МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2003

УДК 539.3

© 2003 г. Г.Я. ПОПОВ

# ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЧЕТВЕРТЬПРОСТРАНСТВА

Построено точное решение теории упругости для четверти пространства в случае, когда на одной грани заданы напряжения, а на другой – смещения. Метод построения точного решения базируется на преобразовании уравнений Ламе к одному независимо решаемому и двум совместно решаемым уравнениям с последующим приведением проблемы с помощью интегральных преобразований к векторной одномерной краевой задаче и ее решению известными приемами.

**1. Введение и постановка задачи.** Четверть пространства представляет собой частный случай ($\varphi_0 = \pi/2$) пространственного клина, определяемого в цилиндрической системе координат соотношениями $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi \le \varphi_0$, $-\infty < z < \infty$. Впервые вторую краевую задачу (заданы смещения) для пространственного клина решил точно Я.С. Уфлянд [1]. В другой работе [2] им получено точное решение для случая, когда на гранях клина задана скользящая заделка т.е. заданы нормальные смещения и касательные напряжения. Там же получено точное решение и для первой основной задачи (на гранях заданы напряжения), но только в случае несжимаемой упругой среды (коэффициент Пуассона $\mu$ равен 1/2).

Таким образом точное решение для четверти пространства имеется только для случая, когда на обоих гранях заданы либо смещения, либо скользящая заделка. Точное решение для случая первой основной задачи (на гранях заданы напряжения), либо для смешанной задачи (на гранях заданы разнотипные граничные условия) в настоящее время отсутствует. Имеются только приближенные подходы к решению (например, [3]).

Здесь для четверти пространства $0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 < z < \infty$, ставится такая задача: на грани $x = 0$, задаются смещения, т.е.

$$u_x(0, y, z) = u_y(0, y, z) = u_z(0, y, z) = 0 \tag{1.1}$$

на грани $z = 0$ условия могут быть произвольными, но для определенности примем наиболее интересные условия первой основной задачи, т.е.

$$\sigma_z\big|_{z=0} = -p(x, y), \quad \tau_{zx}\big|_{z=0} = \tau_{zy}\big|_{z=0} = 0 \tag{1.2}$$

Целью статьи является построение точного решения поставленной задачи.

**2. Метод решения.** Он основан на предварительном приведении системы из трех уравнений Ламе, записанной в декартовой системе координат, к одному независимо решаемому и к системе из двух совместно решаемых уравнений. С этой целью введем обозначения ($G$ – модуль сдвига):

$$2G(u_x, u_y, u_z) = u, v, w \tag{2.1}$$

и условимся частную производную функции $f(x, y, z)$ по первой переменной обозначать штрихом, по второй – точкой, а по третьей – запятой, т.е.

$$\partial f/\partial x = f', \quad \partial f/\partial y = f^{\bullet}, \quad \partial f/\partial z = f^{,} \tag{2.2}$$

Кроме того введем две новых функции

$$Z = u' + \dot{v}, \quad Z^* = v' - \dot{u} \tag{2.3}$$

С учетом обозначений (2.1)–(2.3) уравнения Ламе при отсутствии массовых сил [4] можно записать в виде ($\Delta$ – оператор Лапласа):

$$\begin{aligned} &\Delta u + \mu_0(Z + w')' = 0, \quad \mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1} \\ &\Delta v + \mu_0(Z + w')^{\bullet} = 0, \quad \Delta w + \mu_0(Z + w')' = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Продифференцируем первое уравнение из (2.4) по $x$, а второе по $y$ и результаты сложим. В результате приходим к уравнению, которое вместе с третьим уравнением из (2.4) образуют систему из двух совместно решаемых уравнений:

$$\begin{aligned} &\Delta Z + \mu_0 \nabla_{xy}(Z + w') = 0, \quad \Delta w + \mu_0(Z + w')' = 0 \\ &\nabla_{xy} f(x, y, z) = f'' + \ddot{f} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Если же второе уравнение из (2.4) продифференцировать по $x$, а первое уравнение по $y$ и результаты вычесть, то, учитывая (2.3), получим уравнение

$$\Delta Z^* = 0 \tag{2.6}$$

Если функции $w$ и $Z$ будут найдены из системы (2.5), а $Z^*$ из уравнения (2.6), то для отыскания смещений $u$ и $v$ следует решить уравнения Пуассона:

$$\nabla_{xy} \begin{Vmatrix} u \\ v \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z' - \dot{Z}^* \\ \dot{Z} + Z^{*\prime} \end{Vmatrix} \tag{2.7}$$

