

УДК 539.374

© 2003 г. В.М. САДОВСКИЙ

## **К ИССЛЕДОВАНИЮ СТРУКТУРЫ ПОПЕРЕЧНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ**

На основе теории течения пластической среды при чистом сдвиге с учетом вязких и температурных эффектов исследуется структура поперечных диссипативных ударных волн конечной амплитуды. Сформулированы условия реализуемости таких волн. Показано, что в случае температурного упрочнения материала возможна локализация деформации сдвига в узких зонах с последующим образованием контактных разрывов. Приведены результаты численных расчетов процесса локализации деформации при импульсном нагружении пластического слоя.

Проблема описания разрывных решений типа упругопластических ударных волн достаточно хорошо изучена только в рамках теории малых деформаций. Для идеальной среды с условием пластичности Мизеса и условием пластичности Треска – Сен-Венана классификация диссипативных ударных волн проведена в работе [1]. В [2, 3] рассмотрены различные варианты линейного упрочнения. Модель нелинейного изотропного упрочнения исследована в [4]. Оказалось, что класс разрывных решений существенно зависит как от вида условия пластичности, так и от характера выпуклости диаграммы упрочнения материала.

Полученные в теории малых упругопластических деформаций выражения для скоростей распространения диссипативных волн, а также соотношения, связывающие скачки компонент вектора скорости и тензора напряжений, пригодны только для описания ударных волн малой амплитуды. Подобное исследование при конечных деформациях затруднительно, поскольку в этом случае принципиально более сложной является задача построения интегрального обобщения модели. В упрощенных моделях, где эту задачу удается решить, часть сильных разрывов, найденных методом интегрального обобщения, оказывается неустойчивой по отношению к возмущению параметров среды и, следовательно, не реализуется. Один из способов формулировки дополнительных условий реализуемости связан с изучением структуры разрывов на основе термомеханической модели, учитывающей эффекты вязкости и теплопроводности. Структура продольных ударных волн конечной амплитуды в моделях одноосного деформирования рассматривалась в [5–7]. Данная работа посвящена определению условий реализуемости и исследованию структуры поперечных волн в рамках модели чистого сдвига пластической среды.

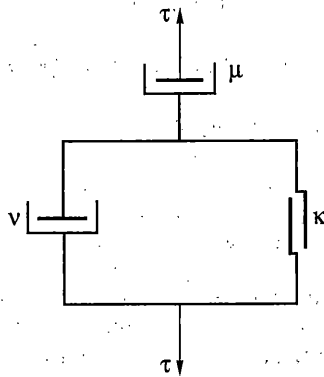
**1. Структура ударных волн.** Неоднородное состояние чистого сдвига в пластической среде возможно, только если гидростатическое давление является функцией плотности, не зависящей от термодинамического параметра. При учете такой зависимости локальное нагревание материала за счет диссипации механической энергии на фронте волны приводит к появлению нормальных напряжений. Возникает общая картина течения.

В случае развитого пластического течения среды, когда упругой деформацией и упрочнением материала можно пренебречь, процесс деформирования описывается системой уравнений

$$\rho v_t = \tau_x, \quad v_x = \frac{\tau}{\mu} + \frac{\theta(\tau - \kappa)}{\nu}, \quad \rho U_t = \tau v_x + (\alpha T_x)_x \quad (1.1)$$

Здесь  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\kappa$  и  $\alpha$  – положительные величины: коэффициенты вязкости, предел текучести и коэффициент теплопроводности среды, зависящие от температуры  $T$ . Плотность  $\rho$  постоянна, поэтому внутренняя энергия  $U$  также зависит только от температуры, причем коэффициент теплоемкости при постоянном объеме  $U_T$  строго положителен. Нижние индексы всюду означают частные производные по соответствующим переменным, выражение  $\theta(u) = \max\{u, 0\}$  равно положительной части аргумента, остальные обозначения общепринятые.

Система уравнений (1.1) отвечает модели Шведова – Бингама вязкопластической среды, реологическая схема которой представлена на фиг. 1.



