

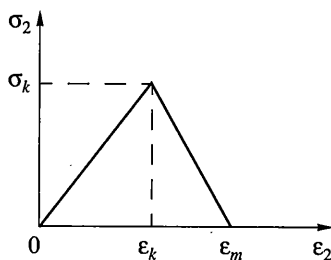
УДК 539.375

© 2003 г. В.В. ГЛАГОЛЕВ, К.А. КУЗНЕЦОВ, А.А. МАРКИН

МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА РАЗДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Предлагается вариант модели разделения материала в рамках плоской деформации, на основе которой рассматривается процесс разделения упругой плоскости расклинивающей сосредоточенной силой. Исследуются характеристики материала и их влияние на процесс разделения. Разделение рассматривается как процесс образования новых материальных поверхностей в результате механических воздействий на деформируемое тело. Предлагается вариант континуальной, согласно терминологии в [1], теории разделения, основанный на определяющем соотношении, описывающем поведение материала как на стадии устойчивого, так и неустойчивого в смысле Дракера деформирования. В отличие от подхода, развитого в [2], используется кусочно-линейная аппроксимация связи между тензорами напряжений и деформаций. В окрестности поверхности разделения выделяется слой взаимодействия, образуемый материалом, который перейдет в стадию неустойчивого деформирования. Минимальная толщина слоя взаимодействия полагается универсальной константой материала. Постулируется однородность напряженно-деформированного состояния слоя взаимодействия в направлении нормали к поверхности разделения, что позволяет избежать бесконечных значений напряжений. Распределение усилий взаимодействия между образуемыми поверхностями не вводится априорно, как это принято в работах [3–5], а получается в результате решения соответствующих краевых задач. Рассмотрена задача определения условий начала разделения бесконечного пространства с полубесконечным разрезом, расстояние между берегами которого равно толщине слоя взаимодействия. Разделение происходит в результате воздействия на берега разреза сосредоточенных, противоположно направленных усилий. Задача решается в рамках плоской деформации и сводится к системам интегральных уравнений, относительно перемещений границ слоя взаимодействия. Данные уравнения в качестве неизвестных параметров содержат критические значения расклинивающих усилий. В результате численного решения найдены критические и максимальные значения расклинивающих усилий и соответствующие им законы распределения напряжений вдоль границ слоя взаимодействия. Определено влияние параметров материала на область слоя взаимодействия, содержащую неустойчиво деформируемую среду. Предложен метод оценки толщины слоя взаимодействия по известному критическому значению коэффициента интенсивности напряжений.

1. Соотношение, определяющее связь между тензорами напряжений и деформаций в слое взаимодействия. Аппроксимируем экспериментальную диаграмму на растяжение кусочно-линейной зависимостью, показанной на фиг. 1. Здесь σ_2 – главное значение тензора истинных напряжений вдоль оси образца, ϵ_2 – главное значение тензора логарифмических удлинений (тензор Генки), σ_k – максимальное значение растягивающего напряжения (предел прочности), ϵ_k – критическое значение деформации, соот-



Фиг. 1

ветствующее σ_k , ϵ_m – максимальная деформация, соответствующая прекращению взаимодействия между частицами материала.

На отрезке $0 \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_k$ процесс деформирования устойчив, а при $\epsilon_k \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_m$ – неустойчив. Исходя из принятой аппроксимации, рассмотрим трехмерный вариант определяющих соотношений для изотропного материала, приводящий в случае растяжений к диаграмме, показанной на фиг. 1. До достижения максимальным главным значением ϵ_2 тензора деформаций критической величины $\epsilon_2 = \epsilon_k > 0$ связь между главными значениями тензоров напряжений и деформаций аппроксимируем в форме закона Гука [6]:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E_k}(\sigma_1 - \nu_k(\sigma_2 + \sigma_3)), & 0 \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_k \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E_k}(\sigma_2 - \nu_k(\sigma_1 + \sigma_3)), & \epsilon_2 > \epsilon_1 > \epsilon_k \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E_k}(\sigma_3 - \nu_k(\sigma_2 + \sigma_1)), & E_k = \frac{\sigma_k}{\epsilon_k} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где E_k – константа типа модуля Юнга, ν_k – константа типа коэффициента Пуассона.