Для получения первого уравнения из (2.7) следует первое равенство из (2.3) продифференцировать по $x$, а второе равенство из (2.3) по $y$ и результаты вычесть. С помощью аналогичной операции получается и второе уравнение из (2.7)

Представляется удобным по аналогии с (2.3) ввести следующие комбинации из касательных напряжений:

$$\begin{Vmatrix} \tau \\ \tau^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \tau'_{zx} + \dot{\tau}_{zy} \\ \tau'_{zy} - \dot{\tau}_{zx} \end{Vmatrix} \tag{2.8}$$

для которых можно получить формулы

$$2\tau = \nabla_{xy} w + Z', \quad 2\tau^* = Z^{*\prime} \tag{2.9}$$

а для нормального напряжения $\sigma_z$ формулу

$$(1 - 2\mu)\sigma_z = \mu Z + (1 - \mu)w' \tag{2.10}$$

Используя введенные функции, граничные условия (1.1) поставленной задачи можем записать в виде

$$u(0, y, z) = v(0, y, z) = w(0, y, z) = 0 \tag{2.11}$$

а условия (1.2) с учетом (2.8), (2.9) и (2.10) в виде

$$\begin{aligned} &[\nabla_{yx} w + Z']_{z=0} = 0, \quad Z^{*\prime}|_{z=0} = 0 \\ &\mu Z|_{z=0} + (1 - \mu) w'|_{z=0} = -(1 - 2\mu) p(x, y) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Перейдем в приведенных соотношениях от искомых и заданных функций к их трансформантам Фурье по переменной $y$

$$\left\|\begin{matrix} w_\beta(x,z) \\ Z_\beta(x,z) \end{matrix}\right\| = \int_{-\infty}^{\infty} \left\|\begin{matrix} w(x,y,z) \\ Z(x,y,z) \end{matrix}\right\| e^{i\beta y} dy \qquad (2.13)$$

Аналогично определяются $u_\beta(x, z)$, $\upsilon_\beta(x, z)$, $Z^*_\beta(x, z)$, $p_\beta(x, z)$. На языке введенных трансформант, уравнения (2.5) и (2.6) запишут в виде

$$\begin{aligned} & w''_\beta(x,z) + \mu_*^{-1}[w''_\beta(x,z) - \beta^2 w_\beta(x,z)] + \mu_0\mu_*^{-1}Z'_\beta(x,z) = 0 \\ & Z''_\beta(x,z) + \mu_*[Z''_\beta(x,z) - \beta^2 Z_\beta(x,z)] + \mu_0[w''_\beta(x,z) - \beta^2 w_\beta(x,z)]' = 0 \end{aligned} \qquad (2.14)$$

$$Z^{*}_\beta{}''(x,z) + Z^{*}_\beta{}''(x,z) - \beta^2 Z^*_\beta(x,z) = 0, \quad \mu_* = 2(1-\mu)\mu_0 \qquad (2.15)$$

При этом граничные условия (2.11), (2.12) запишутся так

$$u_\beta(0,z) = \upsilon_\beta(0,z) = w_\beta(0,z) = 0 \qquad (2.16)$$

$$[w''_\beta(x,z) - \beta^2 w_\beta(x,z) + Z'_\beta(x,z)]\big|_{z=0} = 0, \quad Z^{*}_\beta{}'(x,0) = 0 \qquad (2.17)$$

$$\mu Z_\beta(x,0) + (1-\mu)w'_\beta(x,0) = -(1-2\mu)p_\beta(x) \qquad (2.18)$$

**3. Сведение поставленной задачи к векторной одномерной краевой задаче и ее решение.** Будем считать, что помимо граничных условий (2.16)–(2.18), диктуемых постановкой задачи, выполняются дополнительные условия

$$Z_\beta(0,z) = 0, \quad Z^*_\beta(0,z) = 0 \qquad (3.1)$$

Тогда функция $Z^*_\beta(x, z)$ будет удовлетворять однородной краевой задаче и потому можно принять

$$Z^*_\beta(x,z) \equiv 0, \quad Z^*(x,y,z) \equiv 0 \qquad (3.2)$$

Чтобы выполнялись граничные условия (2.16) и первое условие из (3.1), перейдем от искомых функций к синус-трансформантам Фурье, т.е.

