

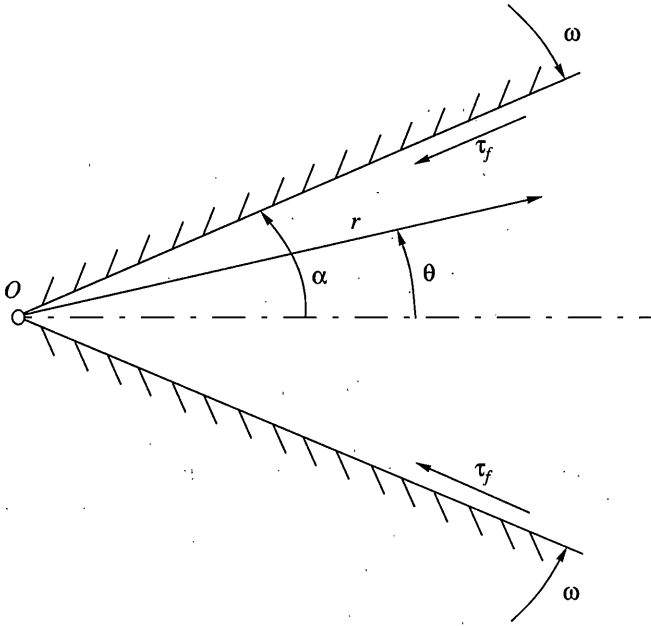
УДК 539.214;539.374

© 2003 г. С.Е. АЛЕКСАНДРОВ, Е.А. ЛЯМИНА

СЖАТИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА, ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО К СРЕДНЕМУ НАПРЯЖЕНИЮ, ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПЛИТАМИ

Теории пластически несжимаемых, но чувствительных к среднему напряжению, материалов обычно применяются в механике сыпучих сред [1, 2]. Однако, для ряда сплавов также характерна зависимость условия текучести от среднего напряжения, хотя и не так ярко выраженная, как в сыпучих материалах [3–5]. Формоизменение таких сплавов производится традиционными процессами обработки давлением, что требует решения соответствующих краевых задач, не встречающихся при моделировании течения сыпучих сред. В публикуемой работе рассматривается сжатие слоя материала, подчиняющегося уравнениям модели [2], вращающимися шероховатыми плитами. Основное внимание уделяется поведению решения вблизи поверхности трения. Известно [6, 7], что в случае классической пластичности поле скоростей является сингулярным вблизи поверхности максимального трения (на такой поверхности удельные силы трения равны пределу текучести при чистом сдвиге). Применение такого закона трения для других моделей материала приводит к значительным сложностям при обобщениях классических задач теории пластичности. В качестве иллюстрации отметим, что формальные обобщения известного решения Прандтля о сжатии пластического материала между параллельными шероховатыми плитами (это решение приведено, например, в [8]) на вязкопластические материалы [9] и пластические упрочняющиеся материалы [10] не имеют силы при законе максимального трения (в обоих случаях среднее усилие на единицу длины стремится к бесконечности при приближении удельных сил трения к их максимальной величине). Причем такое поведение решения имеет место при любом отклонении от модели идеального жесткопластического материала. Однако решение аналогичной задачи при использовании модели [2], полученное в [11], существует при законе предельного трения, предложенном в [11, 12] и предсказывает конечное среднее усилие на единицу длины. Непосредственной проверкой можно убедиться, что это решение сингулярное причем асимптотическое поведение поля скоростей вблизи поверхности трения вполне аналогично случаю классической пластичности [6, 7]. В публикуемой работе при тех же предположениях, модель материала [2] и закон трения, предложенный в [11, 12], получено решение задачи о сжатии слоя между вращающимися плитами. Решение сводится к линейному неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, имеющему регулярную особую точку, соответствующую поверхности трения.