Фиг. 1

Предельный переход по коэффициентам вязкости приводит к частным моделям пластической среды, вязкой в разгруженном состоянии ( $\nu \rightarrow 0$ ), вязкопластической среды с жесткой разгрузкой ( $\mu \rightarrow \infty$ ) и жесткопластической среды ( $\mu \rightarrow \infty, \nu \rightarrow 0$ ).

Разрывные решения – поперечные ударные волны – реализуются только в рамках адиабатического приближения жесткопластической модели. При наличии вязкости и теплопроводности скачки скорости, напряжения и температуры сглаживаются и превращаются в непрерывные профили. Волна наделяется структурой, исчезающей по мере приближения сглаженных решений к скачкообразным ударноволновым профилям при стремлении коэффициентов  $\mu \rightarrow \infty, \nu \rightarrow 0$  и  $\alpha \rightarrow 0$ .

Рассмотрим класс разрывов, имеющих стационарную структуру. Такие разрывы могут быть приближены решениями системы (1.1) типа бегущих волн. Пусть  $\mu = \infty$ . В этом случае система стационарных уравнений для описания бегущих волн принимает вид

$$\tau' = P(\tau, T), \quad T' = Q(\tau, T); \quad P = \frac{m}{\nu} \theta(\tau - \kappa), \quad Q = \frac{m}{\alpha} U - \frac{\tau^2 - C}{2m\alpha} \quad (1.2)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной  $y = ct - x, c > 0$  – скорость волны,  $m = \rho c, C$  – произвольная постоянная интегрирования.

Если функции  $\tau(y)$  и  $T(y)$  представляют собой решение системы (1.2), то  $\tau(y/\varepsilon)$  и  $T(y/\varepsilon)$  удовлетворяют аналогичной системе уравнений с коэффициентами  $v\varepsilon$ ,  $\alpha\varepsilon$ . Предельный переход по коэффициентам вязкости и теплопроводности эквивалентен стремлению  $\varepsilon \rightarrow 0$  или  $|y| \rightarrow \infty$ . Поэтому вопрос о построении сходящейся последовательности решений с исчезающими коэффициентами сводится к анализу существования бегущих волн – решений системы (1.2), имеющих бесконечную область определения  $-\infty < y < +\infty$  и конечные пределы  $\tau^\pm$ ,  $T^\pm$  при  $y \rightarrow \pm\infty$ . Получаемые в результате предельного перехода по  $\varepsilon$  скачкообразные функции, равные  $\tau^+$ ,  $T^+$  при  $y > 0$  и  $\tau^-$ ,  $T^-$  при  $y < 0$ , описывают стационарно устойчивую поперечную ударную волну пластичности.

Интегральные кривые решений требуемого вида соединяют особые точки системы уравнений (1.2):  $P(\tau, T) = Q(\tau, T) = 0$ . На плоскости  $\tau^2$ ,  $U$  особые точки образуют особые линии – части луча  $\tau^2 = 2m^2U + C$ , расположенные ниже кривой  $\tau = \kappa$ .

В области пластической деформации, где  $\tau > \kappa$ , матрица Якоби системы равна

$$\begin{vmatrix} P_\tau & P_T \\ Q_\tau & Q_T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m/v & -m\kappa_T/v - P(\ln v)_T \\ -\tau/(m\alpha) & mU_T/\alpha - Q(\ln \alpha)_T \end{vmatrix}$$

Собственные числа этой матрицы вычисляются по формуле

$$2\lambda_{1,2} = P_\tau + Q_T \pm \sqrt{(P_\tau - Q_T)^2 + 4P_T Q_\tau}$$

В особых точках системы

$$2\alpha v \lambda_{1,2} = m(\alpha + vU_T) \pm \sqrt{m^2(\alpha - vU_T)^2 + 2\alpha v(\kappa^2)_T}$$

Анализ поля направлений показывает, что концами интегральной кривой для бегущей волны могут быть только граничные точки особых линий. Кроме того, кривая  $\tau = \kappa$  на участке  $T^- < T < T^+$  должна быть монотонной и располагаться ниже луча, как показано на фиг. 2, а. Таким образом, должны выполняться условия ( $\varphi^2 = 2m^2U + C$ ):

$$\tau^\pm = \kappa^\pm, \quad (\varphi^2 - \kappa^2)^\pm = 0, \quad (\varphi^2 - \kappa^2)_T^- > 0, \quad (\varphi^2 - \kappa^2)_T^+ < 0 \quad (1.3)$$