$$\left\|\begin{matrix} w_{\beta\alpha}(z) \\ Z_{\beta\alpha}(z) \end{matrix}\right\| = \int_0^{\infty} \left\|\begin{matrix} w_\beta(x,z) \\ Z_\beta(x,z) \end{matrix}\right\| \sin\alpha x dx \qquad (3.3)$$

Аналогично определяются трансформанты $u_{\beta\alpha}(z)$, $\upsilon_{\beta\alpha}(z)$ и $p_{\beta\alpha}$. На языке этих трансформант система уравнений (2.14) переходит к следующей одномерной системе:

$$\begin{aligned} & w''_{\beta\alpha}(z) - \mu_*^{-1}N^2_{\beta\alpha}w_{\beta\alpha}(z) + \mu_*^{-1}\mu_0 Z'_{\beta\alpha}(z) = 0, \quad N^2_{\alpha\beta} = \alpha^2 + \beta^2 \\ & Z''_{\beta\alpha}(z) - N^2_{\beta\alpha}[\mu_* Z_{\beta\alpha}(z) + \mu_0 w'_{\beta\alpha}(z)] = 0, \quad 0 < z < \infty \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Граничные условия для этой системы согласно (2.17) и (2.18) будут иметь вид

$$\begin{aligned} & -N^2_{\alpha\beta}w_{\beta\alpha}(0) + Z'_{\beta\alpha}(0) = 0 \\ & \mu Z_{\beta\alpha}(0) + (1-\mu)w'_{\beta\alpha}(0) = -(1-2\mu)p_{\beta\alpha} \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Если будет решена краевая задача (3.4), (3.5), то трансформанты смещений $u_{\beta\alpha}(z)$ и $v_{\beta\alpha}(z)$, найдем из уравнений (2.7), применив к ним преобразования (2.13) и (3.3) с учетом (3.2). В результате получим

$$\begin{Vmatrix} u_{\beta\alpha}(z) \\ v_{\beta\alpha}(z) \end{Vmatrix} = \frac{1}{N^2_{\beta\alpha}} \begin{Vmatrix} -J_{\beta\alpha}(z) \\ i\beta Z_{\beta\alpha}(z) \end{Vmatrix}, \quad J_{\beta\alpha}(z) = \int_0^\infty Z'_\beta(s,z)\sin\alpha s ds \tag{3.6}$$

Займемся решением краевой задачи (3.4), (3.5). Запишем ее в векторном виде. Для этого введем искомый вектор $y(z)$ и матрицы

$$y(z) = \begin{Vmatrix} w_{\beta\alpha}(z) \\ Z_{\beta\alpha}(z) \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} \mu_*^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_* \end{Vmatrix}, \quad Q_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} 0 & \mu_*^{-1} \\ -N^2_{\alpha\beta} & 0 \end{Vmatrix} \tag{3.7}$$

Тогда система (3.4) примет вид

$$L_2 y(z) \equiv I\cdot y''(z) + \mu_0 Q_{\alpha\beta} y'(z) - N^2_{\alpha\beta} P y(z) = 0, \quad 0 < z < \infty \tag{3.8}$$

Для записи граничных условий (3.5) введем граничный функционал

$$U[y(z)] = Ay(0) + By'(0) \tag{3.9}$$

Если дополнительно ввести вектор $\gamma$ и определить его и матрицы $A$ и $B$ формулами

$$\gamma = \begin{Vmatrix} 0 \\ p_{\beta\alpha} \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} -N^2_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \mu \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1-\mu & 0 \end{Vmatrix} \tag{3.10}$$

то граничные условия (3.5) можно записать в виде

$$U[y(z)] \equiv Ay(0) + By'(0) = -(1-2\mu)\gamma \tag{3.11}$$

Для решения уравнения (3.8) формируем матрицу

$$M_{\alpha\beta}(s) = Is^2 + \mu_0 Q_{\alpha\beta} s - N^2_{\alpha\beta} P \tag{3.12}$$

Тогда решение матричного уравнения

$$L_2 Y(z) = 0 \tag{3.13}$$

можно записать в виде контурного интеграла [5, 6]:

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sz} M^{-1}_{\alpha\beta}(s) ds \tag{3.14}$$

где $C$ – замкнутый контур, охватывающий полюса матрицы $M^{-1}_{\alpha\beta}(s)$ обратной к (3.12). Для построения последней находки определитель матрицы (3.12):

$$\det M_{\alpha\beta}(s) = s^4 - 2N^2_{\alpha\beta}s^2 + N^4_{\alpha\beta} = (s^2 - N^2_{\alpha\beta})^2 = p_4(s) \tag{3.15}$$