Связь между главными значениями тензоров напряжений и деформаций при неустойчивом деформировании, когда $\epsilon_k \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_m$, представим в следующем виде:

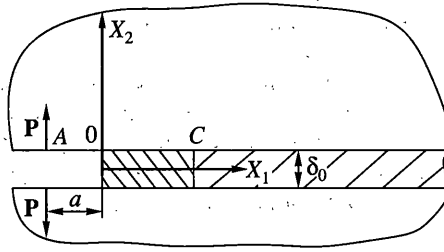
$$\begin{aligned} \epsilon'_1 &= \frac{1}{E_H}(\sigma'_1 - \nu_H(\sigma'_2 + \sigma'_3)) \\ \epsilon'_2 &= \frac{1}{E_H}(\sigma'_2 - \nu_H(\sigma'_1 + \sigma'_3)) \\ \epsilon'_3 &= \frac{1}{E_H}(\sigma'_3 - \nu_H(\sigma'_2 + \sigma'_1)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Компоненты со штрихами из (1.2) связаны с текущими главными значениями следующими формулами:

$$\sigma'_i = -\sigma_i + \sigma_i^{(k)}, \quad \epsilon'_i = \epsilon_i - \epsilon_i^{(k)} \quad (1.3)$$

где $\sigma_i^{(k)}$ и $\epsilon_i^{(k)}$ – главные значения в точке $\sigma_2 = \sigma_k$, $\epsilon_2 = \epsilon_k$. Постоянная E_H определяется из аппроксимации диаграммы растяжения. Полагая в (1.2) $\sigma'_1 = \sigma'_3 \equiv 0$, с учетом того, что при $\epsilon_2 = \epsilon_m$, $\sigma_2 = 0$, находим:

$$E_H = \sigma_k / (\epsilon_m - \epsilon_k) \quad (1.4)$$



Фиг. 2

Система уравнений (1.1)–(1.4) устанавливает связь между главными значениями тензоров напряжений и логарифмических деформаций вплоть до момента прекращения взаимодействия в частице материала. Критериями перехода из устойчивого деформирования в неустойчивое, а также прекращения взаимодействия являются значения инвариантной характеристики – главного максимального логарифмического удлинения ϵ_2 . Для конкретизации материала в рамках данных соотношений необходимы следующие константы: $\sigma_k, \nu_k, \nu_n, \epsilon_k, \epsilon_m$.

2. Напряженно-деформируемое состояние в слое взаимодействия. Рассмотрим бесконечное материальное пространство, отнесенное к декартовой системе координат $OX_1X_2X_3$. Берега начального разреза образуются полуплоскостями $-\infty < x_1 \leq 0, x_2 = \pm\delta_0/2$. На берега разреза, вдоль прямых $(x_1 = -a, x_2 = \pm\delta_0/2)$ действуют противоположно направленные сосредоточенные нагрузки с интенсивностью P на единицу длины. Ввиду симметрии внешней нагрузки полагаем, что слой взаимодействия образуется материалом, заключенным между полуплоскостями $x_1 \geq 0, x_2 = \pm\delta_0/2$ (фиг. 2). Необходимо определить момент начала разделения, которое трактуется как прекращение взаимодействия между берегами элемента материального слоя, примыкающего к окончанию разреза. Дальнейшее изменение внешней нагрузки, например ее движение вдоль берегов разреза, приводит к образованию новых материальных поверхностей. Из условия однородности напряжений в слое взаимодействия по координате x_2 и симметрии задачи относительно плоскости $x_2 = 0$ получим следующие выражения компонент тензора напряжений внутри слоя:

$$\sigma_{11} = \sigma_1(x_1), \quad \sigma_{ij} \equiv 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_2(x_1), \quad \sigma_{33} = \sigma_3(x_1) \quad (2.1)$$

Напряженное состояние в слое будет равновесным, если выполняется условие

$$d\sigma_1/dx_1 = 0 \quad (2.2)$$

На левой границе слоя взаимодействия $x_1 = 0$ потребуем выполнения условия $\sigma_1 = 0$, в соответствии с которым из (2.2) следует, что в слое взаимодействия

$$\sigma_1 \equiv 0 \quad (2.3)$$

Полагаем деформацию плоской, тогда $\epsilon_3 = 0$ и определяющие соотношения (1.1)–(1.3) с учетом условия (2.3) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= E_+ \epsilon_2, \quad 0 \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_k \\ \sigma_2 &= E_- (\epsilon_m - \epsilon_2), \quad \epsilon_k \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_m \\ E_+ &= E_k / (1 - \nu_k^2), \quad E_- = E_n / (1 - \nu_n^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

На этапе послекритического деформирования в слое взаимодействия выделяется участок OC , где деформация ϵ_2 превышает критическую. Положение точки C опреде-

ляется из условия $\varepsilon_2(OC) = \varepsilon_k$. Материал слоя длиной OC находится в состоянии разупрочнения.