В этом случае начальная точка  $M^-$  является неустойчивым узлом ( $\lambda_1 \neq \lambda_2 > 0$ ), а конечная  $M^+$  – седлом ( $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ). Вектор касательной к устойчивой сепаратрисе седла ( $\delta\tau^2$ ,  $\delta U$ ) удовлетворяет соотношениям

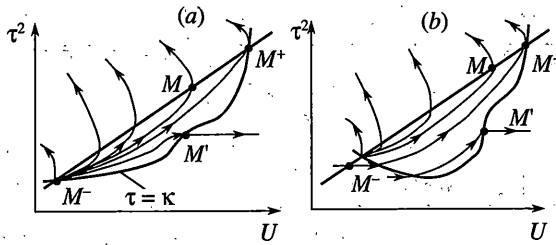
$$\frac{P_\tau \delta\tau + P_T \delta T}{\delta\tau} = \frac{Q_\tau \delta\tau + Q_T \delta T}{\delta T} = \lambda_2 < 0$$

из которых с учетом равенств  $\delta\tau = \delta\tau^2/(2\kappa)$ ,  $\delta T = \delta U/U_T$  можно получить

$$2m^2 < \delta\tau^2/\delta U < d\kappa^2/dU$$

Следовательно, одна из ветвей сепаратрисы попадает в область между лучом и кривой, изображенными на фиг. 2, а.

Через любую точку  $M$ , лежащую на луче, проходит интегральная кривая системы с началом в узле  $M^-$ . Устремляя  $M$  вдоль луча к точке  $M^+$ , построим по непрерывности искомую интегральную кривую. Через точку  $M^+$  участка кривой  $\tau = \kappa$  также проходит интегральная кривая из узла  $M^-$ . Устремляя  $M$  к точке  $M^+$ , можно снова построить интегральную кривую, соединяющую особые точки. Так как точка  $M^+$  – седло и в ней заканчивается только одна ветвь сепаратрисы, приходящая из указанной области, то эти две интегральные кривые совпадают. Таким образом, перечисленные выше условия



Фиг. 2

гарантируют существование единственного при фиксированном значении  $C$  стационарного решения, описывающего структуру.

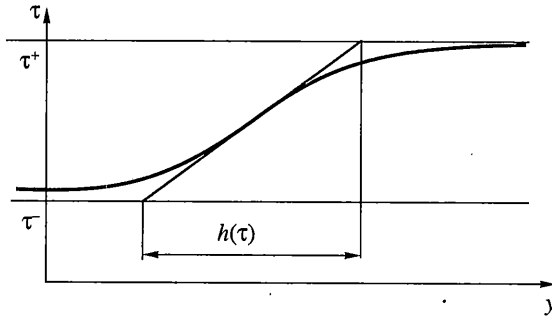
Существенно, что поперечная ударная волна со значениями  $\tau^\pm$  и  $T^\pm$  получается из этого решения независимо от порядка стремления к нулю коэффициентов вязкости и теплопроводности. Рассмотрим случай немонотонной кривой  $\tau = \kappa$ , имеющей участок убывания вблизи левой точки пересечения с лучом (фиг. 2, *b*). В этом случае при заданных  $\nu$  и  $\alpha$  также существует единственная интегральная кривая, соединяющая две особые точки системы (1.2). Конечная точка  $M^+$  остается прежней, а начальная  $M^-$  лежит на особой линии в области разгрузки  $\tau \leq \kappa$ . Интегральная кривая строится тем же методом. Соответствующее ей решение описывает непрерывный переход среды из жесткого состояния в состояние пластичности. Жесткому состоянию отвечает прямолинейный участок интегральной кривой с постоянным касательным напряжением. На этом участке происходит только необратимый тепловой процесс выравнивания температурного поля. На участке пластичности рост температуры обусловлен двумя факторами: теплопроводностью среды и диссипацией механической энергии. Стремление коэффициентов  $\nu$  и  $\alpha$  к нулю при постоянном их отношении дает разрывное решение. Однако получаемый таким образом скачок неустойчив, так как зависит от порядка предела.

