МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2003

УДК 539.375

© 2003 г. И.М. ДУНАЕВ, В.И. ДУНАЕВ

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ РАЗРУШЕНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

На основе термодинамики термоупругого деформирования предложено энергетическое условие типа Гриффитса для хрупкого разрушения твердых тел при однократном нагружении. Приведен анализ предложенного условия при плоском напряженном (деформированном) состоянии для двух известных моделей изолированного дефекта. В первой модели на внешней (удаленной) поверхности тела с дефектом заданы напряжения такие же, как в таком же теле без дефекта. Во второй модели на внешней поверхности тела с дефектом заданы перемещения, соответствующие приложенной нагрузке к телу, но до того, как образовался дефект (трещина). На поверхности дефекта в обеих моделях напряжения равны нулю. Показано, что первая модель в изотермическом случае деформирования приводит к условию Гриффитса, откуда следуют одинаковые по абсолютной величине критические напряжения при растяжении и сжатии, что противоречит экспериментальным данным. Вторая модель соответствует энергетическому условию типа Гриффитса, из которого при дополнительных предположениях относительно формы дефекта, из условий изотропии и выпуклости получена кривая разрушения (макроскопический критерий разрушения) в виде эллипса в пространстве главных напряжений и определена ориентация трещины. Коэффициенты кривой разрушения явно зависят от упругих постоянных, температуры, линейного коэффициента теплового расширения и размеров трещины.

1. Введение. А. Гриффитс [1, 2] предложил энергетическое условие:

$$dU_p + \gamma d\Sigma = dA \tag{1.1}$$

для определения связи между критическими (разрушающими) нагрузками и критическими размерами дефекта (трещины) при однократном нагружении твердых тел. В условии (1.1) введены обозначения: $U_p = U_p^{(0)} - U_p^{(1)}$ – изменение потенциальной энергии, вызванное образованием дефекта; $U_p^{(0)}$ и $U_p^{(1)}$ – потенциальные энергии тела без дефекта и с дефектом, соответственно; γ – работа, необходимая для образования единицы площади поверхности дефекта Σ; A – изменение работы внешних сил при образовании дефекта. Гриффитс предположил также, что $\gamma = \text{const}$ представляет некоторый физический параметр материала, и его величина в случае хрупкого разрушения равна поверхностному натяжению материала, аналогично поверхностному натяжению жидкости. Условие (1.1) для задач о разрушении материала при одноосном и двухосном растяжении (сжатии) пластинки с дефектом приводит к независящим от температуры и одинаковым по абсолютной величине критическим (разрушающим) напряжениям, что противоречит экспериментальным данным практически для всех известных материалов. Для определения разрушающей нагрузки при сжатии Гриффитс [2, 3] рассмотрел задачу о двухосном сжатии главными напряжениями упругой плоскости, ослабленной эллиптической полостью, большая ось которой составляет некоторый угол с направлением одного из главных напряжений. При решении этой задачи Гриффитс предположил: реальный дефект представляется в виде "узкого" эллипса с соотношением полуосей значительно меньшим единицы; разрушение при сжатии происходит в точке на контуре дефекта, там, где нормальное растягивающее напряжение, направленное вдоль контура эллипса, достигает критического значения при растяжении (гипотеза нормального отрыва). После вычислений Гриффитс получил соотношение между критическими напряжениями при сжатии и растяжении равное по абсолютной величине восьми для всех материалов, что также, в общем случае, противоречит экспериментам. Многочисленные исследования и обобщения качественно не изменили результаты, которые следуют из условия (1.1) и работ [1–3]. В настоящем сообщении, исходя из законов термодинамики для термоупругого деформирования твердых тел сформулировано необходимое энергетическое условие разрушения при образовании в теле дефекта критических размеров. На основе анализа этого условия для двух известных моделей тела с дефектом показано, что одна из моделей приводит к энергетическому условию разрушения типа Гриффитса, которое, в отличие от условия (1.1), содержит приращение энтропийной составляющей внутренней энергии, отличное, в общем случае, от нуля. Другая модель тела с дефектом приводит к термодинамически неполному (приращение энтропийной составляющей внутренней энергии равно нулю) условию (1.1) и, следовательно, к физически необоснованным и экспериментально неподтвержденным результатам. Энергетическое условие типа Гриффитса использовано для вывода макроскопического критерия хрупкого разрушения изотропных материалов при произвольном плоском напряженном (деформированном) состоянии.

2. Термодинамическая формулировка энергетического условия разрушения. Введем в рассмотрение [4] удельную свободную энергию $\psi = \psi(\varepsilon_{ij}, T)$:

$$\psi = u - \eta T \tag{2.1}$$

Здесь u – удельная внутренняя энергия, η – удельная энтропия, T – абсолютная температура, компоненты тензора деформации равны

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

где u_i – компоненты вектора перемещения, x_i – декартовы координаты точек тела. Для линейно термоупругих изотропных тел свободная энергия может быть представлена в виде [4]:

$$\psi = \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}\theta^2 - 3\alpha_0 K_0 \theta(T - T_0) - c_\varepsilon\left[T\ln\frac{T}{T_0} - (T - T_0)\right] \tag{2.3}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad K_0 = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{2.4}$$

