное отличие в распределении областей контакта при расчете различными методами. Это означает, например, что расчет одним из методов показывает, что вблизи внутренней вершины образуется область скольжения, из расчета же другим методом следует, что вблизи данной вершины трещины имеет место раскрытие ее поверхностей. В такой ситуации, поскольку коэффициенты перед неизвестными будут определяться в том числе и величиной коэффициента трения (при наличии области скольжения, см. (3.7)), описанная выше закономерность может нарушаться.

Для выявления возможности возникновения подобной ситуации рассмотрим задачу о прямолинейной трещине длины $2l$, наклоненной под углом φ к границе полуплоскости, при действии на бесконечности сжимающих усилий σ ($\sigma < 0$), параллельных границе полуплоскости. Расчет показывает, что при таких условиях нагружения вблизи внутренней вершины трещины возникает область контакта (скольжения) ее поверхностей. Зависимость длины области раскрытия вблизи краевой вершины трещины S_{op} (отнесенной к полной длине трещины S_{cr}) от угла наклона φ показана на фиг. 4, а. Расчет проводился для различных величин коэффициента трения в области скольжения: сплошные кривые соответствуют $\mu = 0$, штриховые — $\mu = 0.2$, штрихпунктирные — $\mu = 0.4$. Проведенное исследование показало, что положение области контакта, рассчитанное в соответствии с приближенными методами ($M2$ и $M3$), носит аналогичный характер. Более того, размеры области контакта весьма близки (максимальные отличия наблюдаются при $\varphi = 10^\circ$, однако и здесь они не превышают 1–5%), поэтому соответствующие зависимости не приведены на фиг. 4, а. Отметим, что расчетные значения КИН $k_2 = k_2/\sigma\sqrt{l}$, представленные на фиг. 4, в, подтверждают описанную выше закономерность, наблюдающуюся в отношении решений $M1$, $M2$ и $M3$ (маркировка кривых сохранена). Связано это с тем, что в данном случае коэффициент трения влияет на коэффициенты перед неизвестными в уравнениях единообразно (см. четвертое уравнение системы (3.7)). Таким образом, проведенный расчет дает основания полагать, что тип решения и соответствующие ему квадратуры не оказывают существенного влияния на распределение областей контакта. В то же время следует подчеркнуть, что теоретически нельзя исключить возникновение обратной ситуации, что свидетельствует в пользу использования в общем случае изложенного в работе метода.

Для выявления эффектов совместного влияния коэффициента трения и обусловленной трением слабой особенности в решении вблизи краевой вершины трещины проведем анализ данных табл. 2. В этой таблице приведены результаты расчета КИН $\tilde{k}_1 = k_1/p\sqrt{l}$ и $\tilde{k}_2 = k_2/p\sqrt{l}$ для задачи о прямолинейной трещине, перпендикулярной границе полуплоскости при действии на краю последней нормальных и касательных нагрузок (фиг. 5, $\varphi = 90^\circ$, $\tau = 0.4 p$, $c = 0.5 l$). При таких условиях нагружения вблизи краевой вершины трещины возникает область контакта поверхностей, что в предположении о наличии трения приводит к появлению слабой ($-1/2 < \beta < 0$, см. фиг. 2) особенности вблизи краевой вершины. Как следствие, решение следует искать в виде (3.1).

Как видно, с ростом коэффициента трения μ и, соответственно, с усилением особенности (уменьшением показателя сингулярности β), наблюдается немонотонный рост КИН для решения $M1$. Связано это с тем, что с увеличением коэффициента трения КИН имеют тенденцию снижаться, поскольку трение препятствует скольжению поверхностей трещины. С другой стороны, так как рост коэффициента трения увеличивает особенность, КИН благодаря этому увеличению, как отмечалось выше, возра-



Фиг. 4

стают. Противоборство этих двух тенденций и вызывает немонотонность роста КИН для рассматриваемой задачи. Для сравнения с приближенным методом, моделирующим слабую особенность (см. (3.12) и (3.13)), в табл. 2 также приведены соответствующие ему расчетные значения КИН (столбец $M3$). Как видно, расчет в соответствии с указанным приближенным методом приводит лишь к слабому монотонному уменьшению КИН k_2 , а КИН k_1 не изменяются. Кроме того, в последнем столбце M_0 табл. 2 приведены расчетные значения, соответствующие поиску решения в виде (3.1) при $\beta = 0$ (без учета слабой особенности). Они позволяют выявить, насколько отклоняется КИН от решения, соответствующего ограничению напряжений вблизи краевой вершины, при появлении в этой вершине слабой особенности.