При дальнейшем изложении воспользуемся геометрически линейным приближением, для чего положим деформации в слое взаимодействия малыми, линейно связанными с перемещениями. Отсюда в силу однородности деформированного состояния в слое по координате x_2 получим следующее выражение деформации ε_2 через составляющую перемещения $u_2 = u(x_1)$ граничной плоскости слоя $x_2 = \delta_0/2$:

$$\varepsilon_2 = 2u(x_1)/\delta_0 \quad (2.5)$$

3. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о разделении материала в соответствии со схемой, показанной на фиг. 2. Будем решать ее полагая, что материал вне слоя взаимодействия описывается соотношениями линейной теории упругости для случая плоского деформирования. Основными неизвестными являются: критическое значение расклинивающего усилия P_k , соответствующее началу разупрочнения материала в слое взаимодействия; значение расклинивающего значения P_m , соответствующее началу процесса разделения; длина участка разупрочнения c_m в момент начала разделения; эпюры напряжений $\sigma_{22}(x_1) = q(x_1)$, отражающие взаимодействие между берегами слоя в критическом состоянии и в момент начала разделения. В силу симметрии будем рассматривать только верхнюю полуплоскость ($x_2 \geq \delta_0/2$), а действие нижней части заменим искомой нагрузкой $q(x_1) = \sigma_{22}(x_1)$ (2.4). Запишем связь между напряжениями и перемещениями точек границы с учетом (2.5) в виде

$$q(x) = \begin{cases} q^I(x) = -\frac{2E_+}{\delta_0}u(x), & OC < x < \infty \\ q^{II}(x) = -E_-\left(\varepsilon_m - \frac{2}{\delta_0}u(x)\right), & 0 \leq x \leq OC \end{cases} \quad (3.1)$$

где $q^I(x)$ – напряжение на участке слоя взаимодействия ($OC < x < \infty$) (здесь и далее $x \equiv x_1$), $q^{II}(x)$ – напряжение на участке ($0 \leq x \leq OC$), $u(x)$ – перемещение границы полуплоскости.

Связь между вертикальными перемещениями границы полуплоскости и приложенной к ней нагрузкой может быть представлена в следующем виде [4]:

$$u(x) = -P\beta \ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) + \int_0^L q(\xi)\beta \ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right) d\xi, \quad P = |P|, \quad \beta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \quad (3.2)$$

Здесь a – точка приложения силы P ; L – некоторое расстояние, координата достаточно удаленной точки (или полюса) “наблюдения”, перемещение которой $u(L) = 0$ (следовательно, и напряжение $q(L) = 0$), β – параметр материала, E – модуль Юнга вне слоя (в общем случае $E \neq E_+$).

Преобразуем соотношения (3.1) и (3.2) в интегральное уравнение, описывающее все стадии процесса разделения вплоть до начала образования новых поверхностей

$$u(x) = -P\beta \ln\left(\frac{x+a}{L+a}\right) - \frac{2E_-\beta^c}{\delta_0} \int_0^c \left(\varepsilon_m - \frac{2}{\delta_0}u(\xi)\right) \ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right) d\xi - \frac{2E_+\beta^L}{\delta_0} \int_c^L u(\xi) \ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right) d\xi \quad (3.3)$$

Удовлетворяя краевые условия на границах участка разупрочнения уравнениями (3.4), (3.5) получаем замкнутую систему интегральных уравнений (3.3)–(3.5) для определения характеристик процесса.

$$u(0) = -P\beta \ln\left(\frac{a}{L+a}\right) - \frac{2E_+\beta}{\delta_0} \int_0^c \left(\epsilon_m - \frac{2}{\delta_0} u(\xi)\right) \ln\left(\frac{|x-\xi|}{L-\xi}\right) d\xi - \frac{2E_+\beta}{\delta_0} \int_c^L u(\xi) \ln\left(\frac{\xi}{L-\xi}\right) d\xi \quad (3.4)$$