где по повторяющимся индексам i, j производится суммирование, $\theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$ – первый инвариант тензора деформации, δ_{ij} – символ Кронекера, α_0 – линейный коэффициент теплового расширения, c_ε – удельная теплоемкость при постоянной деформации, μ и λ – константы Ляме, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона. Используя основоположающие соотношения $\sigma_{ij} = \partial\psi/\partial\varepsilon_{ij}$, $\eta = -\partial\psi/\partial T$ и выражения (2.1), (2.3), получаем при $(T - T_0)/T_0 \ll 1$:

$$u = \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\lambda\theta^2 + 3\alpha_0 K_0 T_0\theta + c_\varepsilon(T - T_0) \tag{2.5}$$

$$\eta = 3\alpha_0 K_0\theta + c_\varepsilon\ln(T/T_0) \approx 3\alpha_0 K_0\theta + c_\varepsilon(T - T_0)/T_0 \tag{2.6}$$

Обобщенный закон Гука с учетом температуры запишется так:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij} - 3\alpha_0 K_0(T - T_0) \tag{2.7}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжения. Рассмотрим линейно термоупругое тело, которое под действием внешних сил (перемещений), заданных на поверхности и стационарного температурного поля, находится в состоянии статического равновесия до и после образования в нем дефекта (трещины). Учитывая выражения (2.1)–(2.7), введем соответствующие обозначения: $u^{(0)}$, $\eta^{(0)}$, $\psi^{(0)}$, $\varepsilon_{ij}^{(0)}$, $\sigma_{ij}^{(0)}$, $u_i^{(0)}$, $T^{(0)}$, V_0 – объем, S_0 – площадь поверхности для тела без дефекта, $u^{(1)}$, $\eta^{(1)}$, $\psi^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$, $T^{(1)}$, V_1 – объем, $S_1 = S_0 + \Sigma$ – площадь поверхности для тела с дефектом, Σ – площадь поверхности дефекта. Используя интегральную форму первого и второго законов термодинамики [5], запишем энергетические условия перехода тела из состояния равновесия без дефекта в состояние равновесия с дефектом

$$dU + dU^* = dA \tag{2.8}$$

$$dS + dS^* = 0 \tag{2.9}$$

$$U = U^{(0)} - U^{(1)}, \quad U^{(q)} = \int\limits_{V_q} u^{(q)}dV, \quad S = S^{(0)} - S^{(1)}, \quad S^{(q)} = \int\limits_{V_q} \eta^{(q)}dV$$

$$U^* = \int\limits_{\Sigma} u^* ds, \quad S^* = \int\limits_{\Sigma} \eta^* ds \quad (q = 0, 1) \tag{2.10}$$

где $A = A^{(0)} - A^{(1)}$ – работа внешних сил, u^* – удельная внутренняя энергия, η^* – удельная энтропия образования единицы площади поверхности дефекта Σ. При исследовании статического равновесия дефекта (трещины) в выражениях (2.8), (2.9) вместо дифференцирования по времени производим дифференцирование по представительному размеру дефекта или длине трещины. При допустимых ограничениях на свойства поверхности дефекта Σ [6] первый поверхностный интеграл в соотношениях (2.10) можно свести к обыкновенному двойному интегралу и на основании обобщенной теоремы о среднем получить выражение

$$U^* = \int\limits_{\Sigma} u^*(x_1, x_2, x_3)ds = \gamma\Sigma = N\gamma_0\Sigma \tag{2.11}$$

Здесь γ_0 – величина удельной энергии разрыва связей, отнесенная к единице поверхности, приходящейся на одну связь, N – эффективное число разорванных связей, необходимое для образования дефекта. Число N может значительно превышать число разорванных связей на единицу поверхности дефекта при их плотной упаковке, за счет тех связей, которые "подготовили" образование дефекта. Тождественно удовлетворяя второму закону (2.9) термодинамики при $S^* = -S$ и учитывая выражения (2.8), (2.11), получим необходимое энергетическое условие статического равновесия при образовании дефекта

$$dU + \gamma d\Sigma = dA \tag{2.12}$$

где U определено соотношениями (2.5), (2.10). Условие (2.12) должно быть дополнено геометрической и математической моделями дефекта, а также условием, определяющим относительное положение дефекта. Полагая в выражении (2.12) энтропийную составляющую (2.10) внутренней энергии (2.5) равной нулю, при $T^{(0)} = T^{(1)} = T_0$, получим критерий Гриффитса (1.1). В этом случае, постоянная γ равна удельной работе внутренних напряжений, затраченной на разрыв связей, и образование дефекта в теле, в общем случае, происходит без изменения его энтропии.

3. Энергетическое условие разрушения для двух моделей изолированного дефекта. Рассмотрим подробнее [7] энергетическое условие (2.12) при плоском напряженном (деформированном) состоянии в изотермических условиях $T^{(0)} = T^{(1)} = T_0$, для двух известных моделей [8] изолированного дефекта. В модели (A) на внешней поверхности тела S_0 до и после образования дефекта заданы одни и те же напряжения, а на поверхности дефекта Σ напряжения равны нулю. В этой модели внешние силы совершают работу на внешней поверхности S_0 на перемещениях, вызванных образованием дефекта. В модели (B) на внешней поверхности тела S_0 до и после образования дефекта зафиксированы перемещения, которые соответствуют приложенной нагрузке, но до того, как образовался дефект. На поверхности дефекта Σ в модели (B) напряжения также равны нулю. Работа внешних сил на внешней поверхности тела S_0 при образовании дефекта $dA = 0$, так как перемещения фиксированы. Интегралы внутренней энергии (2.10) с учетом (2.5)–(2.7) при $T^{(0)} = T^{(1)} = T_0$ перепишем в виде

$$U = U^{(0)} - U^{(1)} = (U_p^{(0)} - U_p^{(1)}) + T_0(S^{(0)} - S^{(1)}) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{V_0} \sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(0)}dV - \int\limits_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(1)}dV\right) + \\ + \alpha_0 T_0 k_1\left(\int\limits_{V_0} \varepsilon_{ij}^{(0)}\delta_{ij}dV - \int\limits_{V_1} \varepsilon_{ij}^{(1)}\delta_{ij}dV\right) \quad (i, j = 1, 2) \tag{3.1}$$