Геометрическая схема процесса сжатия слоя между двумя вращающимися шероховатыми плитами показана на фиг. 1. Предполагается, что плиты вращаются в противоположных направлениях вокруг точки O с угловой скоростью $\omega > 0$. Материал выдавливается в направлении от точки O и сток в этой точке отсутствует. Уравнения



Фиг. 1

плоского течения материала, следующего модели [2], в полярной системе координат $r\theta$ имеют вид [12]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} = 0 \quad (1)$$

$$(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \sin \varphi + [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{r\theta}^2]^{1/2} = 2k \cos \varphi \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

$$\sin 2\psi \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \cos 2\psi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + \sin \varphi \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - 2 \frac{d\psi}{dt} \right) = 0 \quad (4)$$

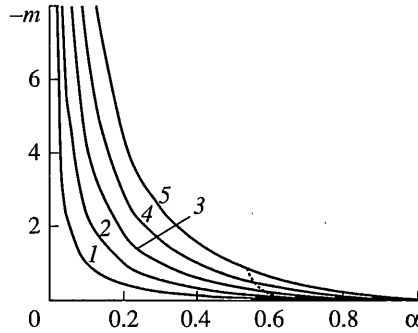
Здесь (1) – уравнения равновесия; (2) – условие текучести; (3) – уравнение несжимаемости; (4) – уравнение связи напряженного и деформированного состояний; σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений в системе координат $r\theta$; u , v – проекции вектора скорости на направления r и θ соответственно; ψ – угол между максимальным главным напряжением и осью r , отсчитываемый от оси против хода часовой стрелки; t – время; $d\psi/dt$ – материальная производная; $k = \text{const}$ – коэффициент сцепления; $\varphi = \text{const}$ – угол внутреннего трения.

Ввиду симметрии будем рассматривать только область $0 \leq \theta \leq \alpha$, где α – половина угла раствора плит. Ясно, что

$$d\alpha/dt = -\omega \quad (5)$$

Краевые условия на плоскости симметрии имеют вид

$$\psi = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad (6)$$



Фиг. 2

На поверхности плит примем закон трения, предложенный в [11, 12]. Направление течения материала предполагает, что удельные силы трения τ_f направлены так, как показано на фиг. 1. Поэтому $\psi \leq 0$ и закон трения может быть записан в форме

$$\psi = \psi_w = -\pi/4 - \varphi/2 \text{ при } \theta = \alpha \quad (7)$$

Кроме того, на этой поверхности выполняется условие непроникания

$$v = -\omega r \quad (8)$$

Закон трения (7) является обобщением широко применяемого в классической пластичности закона трения Треска, согласно которому удельные силы трения равны пределу текучести при чистом сдвиге.

Решение будем искать полуобратным методом, полагая, что

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}}{k} &= \operatorname{ctg} \varphi + \frac{r^m \Phi(\psi, \alpha)}{\sin 2\psi \sin \varphi} (1 - \cos 2\psi \sin \varphi), \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{k} &= \operatorname{ctg} \varphi + \frac{r^m \Phi(\psi, \alpha)}{\sin 2\psi \sin \varphi} (1 + \cos 2\psi \sin \varphi) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sigma_{r\theta}/k = -r^m \Phi(\psi, \alpha), \quad \Phi(\psi, \alpha) \geq 0$$

$$u = \frac{\omega r dg(\psi, \alpha)}{2 \frac{d\theta}{d\theta}}, \quad v = -\omega r g(\psi, \alpha) \quad (10)$$

Здесь Φ и g – произвольные функции ψ и α , а m – функция α . Кроме того, будем считать, что ψ не зависит от r . Таким образом, как следует из (10), компоненты тензора скорости деформации не зависят от r . В классической пластичности такие решения были рассмотрены в [13] (в [13] были найдены более общие решения, из которых плоскодеформированное состояние следует как частный случай). С учетом (7) и (10), условие (8) и кинематическое условие (6) могут быть представлены в виде

$$g = 0 \text{ при } \psi = 0 \quad (11)$$

$$g = 1 \text{ при } \psi = \psi_w \quad (12)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что поле напряжений (9) удовлетворяет условию текучести (2) при любой функции $\Phi(\psi, \alpha)$, а поле скорости (10) –

уравнению несжимаемости при любой функции $g(\psi, \alpha)$. Подставляя (9) в уравнения равновесия (1), получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \cos 2\psi \sin \varphi}{2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\Phi \partial \psi} = \frac{2[m - (m + 2) \cos 2\psi \sin \varphi](\sin \varphi + \cos 2\psi)}{\sin 2\psi (m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi)} \quad (14)$$

Интегрирование уравнения (14) дает

$$\Phi = -\Phi_0(\alpha) \sin 2\psi [2|m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi|]^{m/2} \quad (15)$$

где $\Phi_0(\alpha) > 0$ – произвольная функция α . Хотя уравнение (13) также может быть проинтегрировано в элементарных функциях, его решение, удовлетворяющее условию (7), удобнее записать в форме

$$\theta = 2 \sin \varphi \int_{\psi_w}^{\psi} \frac{(\sin \varphi + \cos 2z)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z)} dz + \alpha \quad (16)$$