В целях обобщения закономерности отношения КИН, полученных разными методами, вычислим предел

$$\lim_{\xi_k \rightarrow 1} W_k = \lim_{\xi_k \rightarrow 1} \frac{2\pi}{2n + \beta + 1/2} (1 + \xi_k)^{\beta + 1/2} = \frac{2\pi}{2n + \beta + 1/2} 2^{\beta + 1/2} = 2^{\beta + 1/2} \frac{\pi}{n} + O(n^{-2}) \quad (5.4)$$

Следуя описанной выше логике, заключаем, что в данном случае КИН, соответствующий решению $M1$, в $2^{\beta - 1/2}$ раз меньше, нежели КИН решения $M3$, и в $2^{-\beta}$ раз

Таблица 2

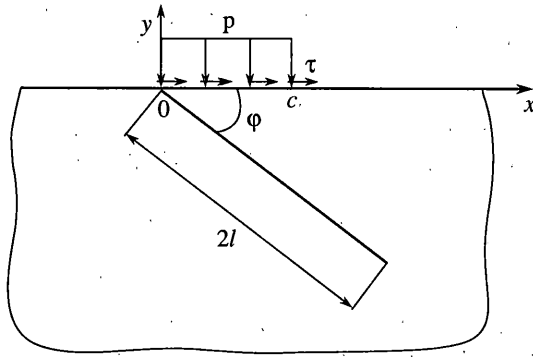
μ	β	КИН	M_1	M_2	M_0
0	0	\tilde{k}_1	0.0030	0.00429	0.0030
		\tilde{k}_2	0.1203	0.1702	0.1203
0.2	-0.2043	\tilde{k}_1	0.00349	0.00429	0.0030
		\tilde{k}_2	0.13145	0.16140	0.1141
0.4	-0.3589	\tilde{k}_1	0.0039	0.00429	0.0030
		\tilde{k}_2	0.1384	0.15259	0.1078
0.6	-0.4909	\tilde{k}_1	0.00426	0.00429	0.0030
		\tilde{k}_2	0.14384	0.14378	0.10167

больше, чем КИН, соответствующий решению M_0 . Действительно, сравнивая данные табл. 2, обнаружим, что описанная выше закономерность взаимосвязи КИН, полученных на основе разных методов, соответствующим образом обобщается на случай задачи о трещине, имеющей слабую особенность в краевой вершине.

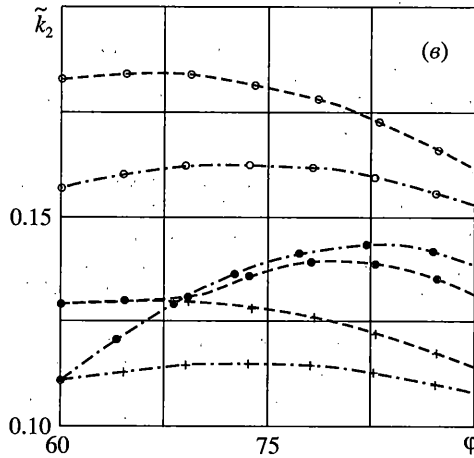
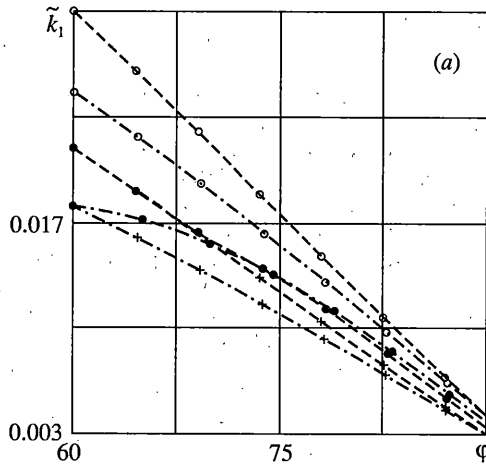
В заключение рассмотрим имеющую важное практическое значение задачу, моделирующую предельное равновесие трещин в контактирующих телах (фиг. 5). На фиг. 6 приведены результаты расчета КИН $\tilde{k}_1 = k_1/p\sqrt{l}$ (фиг. 6, а) и $\tilde{k}_2 = k_2/p\sqrt{l}$ (фиг. 6, в) для задачи о прямолинейной трещине, наклоненной под углом φ ($60^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$) к границе полуплоскости, при действии на краю последней нормальных p и касательных $\tau = 0.4 p$ нагрузок на участке $c = 0.5l$ (прямые кресты соответствуют решению M_0 , прочая маркировка сохранена). При таких условиях нагружения вблизи краевой вершины трещины также возникает область контакта поверхностей, что в предположении о наличии трения приводит к появлению слабой особенности в определенном диапазоне углов (см. фиг. 2), поскольку режим скольжения поверхностей трещины этому соответствует. Отметим, что в данной задаче также наблюдается качественное совпадение и незначительное количественное отличие (не более 10%) в распределении областей контакта, полученных на основе использования различных методов [19]. Как следствие, остается в силе описанная выше взаимосвязь между КИН, что подтверждается расчетными зависимостями, приведенными на фиг. 6.