где $U_p = U_p^{(0)} - U_p^{(0)}$ и $S = S^{(0)} - S^{(1)}$ – приращение потенциальной энергии и приращение энтропийной составляющей внутренней энергии соответственно, $k_1 = E/(1 - \nu)$ – для плоского напряженного состояния, $k_1 = E/(1 - 2\nu)$ – для плоской деформации. Проведем вычисление приращения полной энергии

$$W = U - A + \gamma\Sigma \tag{3.2}$$

для модели (A). Используя соотношения (3.1), (2.7), теорему взаимности [4]:

$$\sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(0)} \tag{3.3}$$

и выражения для напряжений через F – функцию напряжений Эри

$$\sigma_{11}^{(q)} = \frac{\partial^2 F^{(q)}}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22}^{(q)} = \frac{\partial^2 F^{(q)}}{\partial x_1^2} \quad (q = 0, 1)$$

с учетом работы внешних сил $A = \oint_{S_0} \sigma_{ij}^{(0)} (u_i^{(0)} - u^{(1)_i})n_j ds$, получаем

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_{V_1} (\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)})(\varepsilon_{ij}^{(0)} - \varepsilon_{ij}^{(1)})dV + \frac{1}{2}\int\limits_{V} \sigma_{ij}^{(0)}\varepsilon_{ij}^{(0)}dV - \oint\limits_{S_0} \sigma_{ij}^{(0)}(u_i^{(0)} - u_i^{(1)})n_j ds + \\ + \alpha_0 T_0 \chi\left[\int\limits_{V_0}\left(\frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F^{(0)}}{\partial x_2^2}\right)dV - \int\limits_{V_1}\left(\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x_2^2}\right)dV\right] + \gamma\Sigma \tag{3.4}$$

Здесь $V = V_0 - V_1$, $\chi = 1$ и $\chi = 1 + \nu$ для плоского напряженного состояния и плоской деформации соответственно, n_j – направляющие косинусы внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе тела. Для дальнейших преобразований выражения (3.4) используем [4] представление первых производных функций Эри на границах S_0 и $S_0 + \Sigma$:

$$F_{x_1}^{(q)}(s) = \frac{\partial F^{(q)}}{\partial x_1} = -\int_0^s \sigma_{nx_2}^{(q)}(s)ds + A_q, \quad F_{x_2}^{(q)}(s) = \frac{\partial F^{(q)}}{\partial x_2} = \int_0^s \sigma_{nx_1}^{(q)}(s)ds + B_q \tag{3.5}$$

через граничные условия в напряжениях

$$\sigma_{nx_1}^{(q)} = \sigma_{11}^{(q)} n_1 + \sigma_{12}^{(q)} n_2, \quad \sigma_{nx_2}^{(q)} = \sigma_{12}^{(q)} n_1 + \sigma_{22}^{(q)} n_2 \quad (q = 0, 1) \tag{3.6}$$

Если граница S_0 ограничивает односвязную область, то постоянные A_0 и B_0 можно положить равными нулю. Используя формулу Грина, уравнения равновесия

$$\partial\sigma_{ij}^{(0)}/\partial x_i = 0, \quad \partial\sigma_{ij}^{(1)}/\partial x_i = 0 \quad (i, j = 1, 2) \tag{3.7}$$

и соотношения (3.5)–(3.6), выражение (3.4) приведем к виду

$$\begin{gathered} W = \frac{1}{2}\oint_{S_0+\Sigma} (\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)})(u_i^{(0)} - u_i^{(1)})n_j ds + \frac{1}{2}\oint_{\Sigma}\sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(0)} n_j ds - \oint_{S_0}\sigma_{ij}^{(0)}(u_i^{(0)} - u_i^{(1)})n_j ds + \\ + \alpha_0 T_0 \chi \left\{ \oint_{S_0}\left[\int_0^s (\sigma_{nx_1}^{(1)} - \sigma_{nx_1}^{(0)})ds\right]dx_1 \left[\int_0^s (\sigma_{nx_2}^{(1)} - \sigma_{nx_2}^{(0)})ds\right]dx_2 + \right. \\ \left. + \oint_{\Sigma}\left(\int_0^s \sigma_{nx_1}^{(1)} ds\right)dx_1 + \left(\int_0^s \sigma_{nx_2}^{(1)} ds\right)dx_2 \right\} + \gamma\Sigma \end{gathered} \tag{3.8}$$

Здесь учтено также, что

$$\oint_{\Sigma} A_q dx_1 + B_q dx_2 = 0$$

Поскольку в модели (A) граничные условия в теле с дефектом и без дефекта имеют вид:

$$\sigma_{nx_1}^{(0)} = \sigma_{nx_1}^{(1)}, \quad \sigma_{nx_2}^{(0)} = \sigma_{nx_2}^{(1)}, \quad (x_1, x_2) \in S_0; \quad \sigma_{nx_1}^{(1)} = \sigma_{nx_2}^{(1)} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Sigma \tag{3.9}$$

то последние два интеграла в выражении (3.8) и, следовательно, энтропийная составляющая внутренней энергии (3.1) равна нулю. Тогда, с учетом граничных условий (3.9), получим окончательно

$$W = -\frac{1}{2}\oint_{\Sigma}\sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(1)} n_j ds + \gamma\Sigma \tag{3.10}$$