Из этого уравнения следует, что $\partial \psi / \partial t \neq 0$, что является существенной отличительной особенностью настоящего решения от решения, полученного в [11]. Из (16) можно найти

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} &= \frac{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi)}{2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)} \times \\ &\times \left[2 \frac{dm}{d\alpha} \sin \varphi \cos^2 \varphi \int_{\psi_w}^{\psi} \frac{(\sin \varphi + \cos 2z)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z)} dz - 1 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая сделанные предположения и (5), получим

$$\frac{d\psi}{dt} = -\omega \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \omega g(\psi, \alpha) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (18)$$

Подставляя (10), (13), (17) и (18) в (4), проходим к уравнению относительно $g(\psi, \alpha)$ в форме

$$\begin{aligned} (\cos 2\psi + \sin \varphi) \frac{\partial^2 g(\psi, \alpha)}{\partial \psi^2} + 2 \sin 2\psi \frac{\partial g(\psi, \alpha)}{\partial \psi} + p_1(\psi, \alpha) g(\psi, \alpha) &= p_0(\psi, \alpha) \\ p_1(\psi, \alpha) &= \frac{8 \sin^2 \varphi (\cos 2\psi + \sin \varphi) (4 \sin^2 \varphi + 4 \sin \varphi \cos 2\psi - m \cos^2 \varphi)}{(2 \sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos 2\psi - m \cos^2 \varphi)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} p_0(\psi, \alpha) &= \frac{8 \sin^2 \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi)} \times \\ &\times \left[2 \frac{dm}{d\alpha} \sin \varphi \cos^2 \varphi \int_{\psi_w}^{\psi} \frac{(\sin \varphi + \cos 2z)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z)} dz - 1 \right] \end{aligned}$$

Из (7) и (19) следует, что $\psi = \psi_w$ является регулярной особой точкой уравнения (19). Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$(\cos 2\psi + \sin \psi) \frac{\partial^2 g_h(\psi, \alpha)}{\partial \psi^2} + 2 \sin 2\psi \frac{\partial g_h(\psi, \alpha)}{\partial \psi} + p_1(\psi, \alpha) g_h(\psi, \alpha) = 0 \quad (20)$$

Одно из линейно независимых решений этого уравнения имеет порядок $O[(\psi - \psi_w)^2]$ вблизи особой точки. Второе линейно независимое решение может быть записано в форме

$$g_h(\psi, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\psi - \psi_w)^n + \ln(\psi - \psi_w) \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\psi - \psi_w)^{n+2} \quad (21)$$

Коэффициенты уравнения (19) в окрестности особой точки могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \cos 2\psi + \sin \psi &= 2 \cos \varphi (\psi - \psi_w) + 2 \sin \varphi (\psi - \psi_w)^2 + O[(\psi - \psi_w)^3] \\ 2 \sin 2\psi &= -2 \cos \varphi - 4 \sin \varphi (\psi - \psi_w) + O[(\psi - \psi_w)^2] \\ p_1(\psi, \alpha) &= -\frac{16 \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{m} (\psi - \psi_w) - \frac{16 \sin \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi}{m} (\psi - \psi_w)^2 + O[(\psi - \psi_w)^3] \\ p_0(\psi, \alpha) &= -\frac{16 \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{m} (\psi - \psi_w) - \frac{16(4+m) \sin \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi}{m^2} (\psi - \psi_w)^2 + O[(\psi - \psi_w)^3] \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя (21) и (22) в (20) находим

$$g_h = A \left\{ 1 + \ln(\psi - \psi_w) \left[\frac{4 \operatorname{tg}^2 \varphi}{m} (\psi - \psi_w)^2 + O[(\psi - \psi_w)^3] \right] \right\} + O[(\psi - \psi_w)^2] \quad (23)$$

где A – произвольная функция m . Можно показать, что физически состоятельные решения получаются только при $A = 0$. Интегрируя (13) в окрестности особой точки при условии $\psi = \psi_w$ при $\theta = \alpha$, получим

$$\alpha - \theta = -2 \operatorname{tg} \varphi m^{-1} (\psi - \psi_w)^2 + O[(\psi - \psi_w)^3] \quad (24)$$