и пользуемся представлением [5, 6]:

$$M^{-1}_{\alpha\beta}(s) = \frac{1}{p_4(s)}\sum_{j=0}^{2} \Gamma^{(j)}_{\beta\alpha} s^j \tag{3.16}$$

где матрицы $\Gamma_{\beta\alpha}^{(j)}$ не зависящие от переменной $s$, находим из легко проверяемого равенства

$$Ip_4(s) = M_{\alpha\beta}(s)\sum_{j=0}^{2}\Gamma_{\beta\alpha}^{(j)}s^j$$

путем приравнивая коэффициентов при одинаковых степенях $s$. В результате получаем

$$\Gamma_{\beta\alpha}^{(0)} = -N_{\alpha\beta}^2\begin{Vmatrix}\mu_* & 0\\ 0 & \mu_*^{-1}\end{Vmatrix}, \quad \Gamma_{\beta\alpha}^{(1)} = -\mu_0 Q_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\beta\alpha}^{(2)} = I \tag{3.17}$$

Чтобы получить решение матричного уравнения (3.13) следует подставить (3.16) в (3.14) с учетом (3.15). В результате приходим к формуле

$$Y(z) = \sum_{j=0}^{2}\Gamma_{\beta\alpha}^{(j)}\left(\frac{d}{dz}\right)^j y_{\mp}(z), \quad y_{\mp}(z) = \operatorname{Res}\left[\frac{e^{sz}}{(s-N_{\alpha\beta})^2(s+N_{\alpha\beta})^2}\right]_{s=\mp N_{\alpha\beta}} \tag{3.18}$$

Как видно из (3.15) характеристический многочлен $p_4(s)$ имеет два кратных нуля в точках $s = -N_{\alpha\beta}$ и $s = +N_{\alpha\beta}$. Вычет в точке $s = -N_{\alpha\beta}$ дает решение $y_-(z)$ убывающее при $z \to \infty$, а вычет в точке $s = +N_{\alpha\beta}$ – решение $y_+(z)$, растущее при $z \to \infty$, которое следует отбросить. На основании (3.18) имеем

$$y_-(z) = (4N_{\alpha\beta}^3)^{-1}e^{-N_{\alpha\beta}z}(N_{\alpha\beta}z+1) \tag{3.19}$$

Подставляя это выражение в (3.18) после использования (3.17), получаем убывающее при $z \to \infty$ решение уравнения (3.13) в виде (постоянный множитель отбрасываем):

$$Y(z) = e^{-N_{\alpha\beta}z}\begin{Vmatrix}-\mu_0(N_{\alpha\beta}z+\kappa) & (2-2\mu)^{-1}z\\ -\mu_0 N_{\alpha\beta}^2 z & (2-2\mu)^{-1}(N_{\alpha\beta}z-\kappa)\end{Vmatrix}, \quad \kappa = 3-4\mu \tag{3.20}$$

По полученному решению строим базисную матрицу $\Psi(z)$, представляющую собой, решение краевой задачи [6]:

$$L_2\Psi(z) = 0, \quad U[\Psi(z)] = I \tag{3.21}$$

Ее строим в виде [6]:

$$\Psi(z) = Y(z)C, \quad C = (U[Y(z)])^{-1} \tag{3.22}$$

С учетом (3.20), (3.9) и (3.10) имеем

$$U[Y(z)] = \begin{pmatrix}2N_{\alpha\beta}^2 & 2N_{\alpha\beta}\\ (1-\mu)2N_{\alpha\beta} & (\mu_0\mu_*)^{-1}\end{pmatrix}$$

Обратив эту матрицу согласно (3.22) найдем

$$\Psi(z) = -\frac{1-\mu}{e^{N_{\alpha\beta}z}N_{\alpha\beta}^2}\begin{pmatrix}\dfrac{-(1-2\mu)-N_{\alpha\beta}z}{2(1-\mu)} & \mu_0 N_{\alpha\beta}\left(2+\dfrac{N_{\alpha\beta}z}{1-\mu}\right)\\ N_{\alpha\beta}\left(1-\dfrac{N_{\alpha\beta}z}{2(1-\mu)}\right) & \dfrac{N_{\alpha\beta}^2}{1-\mu}\left(\dfrac{N_{\alpha\beta}z}{1-2\mu}-1\right)\end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Легко убедиться, учитывая (3.21), что решение краевой задачи (3.8) и (3.11), дается формулой $y(z) = -(1-2\mu)\Psi(z)\gamma$. Откуда, учитывая (3.7) и (3.23), находим