Подставляя выражение (3.10) в энергетическое условие (2.12), получаем критерий Гриффитса (1.1) в следующей форме:

$$\frac{1}{2}d\left(\oint_{\Sigma}\sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(1)} n_j ds\right) + \gamma d\Sigma = 0 \tag{3.11}$$

Проведем вычисление приращения полной энергии (3.2) для модели (B). В этом случае работа внешних сил $dA = 0$. Используя соотношения (3.1), (3.3), формулу Грина и уравнения (3.7), для выражения (3.2) получаем

$$W = U + \gamma\Sigma = \frac{1}{2} \oint\limits_{S_0+\Sigma} (\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)})(u_i^{(0)} - u_i^{(1)}) n_j ds + \frac{1}{2}\oint\limits_{\Sigma} \sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(0)} n_j ds +$$
$$+ \alpha_0 T_0 k_1 \left[\oint\limits_{S_0+\Sigma} (u_i^{(0)} - u_i^{(1)}) \delta_{ij} n_j ds + \oint\limits_{\Sigma} u_i^{(0)} \delta_{ij} n_j ds \right] + \gamma\Sigma \qquad (3.12)$$

Для модели (B) на границе S_0 тела с дефектом и без дефекта

$$u_i^{(0)} = u_i^{(1)}, \quad (x_1, x_2) \in S_0 \qquad (3.13)$$

а на границе дефекта

$$\sigma_{nx_1}^{(1)} = \sigma_{nx_2}^{(1)} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Sigma \qquad (3.14)$$

Тогда, с учетом граничных условий (3.13), (3.14), (3.6) выражение (3.12) приведем к виду

$$W = U + \gamma\Sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Sigma} \sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(1)} n_j ds + \alpha_0 T_0 k_1 \oint\limits_{\Sigma} u_i^{(1)} \delta_{ij} n_j ds + \gamma\Sigma \qquad (3.15)$$

Подставляя выражение (3.15) в энергетическое условие (2.12) получаем

$$d\left(\frac{1}{2}\oint\limits_{\Sigma} \sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(1)} n_j ds + \alpha_0 T_0 k_1 \oint\limits_{\Sigma} u_i^{(1)} \delta_{ij} n_j ds \right) + \gamma d\Sigma = 0 \qquad (3.16)$$

Следовательно, модель дефекта (B) приводит к условию (3.16), в котором приращение энтропийной составляющей внутренней энергии в общем случае не равно нулю, что является главным существенным отличием предложенного условия от условия (3.11).

4. Тестовая задача. Рассмотрим задачу определения критических нагрузок и критических размеров дефекта круглой формы радиусом a при растяжении (сжатии) круглой пластины радиусом b под действием осесимметричной нагрузки P в случае плоского напряженного состояния. Решение задачи теории упругости имеет вид

$$u_1^{(0)} = P(1-\nu)r/E, \quad u_2^{(0)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(0)} = \sigma_r^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)} = \sigma_\vartheta^{(0)} = P, \quad \sigma_{12}^{(0)} = \sigma_{r\vartheta}^{(0)} = 0$$
$$u_1^{(1)} = C_1 r + C_2/r, \quad u_2^{(1)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{r\vartheta}^{(1)} = 0 \qquad (4.1)$$
$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_r^{(1)} = \frac{E}{1-\nu} C_1 - \frac{E}{(1-\nu)r^2} C_2, \quad \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_\vartheta^{(1)} = \frac{E}{1-\nu} C_1 + \frac{E}{(1-\nu)r^2} C_2$$

где r, ϑ – полярные координаты точек тела, C_1, C_2 – постоянные интегрирования, которые находим из граничных условий в моделях (A) и (B). Для модели (A), используя граничные условия при $r = a$, $\sigma_{11}^{(1)} = 0$, и $r = b$, $\sigma_{11}^{(1)} = P$ и решения (4.1) находим

$$C_1(A) = \frac{P(1-\nu)}{E} \frac{1}{(1 - a^2/b^2)}, \quad C_2(A) = \frac{P(1+\nu)}{E} \frac{a^2}{(1 - a^2/b^2)} \qquad (4.2)$$

Подставляя решение (4.1), (4.2) при $n_1 = -1$, $n_2 = 0$, $\Sigma = 2\pi a$, в выражение (3.10) после интегрирования вычислим

$$W = -2\pi E^{-1}(1 - a^2/b^2)^{-1}P^2a^2 + 2\pi\gamma a$$

Тогда, из условия Гриффитса (3.11) находим одинаковые по абсолютной величине критические напряжения при растяжении P^+ и сжатии P^-:

$$P^{\pm} = \pm\sqrt{\gamma E(1 - a^2/b^2)^2/(2a)} \tag{4.3}$$

что качественно и количественно не соответствует экспериментальным данным. Для модели (B), используя граничные условия при $r = a$, $\sigma_{11}^{(1)} = 0$, и при $r = b$, $u_1^{(1)} = u_1^{(0)}$, а также решения (4.1) находим

$$C_1(B) = \left(1 + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}\frac{P(1-\nu)}{E}, \quad C_2(B) = \left(1 + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}\frac{P(1+\nu)a^2}{E} \tag{4.4}$$

Подставляя решение (4.1), (4.4) в выражение (3.15), вычисляем

$$W = -2\pi a^2(P^2 + 2\alpha_0T_0k_1P)\left(1 + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}E^{-1} + 2\pi a\gamma$$

Дифференцируя это выражение по a, из условия (3.16) получаем уравнение

$$P^2 + 2\alpha_0T_0k_1P - \frac{\gamma E}{2a}\left(1 + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a^2}{b^2}\right)^2 = 0$$