Из (10) следует, что сдвиговая скорость деформации определяется выражением

$$\xi_{r\theta} = \frac{\omega \partial^2 g}{4 \partial \theta^2} \quad (25)$$

Если $A \neq 0$, то из (23) и (24) получим, что в выражение для $\xi_{r\theta}$ будет входить член порядка $O[(\alpha - \theta)^{-1}]$, приводящий к неинтегрируемой особенности, что недопустимо с физической точки зрения. Аналогичным образом можно показать, что общее решение уравнения (19) не должно содержать член порядка $O[(\psi - \psi_w)]$. Таким образом, если решение уравнения (19) существует, то в некоторой области $\psi_w \leq \psi \leq \psi_w (1 - \delta)$ при $\delta \ll 1$ оно может быть аппроксимировано выражением

$$g = 1 + c_2 (\psi - \psi_w)^2 \quad (26)$$

В области $\psi_w (1 - \delta) \leq \psi \leq 0$ решение уравнения (19) может быть получено численно при условиях

$$g = 1 + c_2 \psi_w^2 \delta^2, \quad \partial g / \partial \psi = -2 c_2 \psi_w \delta \quad \text{при} \quad \psi = \psi_w (1 - \delta) \quad (27)$$

Используя итеративную процедуру, коэффициент c_2 должен быть определен так, чтобы удовлетворить краевому условию (11). Зависимость $m(\alpha)$ следует из условия (6) и уравнения (16) при $\psi = 0$:

$$-\alpha = 2 \sin \varphi \int_{\psi_w}^0 \frac{(\sin \varphi + \cos 2\psi)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi)} d\psi \quad (28)$$

Отсюда, в частности, определяется производная $dm/d\alpha$, входящая в свободный член $p_0(\psi, \alpha)$ уравнения (19):

$$1 = 2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \frac{dm}{d\alpha} \int_{\psi_w}^0 \frac{(\sin \varphi + \cos 2\psi)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi)^2} d\psi \quad (29)$$

Для различных углов φ зависимость m от α показана на фиг. 2 (1 – $\varphi = 0.1$, 2 – $\varphi = 0.2$, 3 – $\varphi = 0.3$, 4 – $\varphi = 0.4$, 5 – $\varphi = 0.5$).

Значительный интерес представляет коэффициент при $(\psi - \psi_w)^3$ ряда Тейлора, представляющего решение уравнения (19) в окрестности особой точки. Если этот коэффициент не равен нулю, $c_3 \neq 0$, то, заменяя в решении ψ на θ с помощью (24) и подставляя результат в (25), получим, что поле скоростей сингулярное, причем

$$O(\xi_{r\theta}) = O(\xi_{eq}) = O[(\alpha - \theta)^{-1/2}] \quad (30)$$

Такое поведение сдвиговой скорости деформации и эквивалентной скорости деформации ξ_{eq} вполне аналогично решениям [11, 12] и поведению поля скоростей вблизи поверхности максимального трения в классической пластичности [6, 7]. Определенный интерес представляет также величина c_3 , так как коэффициент интенсивности эквивалентной скорости деформации, введенный в [7], прямо пропорционален c_3 . В свою очередь, коэффициент интенсивности эквивалентной скорости деформации является основой теории разрушения материала вблизи поверхностей трения, предложенной в [14]. Подставляя решение вида $g = 1 + c_2(\psi - \psi_w)^2 + c_3(\psi - \psi_w)^3 + O[(\psi - \psi_w)^4]$ в (19) и учитывая (22), найдем

$$c_3 = \frac{2}{3} c_2 \operatorname{tg} \varphi - \frac{32 \operatorname{tg}^3 \varphi}{3 m^2} \quad (31)$$

Можно показать, что построенное решение не имеет силы при достаточно больших углах α . Действительно, положим $2\alpha = \pi/2 + \varphi$. В этом случае из (28) следует, что $m = 0$, а из (29), что $dm/d\alpha = 0$. Тогда, $p_1(\psi, \alpha) = 8 \sin \varphi$ и $p_0(\psi, \alpha) = 4 \sin \varphi$, а уравнение (19) принимает вид

$$(\cos 2\psi + \sin \varphi) \frac{\partial^2 g(\psi)}{\partial \psi^2} + 2 \sin 2\psi \frac{\partial g(\psi)}{\partial \psi} + 8 \sin \varphi g(\psi) = 4 \sin \varphi \quad (32)$$