$$\begin{aligned} w_{\beta\alpha}(z) &= p_{\beta\alpha}e^{-N_{\alpha\beta}z}[2(1-\mu)N_{\alpha\beta}^{-1}+z] \\ Z_{\beta\alpha}(z) &= (1-2\mu)p_{\beta\alpha}e^{-N_{\alpha\beta}z}[\mu_0 N_{\alpha\beta}z-1] \end{aligned} \tag{3.24}$$

**4. Завершение построения точного решения задачи и заключение.** В силу (3.24) и (3.6), можно считать, что трансформанты $u_{\beta\alpha}(z)$, $v_{\beta\alpha}(z)$, $w_{\beta\alpha}(z)$ всех смещений найдены. Остается их обратить. Пользуясь формулами обращения для синус-преобразования Фурье [7] находим

$$w_\beta(x,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty w_{\beta\alpha}(z)\sin\alpha x\,d\alpha$$

Подставив сюда выражения для $w_{\beta\alpha}(z)$ из (3.24) и применив формулы 1.4 (25) и 1.4 (26) из [8] получим

$$\begin{aligned} w_\beta(x,z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty p_\beta(\xi)\left\{|\beta|z^2\left[\frac{K_1(|\beta|R_\xi^-)}{R_\xi^-}-\frac{K_1(|\beta|R_\xi^+)}{R_\xi^+}\right]+\right. \\ &\left.+2(1-\mu)[K_0(|\beta|R_\xi^-)-K_0(|\beta|R_\xi^+)]\right\}d\xi \quad R_\xi^\mp = \sqrt{z^2+(x\mp\xi)^2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Воспользовавшись формулами обращения для преобразования Фурье [7], можем записать

$$w(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty w_\beta(x,z)e^{-i\beta y}d\beta$$

Подставим сюда выражение (4.1) с учетом того, что

$$p_\beta(\xi) = \int_{-\infty}^\infty p(\xi,\eta)e^{i\beta\eta}d\eta, \quad e^{-i\beta(y-\eta)} = \cos\beta(y-\eta)-i\sin\beta(y-\eta) \tag{4.2}$$

Последующее использование формул 1.12 (39) и 1.12 (40) из [8] приводит к результату

$$\begin{aligned} &w(x,y,z) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty p(\xi,\eta)\left\{2(1-\mu)\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}\right]+\right. \\ &\left.+z^2\left[\frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}-\frac{1}{[(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}\right]\right\}d\xi d\eta \end{aligned}$$

Полагая здесь $z = 0$, получаем

$$w(x,y,0) = \frac{1-\mu}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty p(\xi,\eta)\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right]d\xi d\eta$$

Пользуясь формулами обращения для синус-преобразования Фурье [7] из второй формулы (3.24), получаем

$$Z_\beta(x,z) = \frac{1-2\mu}{\pi}\int_0^\infty p_\beta(\xi)\left\{\mu_0 z\int_0^\infty e^{N_{\alpha\beta}z}[\cos\alpha(x-\xi)-\cos\alpha(x+\xi)]d\alpha - \right.$$
$$\left. - \int_0^\infty e^{-N_{\alpha\beta}z}[\cos\alpha(x-\xi)-\cos\alpha(x+\xi)]d\alpha\right\}d\xi \tag{4.3}$$

Согласно формуле 1.4 (25) из [8] имеем

$$\int_0^\infty \cos\alpha A e^{-N_{\alpha\beta}z}d\alpha = \frac{z|\beta|K_1(|\beta|\sqrt{z^2+A^2})}{\sqrt{z^2+A^2}}, \quad z\neq 0 \tag{4.4}$$

Дифференцируя это равенство по $z$, находим

$$\int_0^\infty \cos(\alpha A)N_{\alpha\beta}e^{-N_{\alpha\beta}z}d\alpha = \frac{z^2\beta^2K_2(|\beta|\sqrt{z^2+A^2})}{z^2+A^2} - \frac{|\beta|K_1(|\beta|\sqrt{z^2+A^2})}{\sqrt{z^2+A^2}}; \quad z\neq 0 \tag{4.5}$$