из которого находим критические напряжения

$$P^{\pm} = -\alpha_0T_0k_1 \pm \sqrt{(\alpha_0T_0k_1)^2 + \frac{\gamma E}{2a}\left[1 + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{a^2}{b^2}\right]^2} \tag{4.5}$$

При $b \to \infty$ $C_1(A) = C_1(B)$, $C_2(A) = C_2(B)$, $u_1^{(1)}(A) = u_1^{(1)}(B)$

$$W = -\frac{2\pi a^2P^2}{E} - \frac{4\pi a^2\alpha_0T_0k_1P}{E} + 2\pi a\gamma \tag{4.6}$$

Это следует также из условия единственности решения задачи теории упругости для плоскости с круглым вырезом при заданных условиях на бесконечности [9]. В этом случае формула (4.5) принимает простой вид

$$P^{\pm} = -\alpha_0T_0k_1 \pm \sqrt{(\alpha_0T_0k_1)^2 + \gamma E/(2a)} \tag{4.7}$$

Это позволяет для вычисления интегралов энергии непосредственно использовать решение задачи теории упругости для бесконечной пластинки. Таким образом, для модели дефекта (B) энтропийная составляющая внутренней энергии не равна нулю и, вследствие этого, формулы (4.5), (4.7) дают качественно правильные значения критических напряжений при всестороннем растяжении P^+, сжатии P^- в зависимости от физико-механических постоянных материала (2.4), линейного коэффициента теплового расширения α_0, температуры T_0, размера дефекта a.

5. Комплексное представление интеграла приращения внутренней энергии. В плоских задачах теории упругости компоненты напряжений и смещений определяются двумя комплексными функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$ и их производными [9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \\ 2\mu(u_1 + iu_2) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – для плоской деформации и плоского напряженного состояния соответственно, штрих означает производную функций по z; черта сверху – комплексно-сопряженная величина. С учетом соотношений $n_1 ds = -dx_2$, $n_2 ds = dx_1$, так как внешняя нормаль к границе Σ направлена внутрь дефекта или трещины, запишем интеграл приращения внутренней энергии (3.12) в виде

$$U = \frac{1}{2}\oint_{\Sigma}(\sigma_{12}^{(0)}u_1^{(1)} + \sigma_{22}^{(0)}u_2^{(1)})dx_1 - (\sigma_{11}^{(0)}u_1^{(1)} + \sigma_{21}^{(0)}u_2^{(1)})dx_2 + \alpha_0 T_0 k_1 \oint_{\Sigma} u_2^{(1)}dx_1 - u_1^{(1)}dx_2 \tag{5.2}$$

Используя представление интеграла от функции комплексного переменного $f = u + i\nu$ через криволинейные интегралы от действительных функций [10]:

$$\oint_{\Sigma} f(z)dz = \oint_{\Sigma} u dx_1 - \nu dx_2 + i\oint_{\Sigma} \nu dx_1 + u dx_2$$

введем в интеграл (5.2) две новые функции

$$g_1(z) = (\sigma_{12}^{(0)}u_1^{(1)} + \sigma_{22}^{(0)}u_2^{(1)}) + (\sigma_{11}^{(0)}u_1^{(1)} + \sigma_{21}^{(0)}u_2^{(1)}), \quad g_2(z) = u_2^{(1)} + iu_1^{(1)}$$

После элементарных преобразований получаем

$$U = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\oint_{\Sigma} g_1(z)dz + \alpha_0 T_0 k_1 \mathrm{Re}\oint_{\Sigma} g_2(z)dz =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\oint_{\Sigma}[\sigma_{12}^{(0)}(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}) + \sigma_{22}^{(0)}u_2^{(1)} + i\sigma_{11}^{(0)}u_1^{(1)}]dz + \alpha_0 T_0 k_1 \mathrm{Re}\oint_{\Sigma}(u_2^{(1)} + iu_1^{(1)})dz$$

Подставляя в последнее выражение равенства

$$u_1^{(1)} = \frac{u_1^{(1)} + iu_2^{(1)} + \overline{(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)})}}{2}, \qquad u_2^{(1)} = \frac{u_1^{(1)} + iu_2^{(1)} - \overline{(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)})}}{2i}$$

находим окончательно [7]:

$$\begin{aligned} U = {} & \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i}\oint_{\Sigma}[(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)})(\sigma_{22}^{(0)} - \sigma_{11}^{(0)} + 2i\sigma_{12}^{(0)}) - \overline{(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)})}(\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)})]dz\right\} + \\ & + \alpha_0 T_0 k_1 \mathrm{Re}\left[i\oint_{\Sigma}\overline{(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)})}dz\right] \end{aligned} \tag{5.3}$$

Учитывая выражения (5.1), запишем интеграл (5.3) в виде

$$U = \frac{1}{4\mu}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i}\oint_{\Sigma}([\kappa\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)}][\bar{z}\varphi_0''(z) + \psi_0'(z)] - \right.$$
$$\left. - [\kappa\overline{\varphi_1(z)} - \bar{z}\varphi_1'(z) - \psi_1(z)][\varphi_0'(z) + \overline{\varphi_0'(z)}])dz\right\} + \tag{5.4}$$
$$+ \frac{\alpha_0 T_0 k_1}{2\mu}\mathrm{Re}\left\{i\oint_{\Sigma}[\kappa\overline{\varphi_1(z)} - \bar{z}\varphi_1'(z) - \psi_1(z)]dz\right\}$$