Действительно, если  $\nu \rightarrow 0$ , а  $\alpha$  не изменяется, то поле направлений системы в исследуемой области разворачивается вертикально вверх. Интегральная кривая приближается к двухзвенной линии, образованной звеном  $\tau = \kappa$  и касательной к этому звену, параллельной горизонтальной оси. Если  $\nu$  не изменяется, а  $\alpha \rightarrow 0$ , то интегральная кривая превращается в прямолинейный отрезок с концами – граничными точками особых линий. Варьируя отношение  $\nu/\alpha$ , можно построить интегральную кривую, начальная точка которой занимает любое промежуточное положение. Поскольку угол наклона луча остается при этом одним и тем же, то величина скорости распространения для всех получаемых скачков постоянна. Состояние за фронтом также фиксировано. Следовательно, речь идет о неустойчивом относительно вариации коэффициентов ударноволновом переходе, состоянии перед фронтом которого неоднозначно.

Отмеченная неустойчивость указывает на принципиальную нереализуемость поперечных ударных волн в пластической среде в состоянии температурного разупрочнения материала.

Пусть  $\nu$  и  $\alpha$  – постоянные величины. В этом случае можно вывести конечные формулы для вычисления характерных размеров сглаженных фронтов. Ширина фронта волны напряжения оценивается через один из катетов прямоугольного треугольника, гипотенузой которого служит касательная к профилю волны  $\tau = \tau(y)$  в точке перегиба (фиг. 3):

$$h(\tau) = [\tau] / \max P(\tau, T) \quad ([\tau] = \tau^+ - \tau^-) \quad |\nu| < \infty$$



Фиг. 3

В точке перегиба выполняется уравнение

$$\tau'' = 0: \quad \tau^2 + 2\beta\tau - 2m^2U - 2\beta\kappa - C = 0 \quad \left( \beta = \frac{m^2\alpha}{\nu\kappa_T} \right)$$

из которого следует, что при  $\nu \rightarrow 0$ :

$$h(\tau) \rightarrow 2m\alpha[\tau]/\{\kappa_T(\varphi^2 - \kappa^2)\}$$

При  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$h(\tau) \rightarrow \nu[\tau]/\{m(\varphi - \kappa)\}$$

следовательно, ширина фронта стремится к нулю, только если одновременно стремятся к нулю коэффициенты вязкости и теплопроводности.

Замена правых частей в этих формулах минимальными значениями по отрезку  $[T^-, T^+]$  дает оценки для  $h(\tau)$ , не зависящие от положения точки перегиба. Они являются предельными вариантами общей оценки

$$h(\tau) \geq \frac{\nu}{m}[\tau] / \max_{T^- \leq T \leq T^+} \{ \sqrt{(\beta + \kappa)^2 + \varphi^2 - \kappa^2} - \beta - \kappa \} \quad (1.4)$$

Характерная ширина фронта температурной волны определяется аналогично. В точке перегиба профиля волны выполняется уравнение

$$T'' = 0: \quad (1 + \chi)\tau^2 - \kappa\tau - \chi\varphi^2 = 0 \quad \left( \chi = \frac{\nu U_T}{2\alpha} \right)$$

с помощью которого доказывается, что

$$h(T) \rightarrow 2m\alpha[T]/(\varphi^2 - \kappa^2) \quad \text{при } \nu \rightarrow 0$$

$$h(T) \rightarrow m\nu U_T[T]/\{\varphi(\varphi - \kappa)\} \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0$$

Полученные формулы позволяют сравнить размеры фронтов ударных волн в невязкой среде, обладающей теплопроводностью, и в вязкой нетеплопроводной среде. Общая оценка ширины фронта принимает вид

$$h(T) \geq 4m\alpha[T] / \max_{T^- \leq T \leq T^+} \frac{2(1 + \chi)\varphi^2 - \kappa^2 - \kappa\sqrt{\kappa^2 + 4\chi(1 + \chi)\varphi^2}}{(1 + \chi)^2} \quad (1.5)$$

Проведенный анализ устойчивости поперечных ударных волн касается только случая  $\mu = \infty$ . При конечном коэффициенте вязкости интегральных кривых, обладающих требуемыми свойствами, не существует. Однако, учитывая непрерывную зависимость решения задачи Коши для системы (1.1) от параметра  $1/\mu$ , можно приблизить бегущие волны системы уравнений (1.2) сходящимися при  $\mu \rightarrow \infty$  последовательностями вязких стационарных решений. Таким образом, введение этого коэффициента не приводит к изменению устойчивых ударных волн.