Одно из линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего (32), имеет порядок $O(\psi - \psi_w)^2$, а второе имеет вид (21). Подставляя (21) и (22) в (32) находим

$$g_h = A \{ 1 + 4 \operatorname{tg} \varphi (\psi - \psi_w) + \ln(\psi - \psi_w) [-4 \operatorname{tg}^2 \varphi (\psi - \psi_w)^2 + O(\psi - \psi_w)^3] \} + O(\psi - \psi_w)^2 \quad (33)$$

Частное решение уравнения (32) имеет форму $g_p = 1/2$ и, таким образом, используя (33), общее решение уравнения (32) может быть представлено в виде

$$g = 1/2 + A \{1 + 4 \operatorname{tg} \varphi (\psi - \psi_w) + \ln(\psi - \psi_w) [-4 \operatorname{tg}^2 \varphi (\psi - \psi_w)^2 + O(\psi - \psi_w)^3]\} + O(\psi - \psi_w)^2 \quad (34)$$

Чтобы удовлетворить краевому условию (12), необходимо положить $A = 1/2$, что противоречит физическому смыслу, как было показано выше. Чтобы точно установить границу существования решения, отметим, что радиальная скорость вблизи поверхности трения может быть получена из (10), (24) и (26) в виде

$$u = \frac{\omega r m c_2}{4 \operatorname{tg} \varphi} + O(\psi - \psi_w) \quad (35)$$

В соответствии с выбранным направлением сил трения решение имеет силу только если $u \geq 0$ на поверхности трения. Из фиг. 2 видно, что $m < 0$. Таким образом, из (35) следует, что решение должно удовлетворять условию

$$c_2 \leq 0 \quad (36)$$

и граница существования решения определяется условием $c_2 = 0$. Этой величине c_2 будет соответствовать максимально возможный угол $\alpha = \alpha_m$. Для некоторых углов φ величины α_m , полученные численно, приведены ниже

φ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
α_m	0.68	0.62	0.58	0.56	0.54

На фиг. 2 соответствующая кривая показана штриховой линией. Уравнение (19) имеет силу при $0 < \alpha \leq \alpha_m$. Для этого интервала значений α величина c_3 была посчитана по (31) после численного определения c_2 . Значения c_3 мало отличаются для различных углов φ . Типичное распределение, соответствующее $\varphi = 0.1$ показано на фиг. 3.

Чтобы получить решение для углов раствора плит $\alpha > \alpha_m$, отметим, что при $\alpha = \alpha_m$ коэффициент $c_2 = 0$ и уравнение (35) показывает, что имеет место прилипание. Закон трения (7), при котором строилось решение, вообще говоря должен выполняться только при скольжении (хотя в частных случаях он может выполняться и при прилипании). В общем случае закон трения должен быть записан в виде неравенства так, что при прилипании должно выполняться условие

$$\psi = \psi_w^{(s)} > \psi_w \quad \text{при} \quad \theta = \alpha \quad (37)$$

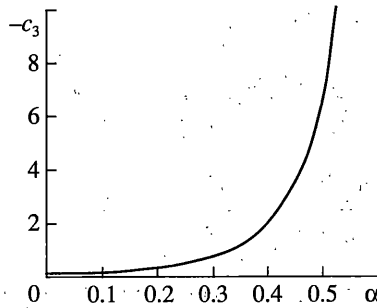
Величина $\psi_w^{(s)}$ неизвестна и определяется из решения задачи, а краевое условие принимает вид

$$u = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha \quad (38)$$

Общая структура уравнения, определяющего распределение скоростей, будет иметь вид (19):

$$(\cos 2\psi + \sin \varphi) \frac{\partial^2 g(\psi, \alpha)}{\partial \psi^2} + 2 \sin 2\psi \frac{\partial g(\psi, \alpha)}{\partial \psi} + p_1(\psi, \alpha) g(\psi, \alpha) = p_0^{(s)}(\psi, \alpha) \quad (39)$$

Однако особенность исчезает вследствие (37) и свободный член примет другую форму. Краевые условия (11) и (12) будут иметь силу, но условие (12) должно теперь вы-