6. Макроскопический критерий хрупкого разрушения. Рассмотрим задачу о разрушении пластинки [7] при образовании дефекта, имеющего сечение в виде эллипса с полуосями a, b, $a \geq b$ под действием главных растягивающих и (или) сжимающих напряжений P_1, P_2, причем направление действия напряжения P_1 составляет угол $\alpha = \alpha(a)$ с осью x_1O, а направление действия напряжения P_2 с осью x_1O, составляет угол равный $\alpha + \pi/2$. Для случая плоскости [9] при однородном напряженно-деформированном состоянии

$$\varphi_0(z) = \frac{P_1 + P_2}{4}z, \quad \psi_0(z) = -\frac{P_1 - P_2}{4}ze^{-2i\alpha} \tag{6.1}$$

а граничное условие на контуре эллипса при $z \to t \in \Sigma$ имеет вид

$$\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = 0 \tag{6.2}$$

или, соответствующее выражение в комплексно-сопряженной форме,

$$\overline{\varphi_1(z)} + \bar{z}\varphi_1'(\bar{z}) + \psi_1(z) = 0 \tag{6.3}$$

Подставляя выражения (6.1), (6.2), (6.3) в интеграл (5.4) после элементарных преобразований получаем

$$U = \frac{\kappa+1}{8\mu}\mathrm{Re}\left\{i\oint_{\Sigma}[\overline{\varphi_1(z)}(P_1 + P_2) + \varphi_1(z)(P_1 - P_2)e^{-2i\alpha}]dz\right\} +$$
$$+ \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\kappa+1)}{2\mu}\mathrm{Re}\left[i\oint_{\Sigma}\overline{\varphi_1(z)}dz\right] \tag{6.4}$$

Введем функцию

$$z = \omega(\xi) = c\left(\xi + \frac{m}{\xi}\right), \quad c = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} \tag{6.5}$$

которая отображает рассматриваемую плоскость с эллиптическим отверстием на бесконечную плоскость $|\xi| > 1$ с круглым отверстием. Переходя в интеграле (6.4) к переменной ξ по формуле (6.5) получаем

$$U = \frac{\kappa+1}{8\mu}\mathrm{Re}\left\{i\oint_{|\xi|=1}[\overline{\varphi_1(\xi)}(P_1 + P_2) + \varphi_1(\xi)(P_1 - P_2)e^{-2i\alpha}]\omega'(\xi)d\xi\right\} +$$
$$+ \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\kappa+1)}{2\mu}\mathrm{Re}\left[i\oint_{|\xi|=1}\overline{\varphi_1(\xi)}\omega'(\xi)d\xi\right] \tag{6.6}$$

Используя решение, полученное в [9], найдем функцию $\varphi_1(\xi)$, которая в случае бесконечной пластинки, для краевых задач соответствующих моделям (A) и (B), одинакова и равна

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi) &= \frac{P_1 c}{4}\left(\xi + \frac{2e^{2i\alpha} - m}{\xi}\right) + \frac{P_2 c}{4}\left(\xi - \frac{2e^{2i\alpha} + m}{\xi}\right) = \\ &= \frac{(P_1 + P_2)c}{4}\left(\xi - \frac{m}{\xi}\right) + \frac{(P_1 - P_2)c}{2}\frac{e^{2i\alpha}}{\xi}\end{aligned} \tag{6.7}$$

Учитывая, что в модели (B) $dA = 0$, а также

$$\gamma\Sigma = 4\gamma a \mathrm{E}(q), \quad \mathrm{E}(q) = \int_0^{\pi/2} (1 - q^2\sin^2\beta)^{1/2} d\beta, \quad q^2 = 1 - b^2/a^2 \tag{6.8}$$

и вычисляя интегралы (6.6) по окружности $|\xi| = 1$ при заданной функции $\varphi_1(\xi)$ (6.7) и (6.8), для приращения полной энергии (3.2), получаем выражение [7]:

$$\begin{aligned}W &= W[a, b(a), \alpha(a)] = U + \gamma\Sigma = \\ &= -\frac{(\kappa+1)\pi c^2}{4\mu}\left[\frac{(P_1+P_2)^2}{4}(1+m^2) - (P_1^2 - P_2^2)m\cos 2\alpha + \frac{(P_1-P_2)^2}{2}\right] - \\ &- \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\kappa+1)\pi c^2}{2\mu}\left[\frac{(P_1+P_2)}{2}(1+m^2) - (P_1 - P_2)m\cos 2\alpha\right] + 4\gamma a \mathrm{E}(q)\end{aligned} \tag{6.9}$$

Используя формулы (6.5), запишем выражение (6.9) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned}W &= -\frac{(\kappa+1)\pi}{16\mu}\{P_1^2[(a^2 + ab + b^2) - (a^2 - b^2)\cos 2\alpha] + \\ &+ P_2^2[(a^2 + ab + b^2) + (a^2 - b^2)\cos 2\alpha] - 2P_1P_2ab\} - \\ &- \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\kappa+1)\pi}{8\mu}\{P_1[(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)\cos 2\alpha] + \\ &+ P_2[(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)\cos 2\alpha]\} + 4\gamma a \mathrm{E}(q)\end{aligned} \tag{6.10}$$

Очевидно, что при $a = b$, $P_1 = P_2$, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, энергия (6.10) имеет вид (4.6). Подставляя приращение энергии (6.10) в необходимое условие (3.16), получаем выражение макроскопического критерия разрушения