**2. Ударная адиабата.** Рассмотрим одномерную задачу о распространении в жестко-пластическом полупространстве поперечных волн, вызванных мгновенным приложением к его границе постоянного касательного напряжения. Предположим, что теплопроводностью среды можно пренебречь, и что в начальный момент времени полупространство находится в равномерном предельном термонапряженном состоянии. Так как при  $\mu = \infty, v = \alpha = 0$  система уравнений (1.1), начальные данные и граничные условия инвариантны относительно растяжения пространственной координаты и времени, то решение задачи автомодельно. В области непрерывности решения выполняется система

$$-\rho \xi v' = \tau', \quad -\rho \xi U' = \tau v', \quad \tau = \kappa \tag{2.1}$$

где  $\xi = x/t$  – автомодельная переменная. Кроме равномерного состояния система (2.1) описывает центрированные простые волны, для которых

$$2(\rho \xi)^2 = d\kappa^2/dU \tag{2.2}$$

Центрированная волна появляется, если участок кривой  $\tau = \kappa$ , соединяющий точки  $M^-$  и  $M^+$ , первая из которых отвечает начальному состоянию полупространства (состоянию перед фронтом волны), а вторая – состоянию на границе (за фронтом волны), является выпуклым вверх.

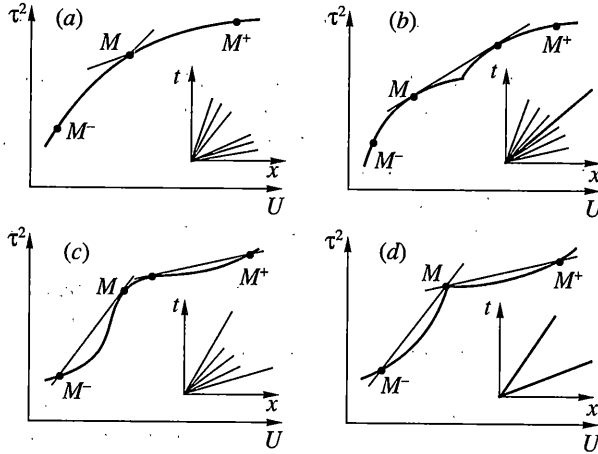
Если на этом участке имеются угловые точки, то каждой из таких точек соответствует область постоянного решения (фиг. 4, а). Границы области на  $x, t$  – диаграмме определяются через односторонние касательные в угловой точке по уравнению (2.2).

Как было установлено, вблизи невыпуклого участка кривой реализуется сильный разрыв. В случае переменной выпуклости волновая картина может состоять из двух или нескольких центрированных волн, разделенных между собой разрывами. Скорость каждого разрыва вычисляется через угол наклона общей касательной к соседним участкам выпуклости (см. фиг. 4, б). Возможна также система разрывов, соединенных центрированными волнами (фиг. 4, в). Точки перехода от разрывов к центрированным волнам также являются точками касания соответствующих лучей и кривой. Если касание происходит в угловой точке, то центрированная волна заменяется областью равномерного состояния (фиг. 4, д).

Более простая картина возникает при разгрузке, когда точка  $M^+$  лежит ниже  $M^-$ . В этом случае разрыв имеет бесконечную скорость распространения. За его фронтом мгновенно устанавливается равномерное напряженное состояние, которое можно определить предельным переходом на основе модели вязкой теплопроводной среды. В силу (1.1) в области разгрузки выполняется система уравнений

$$\rho(\tau/\mu)_t = \tau_{xx}, \quad \rho U_t = \tau^2/\mu + (\alpha T_x)_x \tag{2.3}$$

при  $t = 0$  – начальные данные  $\tau = \tau^+, T = T^+$ , а при  $x = 0$  – граничные условия  $\tau = \tau^+, T = T^+$ . Предположим, что  $\mu$  – константа. Тогда система (2.3) расщепляется. Функция  $\tau(t, x/\sqrt{\epsilon})$ , где  $\tau(t, x)$  – решение первого уравнения, удовлетворяет условиям задачи и аналогичному уравнению с коэффициентом вязкости  $\mu/\epsilon$ . Предельный переход по  $\mu$  при  $\mu \rightarrow \infty$



Фиг. 4

эквивалентен стремлению  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При этом  $\tau \rightarrow \tau^+$ , следовательно, в жесткопластической среде при разгрузке мгновенно устанавливается напряжение, действующее на границе полупространства.