Таким образом, результаты решения данной задачи позволяют оценить погрешность КИН при моделировании краевой особенности с помощью приближенного метода, основанного на поиске решения в виде (3.12) при дополнительном условии (3.13), который использовался в [1, 5, 6, 9, 10]. Очевидно, что ряд результатов, полученных в указанных работах, требует пересмотра и уточнения. Существенно, что наиболее значительное (в $\sqrt{2}$ раз) отличие в КИН, полученных с помощью развитого в работе корректного метода учета краевой асимптотики и с помощью приближенных методов, имеет место для "мелких" трещин ($0 < \varphi \leq 60^\circ$), т.е. в случае, когда решение вблизи краевой вершины ограничено. Подчеркнем, что такие трещины наиболее опасны, например, с точки зрения долговечности поверхности качения.

Таким образом, разработанные методы решения краевых задач о трещинах со взаимодействующими поверхностями совместно с изложенной в работе методикой чис-



Фиг. 5



Фиг. 6

ленного решения СИУ с произвольными (интегрируемыми) вещественными особенностями дают возможность корректно исследовать предельное равновесие краевых трещин в двумерных упругих телах.

Выражаю глубокую признательность Р.В. Гольдштейну за проявленное к работе внимание. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 00-15-96066) и Президента РФ (гранты МК-878.2003.01 и НШ-1849.2003.01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
2. Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Равновесие криволинейных разрезов с учетом образования областей налегания, скольжения и сцепления берегов трещины // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 137–148.
3. Tamuzs V., Petrova V., Romalis N. Plane problem of macro-microcrack interaction taking account of crack closure // Eng. Fract. mech. 1996. V. 55. № 6. P. 957–967.
4. Comninou M., Chang F.-K. Effects of closure and friction on a radial crack emanating from a circular hole // Intern. J. Fracture. 1985. V. 28. № 1. P. 29–36.
5. Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Расчет предельного равновесия внутренних и краевых трещин со взаимодействующими поверхностями в упругой полуплоскости. М.: ИПМ РАН. Препринт № 692. 2001. 58 с.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
7. Zang W., Gudmundson P. An integral equation method for piece-wise smooth cracks in an elastic half-plane // Eng. Fract. Mech. 1989. V. 32. № 6. P. 889–897.
8. Noda N.-A., Yagishita M., Kihara T. Effect of crack shape, inclination angle, and friction coefficient in crack surface contact problem // Intern. J. Fracture. 2000. V. 105. № 4. P. 367–389.
9. Дацьшин А.П., Марченко Г.П., Панасюк В.В. К теории развития трещин при контакте качения // Физико-химическая механика материалов. 1993. Т. 29. № 4. С. 49–61.
10. Datsyshyn O.P., Panasyuk V.V. Durability and fracture calculation model of solids under their contact interaction // Proc. 11th Biennial Europ. Conf. Fracture. France. 1996. V. 2. P. 1381–1386.
11. Zang W., Gudmundson P. Frictional contact problems of kinked cracks modeled by a boundary integral method // Intern. J. Numer. Meth. in Eng. 1991. V. 31. № 3. P. 427–446.
12. Panasyuk V.V., Datsyshyn O.P., Marchenko H.P. Stress state of a half-plane with cracks under rigid punch action // Intern. J. Fracture. 2000. V. 101. № 4. P. 347–363.
13. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
14. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
15. Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook N.S. The numerical solutions of singular integral equations // Mechanics of Fracture. Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973. V. 1. P. 368–425.
16. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999. 382 с.
17. Chawla M.M., Ramacrishnan T.R. Modified Gauss – Jacobi quadrature formulas for the numerical evaluation of Cauchy type singular integrals // ВІТ. 1974. V. 14. № 1. P. 14–21.
18. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 304 с.
19. Андреев А.В. Расчет предельного равновесия краевых криволинейных трещин в упругой полуплоскости с учетом особенностей напряжений. М.: ИПМ РАН. Препринт № 730. Москва. 2003. 46 с.
20. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
21. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Анализ процесса скольжения поверхностей трещины с учетом сил трения при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 139–148.