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial a} &= -\frac{(\kappa+1)\pi a}{16\mu}\left\{P_1^2\left[\left(1 + \frac{b}{2a} + \frac{1}{2}\frac{db}{da} + \frac{b}{a}\frac{db}{da}\right) - \left(1 - \frac{b}{a}\frac{db}{da}\right)\cos 2\alpha + \right.\right. \\ &+ \left. a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\sin 2\alpha\frac{d\alpha}{da}\right] + P_2^2\left[\left(1 + \frac{b}{2a} + \frac{1}{2}\frac{db}{da} + \frac{b}{a}\frac{db}{da}\right) + \left(1 - \frac{b}{a}\frac{db}{da}\right)\cos 2\alpha - \right. \\ &- \left.\left. a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\sin 2\alpha\frac{d\alpha}{da}\right] - P_1P_2\left(\frac{b}{a} + \frac{db}{da}\right)\right\} - \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\kappa+1)\pi a}{8\mu} \times \\ &\times \left\{P_1\left[\left(1 + \frac{b}{a}\frac{db}{da}\right) - \left(1 - \frac{b}{a}\frac{db}{da}\right)\cos 2\alpha + a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\sin 2\alpha\frac{d\alpha}{da}\right] + \right. \\ &+ \left. P_2\left[\left(1 + \frac{b}{a}\frac{db}{da}\right) + \left(1 - \frac{b}{a}\frac{db}{da}\right)\cos 2\alpha - a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\sin 2\alpha\frac{d\alpha}{da}\right]\right\} + 2\gamma\frac{d}{da}[a\mathrm{E}(q)] = 0\end{aligned} \tag{6.11}$$

Для изотропных материалов в рассматриваемом случае критерий разрушения (6.11) представляет кривую второго порядка в пространстве переменных P_1, P_2, которая должна быть симметричной относительно оси $P_1 = P_2$. Это возможно при следующем условии:

$$a\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\sin 2\alpha\frac{d\alpha}{da} = \left(1-\frac{b}{a}\frac{db}{da}\right)\cos 2\alpha \tag{6.12}$$

С учетом уравнения (6.12), после элементарных преобразований, запишем критерий (6.11) в виде

$$\begin{gathered}-\frac{(\kappa+1)\pi a}{16\mu}\left(1+\frac{b}{2a}+\frac{1}{2}\frac{db}{da}+\frac{b}{a}\frac{db}{da}\right)\times \\ \times[P_1^2+P_2^2-2\nu_*P_1P_2+2\alpha_0T_0k_1(1-\nu_*)(P_1+P_2)]+2\gamma\frac{d}{d\alpha}[a\mathrm{E}(q)] = 0\end{gathered} \tag{6.13}$$

$$2\nu_* = \left(1+\frac{b}{2a}+\frac{1}{2}\frac{db}{da}+\frac{b}{a}\frac{db}{da}\right)^{-1}\left(\frac{b}{a}+\frac{db}{da}\right) \tag{6.14}$$

Для дальнейшей идентификации критерия (6.13) и условия (6.12) необходимо вычислить или предположить зависимость $b = b(a)$. В работе [11] предложена зависимость $b = b_0\sqrt{a/c_0}$, исходя из предложения, что радиус кривизны дефекта $\rho = b^2/a$, в вершинах главной оси эллипса остается постоянным $\rho = b_0^2/c_0$ при изменении длины этой оси. Тогда, по формуле (6.14) получаем

$$b/a = [3(1-\nu_*)-\sqrt{9(1-\nu_*)^2-32\nu_*^2}](4\nu_*)^{-1}$$

и, следовательно, при $\nu^* \in [0, 1/3]$ имеем $b/a \in [0, 1]$. Вводя в формулу (6.14) более общую зависимость

$$b = b_0(a/c_0)^{\varepsilon}, \quad \varepsilon \ge 0, \quad a/c_0 < 1 \tag{6.15}$$

получаем:

$$b/a = [(\varepsilon+1)(1-\nu_*)-\sqrt{(\varepsilon+1)^2(1-\nu_*)^2-16\varepsilon\nu_*^2}](4\varepsilon\nu_*)^{-1} \tag{6.16}$$

Используя естественные ограничения

$$(\varepsilon+1)^2(1-\nu_*)^2-16\varepsilon\nu_*^2 \ge 0, \quad b/a \in [0, 1] \tag{6.17}$$

и выражения (6.15), (6.16) находим, что $\nu_* \in [0, 1)$. Следовательно, для любого значения $\nu_* \in [0, 1)$ найдется такое конечное число ε_0, что при $\varepsilon \ge \varepsilon_0$ будут выполняться условия (6.17). В пределе, при $\varepsilon \to \infty$, учитывая выражения (6.16), получаем

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{b}{a} = 0, \quad b \to 0, \quad \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{db}{da} = \lim_{\varepsilon\to\infty}\varepsilon\frac{b}{a} = \frac{2\nu_*}{1-\nu_*}, \quad \lim_{\varepsilon\to\infty}\varepsilon\frac{b^2}{a^2} = 0 \\ \lim_{\varepsilon\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}+\frac{1}{2}\frac{db}{da}+\frac{b}{a}\frac{db}{da}\right) = \frac{1}{1-\nu_*}\end{gathered} \tag{6.18}$$

Подставляя выражения (6.18) в критерий (6.13), найдем

$$P_1^2+P_2^2-2\nu_*P_1P_2+2\alpha_0T_0k_1(1-\nu_*)(P_1+P_2) = \frac{32\mu(1-\nu_*)}{(\kappa+1)\pi}\frac{\gamma}{a_*} \tag{6.19}$$