Фиг. 3

полняться при $\psi = \psi_w^{(s)}$. Таким образом, вблизи точки $\psi = \psi_w^{(s)}$ решение уравнения (39) представимо в виде ряда Тейлора, аналогичного (26),

$$g = 1 + c_2(\psi - \psi_w^{(s)})^2 \quad (40)$$

Равенство нулю коэффициента при $(\psi - \psi_w^{(s)})$ обеспечивает выполнение краевого условия (38). Поскольку два первых коэффициента разложения Тейлора определены, то остальные коэффициенты следуют вообще говоря из структуры уравнения. В частности, коэффициент c_2 , входящий в (40), имеет вид

$$c_2 = \frac{p_0^{(s)}(\psi_w^{(s)}, \alpha) - p_1(\psi_w^{(s)}, \alpha)}{2(\cos 2\psi_w^{(s)} + \sin \varphi)} \quad (41)$$

Однако задача не является переопределенной, так как величина $\psi_w^{(s)}$ неизвестна. Чтобы получить коэффициент $p_0^{(s)}(\psi, \alpha)$, проинтегрируем (13) при краевом условии (37):

$$2 \sin \varphi \int_{\psi_w^{(s)}}^{\psi} \frac{(\sin \varphi + \cos 2z)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \cos 2z \sin \varphi)} dz = \theta - \alpha \quad (42)$$

Удовлетворяя краевому условию (6) для ψ , из (42) найдем

$$2 \sin \varphi \int_{\psi_w^{(s)}}^0 \frac{(\sin \varphi + \cos 2z)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \cos 2z \sin \varphi)} dz = -\alpha \quad (43)$$

Кроме того, из (42) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} &= \frac{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \cos \varphi \sin 2\psi)}{2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)} \times \\ &\times \left[2 \frac{dm}{d\alpha} \sin \varphi \cos^2 \varphi \int_{\psi_w^{(s)}}^{\psi} \frac{(\sin \varphi + \cos 2z)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z)^2} dz + \right. \\ &\left. + \frac{2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi_w^{(s)})}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi_w^{(s)})} \frac{d\psi_w^{(s)}}{d\alpha} - 1 \right] \quad (44) \end{aligned}$$

Дифференцируя (43) по α , получим

$$2 \frac{dm}{d\alpha} \sin \varphi \cos^2 \varphi \int_{\psi_w^{(s)}}^0 \frac{(\sin \varphi + \cos 2z)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z)^2} dz + \frac{2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi_w^{(s)})}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi_w^{(s)})} \frac{d\psi_w^{(s)}}{d\alpha} = 1 \quad (45)$$

Исключая в (44) производную $dm/d\alpha$ с помощью (45), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} &= \frac{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi)}{2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)} \times \\ &\times \left[1 - \frac{2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi_w^{(s)})}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi_w^{(s)})} \frac{d\psi_w^{(s)}}{d\alpha} \right] \times \\ &\times \int_0^\psi \frac{(\sin \varphi + \cos 2z)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z)^2} dz / \int_{\psi_w^{(s)}}^0 \frac{(\sin \varphi + \cos 2z)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z)^2} dz \end{aligned} \quad (46)$$

Подстановка (10) и (46) в (4) определяет свободный член в виде

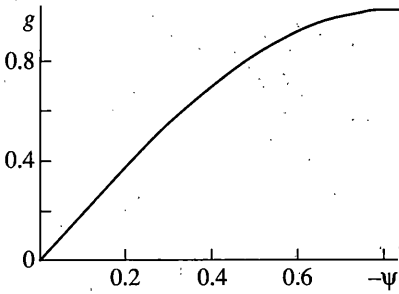
$$\begin{aligned} p_0^{(s)} &= \frac{8 \sin^2 \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi)} \times \\ &\times \left[1 - \frac{2 \sin \varphi (\sin \varphi + \cos 2\psi_w^{(s)})}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi_w^{(s)})} \frac{d\psi_w^{(s)}}{d\alpha} \right] \times \\ &\times \int_0^\psi \frac{(\sin \varphi + \cos 2z)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z)^2} dz / \int_{\psi_w^{(s)}}^0 \frac{(\sin \varphi + \cos 2z)}{(m \cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2z)^2} dz \end{aligned} \quad (47)$$

Из (39)–(41) и (47) видно, что задача неопределенная при условии прилипания. Действительно, если m исключено при помощи (42), то при фиксированном α решение уравнения (39), удовлетворяющее условию (38), содержит две произвольные постоянные $\psi_w^{(s)}$ и $d\psi_w^{(s)}/d\alpha$, для определения которых имеется всего одно условие (11). Чтобы получить определенную задачу, необходимо рассмотреть процесс сжатия, причем, по крайней мере, до достижения углом α величины α_m . При $\alpha = \alpha_m$ начинается проскальзывание и из условия (12) следует $d\psi_w/d\alpha = 0$ при $\alpha < \alpha_m$. Полагая, что ψ_m и $d\psi_w/d\alpha$ непрерывны при $\alpha = \alpha_m$, получим два условия:

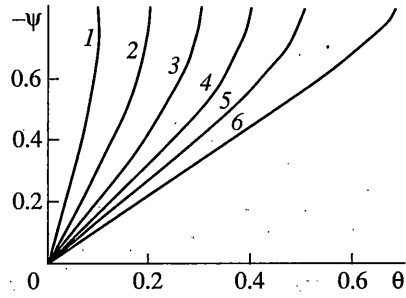
$$\psi_w^{(s)} = \psi_w, \quad d\psi_w^{(s)}/d\alpha = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_m \quad (48)$$

Учитывая (48), решение для $\psi_w^{(s)}(\alpha)$ в области $\alpha_m \leq \alpha \leq \alpha_1 = \alpha_m (1 + \delta)$ можно представить в виде

$$\psi_w^{(s)}(\alpha) = \psi_w + \eta(\alpha - \alpha_m)^2 \quad (49)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Из (49) следует

$$\psi_w^{(s)} = \psi_w + \eta \alpha_m^2 \delta^2, \quad d\psi_w^{(s)}/d\alpha = 2\eta \alpha_m \delta \text{ при } \alpha = \alpha_1 \quad (50)$$

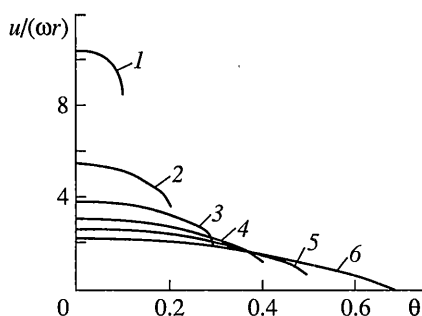
Подставляя (50) в коэффициенты уравнения (39) и учитывая (40) и (41), получаем решение уравнения (39) при $\alpha = \alpha_1$, зависящее от η . Величина η определяется условием (11). Очевидно, что решение имеет смысл если только выполняться условие $\eta < 0$. Для того, чтобы построить решение при $\alpha > \alpha_1$, можно использовать следующую пошаговую процедуру. Положим, что $d\psi_w^{(s)}/d\alpha = \eta_{n+1}$ при $\alpha = \alpha_{n+1}$, а значения $\psi_w^{(s)} = \psi_n$ и $d\psi_w^{(s)}/d\alpha = \eta_n$ при $\alpha = \alpha_n$ известны. Тогда, полагая, что $d\psi_w^{(s)}/d\alpha = \frac{1}{2}(\eta_{n+1} + \eta_n)$ в области $\alpha_n \leq \alpha \leq \alpha_{n+1}$, найдем

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{2}(\eta_{n+1} + \eta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \psi_n \quad (51)$$

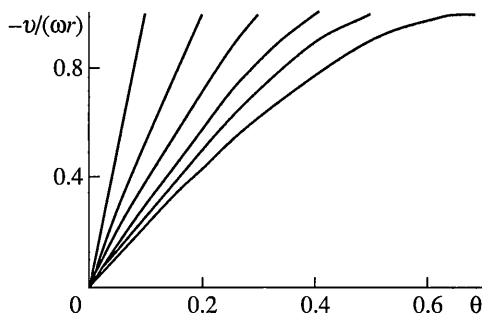
Подставляя η_{n+1} и (51) в коэффициенты уравнения (39) и учитывая (40), получаем решение уравнения (39) при $\alpha = \alpha_{n+1}$, зависящее от η_{n+1} . Величина η_{n+1} определяется условием (11).