Второе уравнение системы в пределе переходит в квазилинейное уравнение теплопроводности без диссипации механической энергии. Функция  $T(t\varepsilon, x)$ , определяемая через его решение, удовлетворяет такому же уравнению с коэффициентом  $\alpha\varepsilon$ . Стремление  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ) показывает, что  $T \rightarrow T^*$ . Таким образом, при отсутствии теплопроводности среды за фронтом волны разгрузки сохраняется начальное однородное поле температуры.

Всевозможные состояния  $M^+$  на плоскости  $\tau^2, U$ , переход в которые из состояния  $M^-$  осуществляется при помощи уединенного скачка, образуют ударную адиабату пластического сдвига. Ударная адиабата состоит из двух ветвей, первая из которых отвечает стационарно устойчивым пластическим волнам, а вторая – волнам разгрузки. В зависимости от выпуклости функции  $\kappa^2(U)$  и от положения точки  $M^-$  ветвь нагружения может состоять из нескольких отдельных участков или вовсе отсутствовать. Ветвь разгрузки представляет собой отрезок луча, выходящего из точки  $M^-$  вертикально вниз.

**3. Температурное разупрочнение.** Вблизи убывающего участка кривой  $\tau = \kappa$  жесткопластическая модель становится некорректной. В соответствии с этой моделью, процесс активного нагружения осуществить невозможно, поскольку диссипация механической энергии приводит к повышению температуры среды и падению касательного напряжения. Система дифференциальных уравнений, описывающая адиабатическое деформирование, принимает эллиптический тип. В силу бесконечной области зависимости решения для такой системы проявляется аномальный эффект “опережающей памяти” (см. [8–11]). Легко убедиться, что рассматриваемая задача, решение которой должно быть автомодельным, неразрешима как в классе центрированных волн, так и в классе устойчивых сильных разрывов.

Исследуем эту задачу на основе модели вязкопластической теплопроводной среды с  $\mu = \infty$ . Пусть скачки касательного напряжения и температуры много меньше величин  $\tau = \kappa(T)$  и  $T$  соответственно. В этом случае можно перейти от системы уравнений (1.1) к линеаризованной системе

$$\rho \delta v_t = \delta \tau_x, \quad \delta v_x = \theta(\delta \tau - \kappa_T^- \delta T) / v^-, \quad \rho U_T^- \delta T_t = \tau^- \delta v_x + \alpha^- \delta T_{xx} \quad (3.1)$$

Здесь символом  $\delta$  отмечены возмущения искоемых функций. Линеаризация проведена на начальном состоянии полупространства. Стандартная процедура обезразмеривания по отношению к параметрам

$$T_0 = \frac{\tau^-}{\rho U_T}, \quad \tau_0 = -\kappa_T^- T_0, \quad \nu_0 = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad x_0 = \frac{\nu^-}{\rho \nu_0}, \quad t_0 = \frac{x_0}{\nu_0}$$

позволяет привести систему (3.1) к следующей форме:

$$\delta \nu_t = \delta \tau_x, \quad \delta \nu_x = \theta(\delta \tau + \delta T), \quad \delta T_t = \delta \nu_x + a \delta T_{xx} \quad \left( a = \frac{\alpha^-}{\nu^- U_T} \right) \quad (3.2)$$

Входящие сюда возмущения удовлетворяют однородным начальным условиям. Граничные значения для  $\delta \tau$  и  $\delta T$  равны  $[\tau]/\tau_0$  и  $[T]/T_0$ . В области вязкопластической деформации выполняется система

$$\delta \tau_t + \delta T_t = \delta \tau_{xx}, \quad \delta T_t = \delta \tau + \delta T + a \delta T_{xx}$$