где a_* – критический размер трещины. Поскольку, в соответствии с постулатами А.А. Ильюшина и Д. Друккера кривая разрушения должна быть выпукла [12] из выражения (6.19) находим, что $\nu_* \in (-1, 1)$. При этих значениях ν_* кривая (6.19) представляет собой эллипс в пространстве главных напряжений P_1, P_2. Критерий (6.19) удовлетворяет общим требованиям, сформулированным для феноменологических критериев прочности [12] и позволяет вычислить критический размер трещины a_* в зависимости от физико-механических параметров материала E, ν, α_0, γ и температуры T_0 в общем случае напряженно-деформированного состояния. Так, в случае одноосного растяжения (сжатия) при $P_1 = P$, $P_2 = 0$ из критерия (6.19) для критических напряжений при растяжении P^+ и сжатии P^- находим

$$P^{\pm} = -\alpha_0 T_0 E(1-\nu_*)k_1 \pm \sqrt{[\alpha_0 T_0 E(1-\nu_*)k_1]^2 + 32\mu(1-\nu_*)\gamma[\pi(\kappa+1)a_*]^{-1}} \quad (6.20)$$

а также соотношения

$$P^+ + P^- = -2\alpha_0 T_0 E(1-\nu_*)k_1, \quad P^+P^- = -32\mu(1-\nu_*)\gamma[\pi(\kappa+1)a_*]^{-1} \quad (6.21)$$

Первое соотношение (6.21) позволяет вычислить ν_* если известны из эксперимента P^+ и P^-, а второе дает значение γ/a_*, где $\gamma = N\gamma_0$ (2.11). Учитывая выражения (6.18), (6.12) для случая $\cos 2\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi/4$, получаем уравнение $\operatorname{tg} 2\alpha d\alpha = da/a$, из решения которого находим

$$|\cos 2\alpha| = c_0^2/a^2, \quad c_0^2/a^2 \in (0, 1] \quad (6.22)$$

Для определения произвольной постоянной в уравнении (6.22) используем условие $\alpha = \pi/2$ при $a = a_*$, $P_1 = P = P^+$, $P_2 = 0$, так как трещина в случае разрушения при одноосном растяжении (6.20) распространяется перпендикулярно направлению растягивающего напряжения. Тогда, $c_0 = a_*$ и решение (6.22) принимает вид

$$|\cos 2\alpha| = a_*^2/a^2 \quad (6.23)$$

Из уравнения (6.23) при $a = a_*$ следует также еще одно значение $\alpha = 0$. В этом случае трещина образуются вдоль действия напряжения P_1. Из уравнения (6.20), а также из физического смысла и экспериментальных данных значение $\alpha = 0$ соответствует случаю $P_1 = P^-$, $P_2 = 0$. Следовательно, при одноосном сжатии трещина критической длины a_* располагается вдоль действия сжимающего напряжения. Как следует из уравнения (6.23) при $a = a_*$ и при любых соотношениях критических напряжений, соответствующих "точкам", лежащим на кривой разрушения, трещина будет ориентирована перпендикулярно растягивающему или вдоль сжимающего напряжения. Выбор ориентации трещины в каждом конкретном случае следует из невозможности смыкания берегов трещины вследствие граничного условия (3.14) на контуре трещины. Тогда, в первом квадранте плоскости OP_1P_2 для $P_1^+ \geq 0$, $P_2^+ \leq 0$ трещина ориентирована перпендикулярно к наибольшему из этих растягивающих напряжений. Во втором квадранте $P_2^+ \geq 0$, $P_1^- \geq 0$ и трещина ориентирована перпендикулярно к направлению напряжения P_2^+. В третьем квадранте для $P_1^- \leq 0$, $P_2^- \leq 0$ трещина ориентирована вдоль наибольшего из этих сжимающих напряжений. В четвертом квадранте $P_1^+ \geq 0$, $P_2^- \leq 0$ и трещина ориентирована перпендикулярно к направлению напряжения P_1^+. При $P_1 = P_2$ в первом и третьем квадрантах ориентация трещины однозначно не определена.

7. Заключение. В работе на основе термодинамики термоупругого деформирования предложено энергетическое условие хрупкого разрушения твердых тел. Из этого условия при дополнительных ограничениях, накладываемых на физическую и математическую модель дефекта, условий изотропии и выпуклости получена кривая разрушения в виде эллипса в пространстве главных напряжений и определена ориентация трещины. Параметры кривой разрушения явно зависят от физико-механических характеристик материала, линейного коэффициента теплового расширения, температуры и размера трещины. Предложен эффективный способ вычисления интеграла внутренней энергии линейно-термоупругого тела, затраченной на образование дефекта.
Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (Р2000ЮГ-0-01-96019, Р2000ЮГ-0-01-96024).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // Philos. Trans. Roy. Soc. 1921. Ser. A 221. P. 163–198.
2. *Griffith A.A.* The theory of rupture // Proc. Inter. Congr. Appl. Mech. 1924. Delft.: J. Waltman, 1925. P. 55–63.
3. *Поль Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения / Разрушение. Т. 2./ Под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1975. С. 336–520.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд.-во МГУ, 1990. 310 с.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М.: Наука, 1969. 656 с.
7. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Об энергетическом условии разрушения твердых тел // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 1. С. 43–45.
8. *Гудьер Дж.* Математическая теория равновесных трещин. / Разрушение. Т. 2 / Под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1975. С. 71–89.
9. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
10. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 432 с.
11. *Sih G.C., Liebowitz H.* On the Griffith energy criterion for brittle fracture // Int. J. Solids Struct. 1967. V. 3. P. 1–22.
12. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. М.: Изд-во МГУ, 1975. 527 с.

Краснодар

Поступила в редакцию
6.06.2002