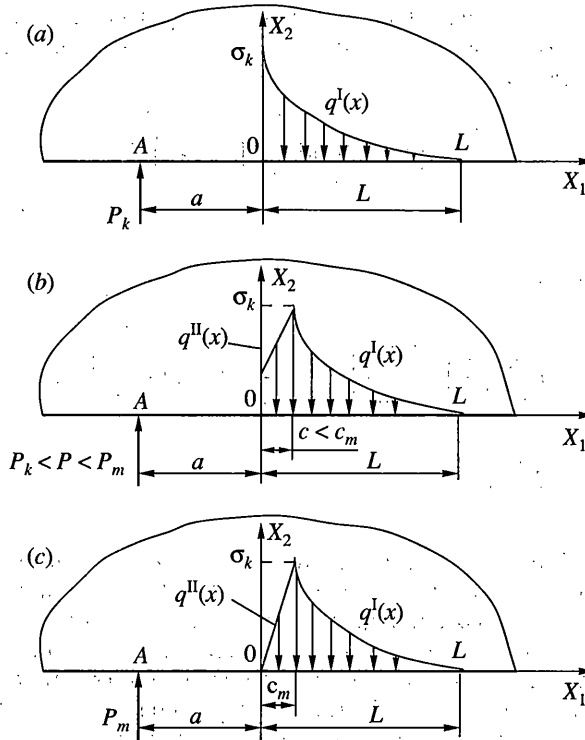
$$u|_{x=c} = u_c = -P\beta \ln\left(\frac{a+c}{L+a}\right) - \frac{2E_+\beta}{\delta_0} \int_0^c \left(\epsilon_m - \frac{2}{\delta_0} u(\xi)\right) \ln\left(\frac{|c-\xi|}{L-\xi}\right) d\xi - \frac{2E_+\beta}{\delta_0} \int_c^L u(\xi) \ln\left(\frac{|c-\xi|}{L-\xi}\right) d\xi \quad (3.5)$$

В системе (3.3)–(3.5) неизвестными являются: поле перемещений $u(x)$, $x \in (0; c) \cup (c; L)$, значение расклинивающей силы P , длина участка c . Определение этих неизвестных позволяет установить напряженно деформируемое состояние слоя взаимодействия вплоть до начала разделения. При этом выделяется стадия устойчивого деформирования (докритическая). Для определения характеристик, соответствующих достижению критического момента в системе (3.3)–(3.5), следует положить $c = 0$, $P = P_k$, $u(0) = u_k$, при этом уравнения (3.4) и (3.5) системы совпадут. Для определения момента начала разделения следует положить в (3.3)–(3.5) $c = c_m$. Отметим, что для конкретизации предлагаемой модели разделения, необходимы следующие характеристики материала: начальная толщина слоя взаимодействия δ_0 , величина критической деформации ϵ_k , критическое напряжение σ_k , предельная деформация ϵ_m , упругие постоянные E и ν для тела и E_k, ν_k, E_n, ν_n для слоя взаимодействия.

В соответствии с предлагаемой в [7] методикой, для численного интегрирования (3.3) использовался метод граничных элементов (ГЭ) с линейной аппроксимацией перемещений на элементе. Было проведено исследование влияния выбора отрезка интегрирования L на результаты. Установлено, что при $L/a \geq 100$ разница составляла порядка 0.5%. Кроме того, так как при расчете была использована неравномерная сетка со сгущением, то было проведено также исследование влияния длины первых десяти ГЭ в зоне сгущения на получаемые результаты. Установлено, что при $\delta_0/\xi_{10} = 10$ разница составляла не более 1% (здесь ξ_{10} – длина каждого из первых 10 элементов в зоне сгущения), а при $\delta_0/\xi_{10} \geq 100$ – не более 0.03%.

Стадии процесса разделения показаны на фиг. 3. Первая стадия – докритическое деформирование (фиг. 3, а) проходит до момента достижения расклинивающей силой критического значения P_k . На второй стадии (фиг. 3, б), когда $P > P_k$, начинается образование участка разупрочнения OC . Здесь, используя метод последовательных приближений для удовлетворения условия $q(x)|_{x=0} = 0$ с заданной степенью точности, из системы (3.3)–(3.5) находим расстояние c_m , поле перемещений (напряжений) и силу P_m , вызвавшую данное напряженно деформированное состояние (фиг. 3, в).

На фиг. 4–6 представлены результаты проведенных расчетов; влияние точки приложения усилия, характеристик материала (толщины слоя δ_0 и модуля E_+) на величину критической силы, длину участка разупрочнения и максимальное значение расклинивающей силы P_m . На этих графиках полученные зависимости отнесены к результатам “базового” расчета (значения с градусом вверх), выполненного для следующих ха-



Фиг. 3

рактических характеристик материала: $E_+ = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_k = 600$ МПа, $a = 10^{-3}$ м, $\delta_0 = 10^{-5}$ м, $\nu = 0.3$ и $E_+/E_- = 0.01$. При таком выборе в “базовом” расчете были получены следующие результаты: $P_k^0 = 55930$ Н/м, $P_m^0 = 1.005 P_k^0 = 56209$ Н/м, $c_m^0 = 1.160 \cdot 10^{-8}$ м.