из которой можно получить отдельные для  $\delta \tau$  и  $\delta T$  уравнения вида

$$(a + 1)u_{txx} = u_{tt} + u_{xx} + au_{xxxx} \quad (3.3)$$

а также дополнительные краевые условия:  $\delta \tau_t = \delta T_t = 0$  при  $t = 0$  и  $\delta \tau_{xx} = 0$ ,  $\delta T_{xx} = -(\delta \tau + \delta T)$  при  $x = 0$ . Общее решение данного уравнения может быть найдено с помощью преобразования Лапласа по времени. В случае  $a = 0$  изображения возмущений напряжения и температуры равны

$$\delta \hat{\tau} = \frac{[\tau]}{p \tau_0} \exp \frac{-px}{\sqrt{p-1}}, \quad \delta \hat{T} = \frac{\delta \hat{\tau}}{p-1} \quad (3.4)$$

Решение задачи является решением типа пограничного слоя. Для оценки ширины зоны локализации касательного напряжения введем безразмерный параметр  $l(\tau) = \delta \tau(t, 0)/|\delta \tau_x(t, 0)|$ , по смыслу аналогичный ширине фронта ударной волны. Этот параметр определяется в явной форме по таблицам обращения преобразования Лапласа как

$$l(\tau) = e^{-t} \sqrt{\pi t} \quad (3.5)$$

Максимальное значение  $l(\tau)$  достигается при  $t = 0.5$  и равно  $\sqrt{\pi/(2e)}$ . При  $t > 0.5$  величина  $l(\tau)$  быстро убывает.

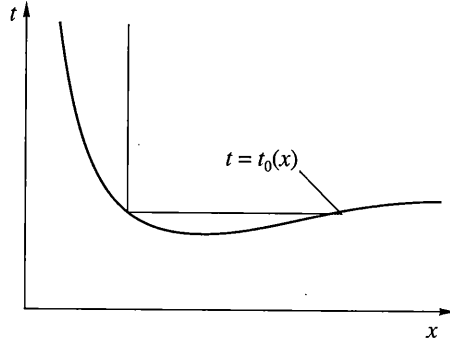
В соответствии с формулами (3.4) на границе полупространства происходит экспоненциальный рост температуры:  $\delta T = (e^t - 1)[\tau]/\tau_0$ . Зона локализации температуры изменяется со временем по закону

$$l(T) = \frac{1 - e^{-t}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \quad (3.6)$$

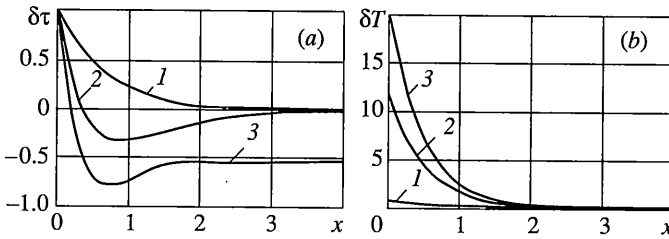
Параметр  $l(T)$  служит также для вычисления ширины зоны локализации деформации сдвига, так как в силу (3.2) в нетеплопроводной среде сдвиг и безразмерное возмущение температуры совпадают между собой.

Заметим, что параметры (3.5), (3.6) имеют придаваемый им смысл только на конечном промежутке времени. В некоторый момент внутри полупространства происходит разгрузка и структура решения становится более сложной. Возникает задача с неизвестной границей  $t = t^0(x)$ , разделяющей область решения на две части. В области вязкопласт-





Фиг. 5



Фиг. 6

тического сдвига  $t < t^0(x)$  выполняются уравнения вида (3.3) и неравенство  $\delta t + \delta T > 0$ . В разгруженной жесткой области  $t > t^0(x)$ , где  $\delta t + \delta T < 0$ , выполняется гиперболическая система  $\delta \tau_{,xx} = \delta T_t = 0$  с характеристиками, параллельными координатным осям (фиг. 5). Решение в этой области должно быть ограниченным при  $x \rightarrow \infty$ . Для определения неизвестной границы кроме условий непрерывности напряжения и температуры ставится условие непрерывности производной  $\delta \tau_x$ , вытекающее из обобщенной постановки задачи.