Поведение функции $g(\psi, \alpha)$ незначительно различаются для разных α (в пределах общей области определения функций) и φ в исследованных интервалах изменения этих параметров $0.1 \leq \alpha \leq \alpha_m$ и $0.1 \leq \varphi \leq 0.5$. Типичное распределение, соответствующее случаю $\varphi = 0.1$ и $\alpha = 0.4$, показано на фиг. 4. Однако, профили скоростей существенно зависят от угла раствора плит. Это связано с тем, что угол α оказывает значительное влияние на зависимость $\psi(\theta)$, которая иллюстрируется на фиг. 5 (1 - $\alpha = 0.1$, 2 - $\alpha = 0.2$, 3 - $\alpha = 0.3$, 4 - $\alpha = 0.4$, 5 - $\alpha = 0.5$, 6 - $\alpha = \alpha_m = 0.678$) при $\varphi = 0.1$. На фиг. 6 и 7 показаны распределения радиальной и окружной скоростей по сечению материала на различных стадиях процесса (1 - $\alpha = 0.1$, 2 - $\alpha = 0.2$, 3 - $\alpha = 0.3$, 4 - $\alpha = 0.4$, 5 - $\alpha = 0.5$, 6 - $\alpha = \alpha_m = 0.678$) при $\varphi = 0.1$. Поле напряжений определяется с точностью до $\Phi_0(\alpha)$ из (9), (15) и фиг. 5. Величина $\Phi_0(\alpha)$ может быть определена из интегрального условия $\int \sigma_{rr} d\theta = 0$ ($0 \leq \theta \leq \alpha$) при некотором значении $r = \text{const}$.

Отметим, что отрицательные значения m (фиг. 2) показывают, что поле напряжений сингулярное вблизи точки O (фиг. 1). Причем порядок сингулярности возрастает с уменьшением угла α . В отличие от публикуемой работы, именно такой тип сингулярности обычно исследуется в аналогичных задачах [15-17].



Фиг. 6



Фиг. 7

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 02-01-00419, 03-01-06318) и гранта Президента РФ № НШ-1849.2003.1 для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Физматлит, 1960. 243 с.
2. Spencer A.J.M. Deformation of ideal granular materials // *Mechanics of Solids. The Rodney Hill 60th Anniversary Volume* / Eds. H.G. Hopkins and M.J. Sewell. Oxford: Pergamon Press, 1982. P. 607–652.
3. Spitzig W.A., Sober R.J., Richmond O. The effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of maraging and HY-80 steels and its implications for plasticity theory // *Metallurgical Trans.* 1976. V. 7A. № 11. P. 1703–1710.
4. Spitzig W.A. Effect of hydrostatic pressure on plastic-flow properties of iron single crystals // *Acta Metallurgica.* 1979. V. 27. № 4. P. 523–534.
5. Kao A.S., Kuhn H.A., Spitzig W.A., Richmond O. Influence of superimposed hydrostatic pressure on bending fracture and formability of a low carbon steel containing globular sulfides // *Trans. ASME. J. Engng mater. Technol.* 1990. V. 112. № 1. P. 26–30.
6. Александров С.Е. Поле скорости вблизи поверхности их разрыва при произвольном течении идеального жесткопластического материала // *Изв. РАН. МТТ.* 1995. № 5. С. 116–122.
7. Alexandrov S., Richmond O. Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2001. V. 36. № 1. P. 1–11.
8. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 324 с.
9. Adams M.J., Briscoe B.J., Corfield G.M., Lawrence C.J., Papathanasiou T.D. An analysis of the plane – strain compression of viscoplastic materials // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1997. V. 64. № 2. P. 420–424.
10. Collins I.F., Meguid S.A. On the influence of hardening and anisotropy on the plane – strain compression of thin metal strip // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1977. V. 44. № 2. P. 271–278.
11. Marshall E.A. The Compression of a slab of ideal soil between rough plates // *Acta Mech.* 1967. V. 3. № 2. P. 82–92.
12. Pemberton C.S. Flow of imponderable granular materials in wedge-shaped channels // *J. Mech. Phys. Solids.* 1965. V. 13. № 6. P. 351–360.
13. Задоян М.А. Частное решение уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах // *Докл. АН СССР.* 1964. Т. 157. № 1. С. 73–75.
14. Alexandrov S. Interrelation between constitutive laws and fracture in the vicinity of friction surfaces // *Physical Aspects of Fracture* / Eds. E. Bouchaud et al. Dordrecht: Kluwer. P. 179–190.
15. Fleck N.A., Durban D. Steady penetration of a rigid cone with a rough wall into a power-law viscous solid // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1991. V. 58. № 4. P. 872–880.
16. Durban D., Rand O. Singular fields in plane-strain penetration // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1991. V. 58. № 4. P. 910–915.
17. Durban D., Fleck N.A. Singular plastic fields in steady penetration of a rigid cone // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1992. V. 59. № 4. P. 706–710.

Москва

Поступила в редакцию
18.12.2001