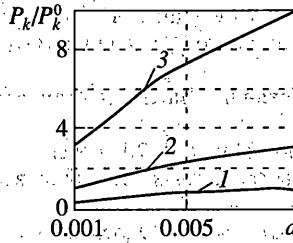
На фиг. 4 показано влияние расстояния a и толщины слоя δ_0 (кривая 1 соответствует $\delta_0 = 10^{-6}$ м, кривая 2 получена при $\delta_0 = 10^{-5}$ м, кривая 3 – при $\delta_0 = 10^{-4}$ м) на величину критической силы.

Фиг. 5 отражает влияние расстояния a и констант материала на длину участка разупрочнения (кривая 1 на фиг. 5, b соответствует значению $\delta_0 = 10^{-6}$ м, кривая 2 получена при $\delta_0 = 10^{-5}$ м, кривая 3 – при $\delta_0 = 10^{-4}$ м).

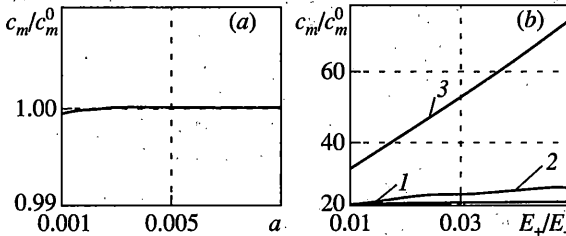
И, наконец, на фиг. 6 показано влияние расстояния a и констант материала на отношение максимальной силы P_m к критической P_k .

Из фиг. 4 следует, что чем меньше расстояние a и толщина слоя δ_0 , тем меньшее критическое усилие потребуется для начала образования стадии разупрочнения. Что же касается длины OC (фиг. 5), то она практически не зависит от точки приложения нагрузки, но на нее существенно влияют толщина слоя δ_0 и модуль E_- (чем они больше, тем длиннее OC).

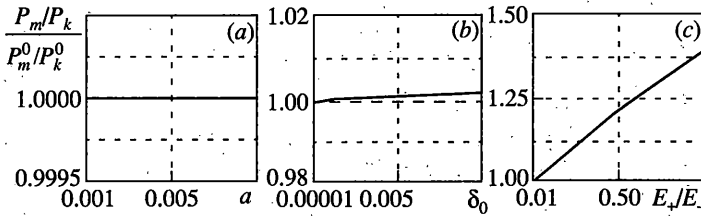
4. Оценка толщины слоя взаимодействия. В ряде работ [4, 8] предельное значение коэффициента интенсивности напряжений K_{Ic} определялось через известные механические характеристики и параметры структуры материала. В частности, для тела с макротрещиной, имеющего напряженное состояние, симметрично относительно плоскости расположения трещины в зоне предразрушения рассматривается объем высоты h .



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Данная величина в [4] считается характеристическим параметром структуры материала и коэффициент интенсивности напряжений K_{Ic} выражается в виде:

$$K_{Ic} = \sqrt{4.5h\tau_s E \epsilon_k (1 - \nu^2)^{-1}}, \quad (4.1)$$

где τ_s – предел текучести при сдвиге, E – модуль упругости, ϵ_k – деформация растяжения объема при срагивании трещины, ν – коэффициент Пуассона. Толщину слоя взаимодействия будем отождествлять с параметром h формулы (4.1), который может быть определен по экспериментальным значениям коэффициента интенсивности напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-96011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черепанов Г.П. Современные проблемы механики разрушения // Проблемы прочности. 1987. № 8. С. 3–13.
2. Александров В.М., Кудиш И.И. Асимптотические методы в задаче Гриффитса // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 665–671.

3. Нотт Дж.Ф. Основы механики разрушения. М.: Металлургия, 1978. 256 с.
4. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1991. 415 с.
5. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
6. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
8. Панасюк В.В., Андрейкин А.Е., Ковчик С.Е. Определение вязкости разрушения K_{1C} конструкционных материалов через их механические характеристики и параметр структуры // Физ.-хим. Механика материалов. 1977. № 2. С. 120–122.

Тула

Поступила в редакцию
8.08.2001