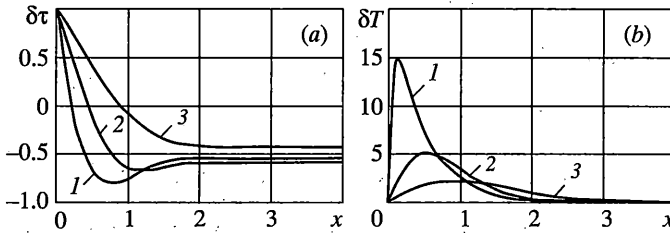
Момент наступления разгрузки равен минимальному значению функции  $t(x)$ , характеризующей время перемены знака выражения  $\delta t + \delta T$ , найденного по решению (3.4). Эту функцию можно определить методами операционного исчисления как предел

$$t(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{P_n(x)}$$

где  $P_n(x)$  – наименьший из действительных нулей производной порядка  $n$  от изображения  $\delta \hat{t} + \delta \hat{T}$ . Поиск нулей приводит к проблеме нахождения корней многочлена степени  $2n$ , зависящего от комплексной переменной  $z = \sqrt{p-1}$ . По результатам вычислений, проведенных при помощи компьютерной системы Matlab, приближенное значение времени разгрузки равно 2.61.

Численное решение задачи на основе неявной разностной схемы для системы уравнений (3.2) с применением параболической регуляризации, после которой второе уравнение приводится к виду

$$\delta v_x = R \delta \tau + \theta (\delta \tau + \delta T)$$



Фиг. 7

( $R$  – малый параметр регуляризации), дало примерно такое же значение. Результаты расчетов по этой схеме представлены на фиг. 6, 7. На фиг. 6 приведены эпюры возмущений напряжения и температуры в нетеплопроводной среде, относящиеся к различным моментам времени  $t = 0.5$ ,  $t = 2.5$  и  $t = 3$  (кривые 1, 2 и 3). Кривые, изображенные на фиг. 7, получены в момент времени  $t = 3$  при различных значениях безразмерного коэффициента теплопроводности  $a = 0.0001$ ,  $a = 0.05$  и  $a = 0.25$ . В этих расчетах возмущение температуры на границе полупространства принималось равным нулю. Судя по численным результатам, теплопроводность среды оказывает существенное влияние на характер локализации решения вблизи границы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99-01-00453, 01-01-00921).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быковцев Г.И., Кретова Л.Д. О распространении ударных волн в упругопластических средах // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 106–116.
2. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Рычков В.А. Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред // Проблемы механики сплошной среды. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН. 1996. С. 116–127.
3. Садовский В.М. Упругопластические волны сильного разрыва в линейно упрочняющихся средах // Изв. АН. МТТ. 1997. № 6. С. 104–111.
4. Садовский В.М. Регулярные разрывы решения в динамике нелинейно упрочняющейся упругопластической среды // Проблемы механики сплошной среды и элементов конструкций. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН. 1998. С. 179–188.
5. Пачепский Я.А. О структуре ударных волн в упругопластической среде // ПММ. 1973. Т. 37. № 2. С. 300–305.
6. Друянов Б.А., Святова Е.А. Задача о структуре разрыва в упрочняющейся пластической среде // ПММ. 1987. Т. 51. № 6. С. 1047–1049.
7. Kukudjanov V.N. Investigation of shock wave structure in elasto-viscoplastic bars using asymptotic method // Arch. Mech. 1981. V. 33. № 5. P. 739–751.
8. Ключников В.В. Теория пластичности: современное состояние и перспективы // Изв. АН. МТТ. 1993. № 2. С. 102–116.
9. Никитин Л.В. Закрытое поведение разупрочняющегося материала // ДАН. 1995. Т. 342. С. 487–490.
10. Кукуджанов В.Н. О структуре полос локализации деформации в нелокальной теории пластичности при динамическом нагружении // Изв. АН. МТТ. 1998. № 6. С. 104–114.
11. Победра Б.Е. Модели механики сплошной среды // Изв. АН. МТТ. 2000. № 3. С. 47–59.