Вычисляя внутренние интегралы в (4.3) с помощью формул (4.1) и (4.5) вместо (4.3), получим

$$Z_\beta(x,z) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty p_\beta(\xi)\left\{z^3\beta^2\left[\frac{K_2(|\beta|R_\xi^-)}{(R_\xi^-)^2} - \frac{K_2(|\beta|R_\xi^+)}{(R_\xi^+)^2}\right] - 2(1-\mu)z\left[\frac{K_1(|\beta|R_\xi^-)}{R_\xi^-} - \frac{K_1(|\beta|R_\xi^+)}{R_\xi^+}\right]\right\}d\xi \tag{4.6}$$

Используя формулы (3.6), (3.24), (4.6) и применяя соответствующие формулы обращения трансформант (уже применявшихся выше) можно найти оставшиеся смещения $u(x, y, z)$ и $\upsilon(x, y, z)$. В виду громоздкости окончательных формул их здесь не приводим. Однако процедура получения этих формул и сами формулы существенно упрощаются, если ограничится важным частным случаем, т.е. отысканием $u(x, y, 0)$ и $\upsilon(x, y, 0)$. Для этого случая формулы (3.6) и (3.24) принимают вид

$$\begin{Vmatrix} u_{\beta\alpha}(0) \\ \upsilon_{\beta\alpha}(0)\end{Vmatrix} = \frac{1}{N_{\alpha\beta}^2}\begin{Vmatrix} -J_{\beta\alpha}(0) \\ i\beta Z_{\beta\alpha}(0)\end{Vmatrix}, \quad J_{\beta\alpha}(0) = \int_0^\infty Z'_\beta(s,0)\sin\alpha s ds \tag{4.7}$$

$$Z_{\beta\alpha}(0) = -(1-2\mu)p_{\beta\alpha} \tag{4.8}$$

Пользуясь формулами обращения для синус-преобразования Фурье [7], из последней формулы находим

$$Z'_\beta(s,0) = -(1-2\mu)p'_\beta(s)$$

и поэтому

$$J_{\beta\alpha}(0) = -(1-2\mu)\int_0^\infty p'_\beta(\xi)\sin\alpha\xi d\xi$$

Обращая трансформанту $u_{\beta\alpha}(0)$, определенную в (4.7), с помощью формулы обращения для синус-преобразования Фурье [7], а также формулы 859.001 из [9], получаем

$$u_\beta(x,0) = \frac{1-2\mu}{2}\int_0^\infty p'_\beta(\xi)\frac{e^{-|\beta||x-\xi|}-e^{-|\beta||x+\xi|}}{|\beta|}d\xi$$

или после интегрирования по частям

$$u_\beta(x, 0) = \frac{1-2\mu}{2}\int_0^\infty p_\beta(\xi)[\operatorname{sign}(\xi - x)e^{-|\beta||x-\xi|} - e^{-|\beta|(x+\xi)}]d\xi$$

Откуда воспользовавшись формулой обращения

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_\beta(x, 0)e^{-i\beta y}d\beta$$

и приняв во внимание формулы (4.2) и 860.90 из [9], находим

$$u(x, y, 0) = \frac{1-2\mu}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty p(\xi, \eta)\left[\frac{\xi - x}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} - \frac{x+\xi}{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right]d\xi d\eta$$

Теперь займемся вычислением $v(x, y, 0)$. На основании (4.7) и (4.8), имеем

$$v_{\beta\alpha}(0) = -\frac{(1-2\mu)i\beta p_{\beta\alpha}}{N^2_{\alpha\beta}}, \quad p_{\beta\alpha} = \int_0^\infty p_\beta(\xi)\sin\alpha\xi d\xi \tag{4.9}$$

Обратив полученную синус-трансформанту Фурье, после использования формулы 859.01 из [9] находим

$$v_\beta(x, 0) = -\frac{i\beta(1-2\mu)}{2}\int_0^\infty p_\beta(\xi)\frac{e^{-|\beta||x-\xi|} - e^{-|\beta|x+\xi)}}{|\beta|}d\xi \tag{4.10}$$

После этого искомая функция определяется формулой

$$v(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v_\beta(x, 0)e^{-i\beta y}d\beta$$

Подставив сюда выражение (4.10) и воспользовавшись формулами (4.2), а также формулой 860.81 из [9] получаем

$$v(x, y, 0) = \frac{1-2\mu}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty p(\xi, \eta)\left[\frac{(\xi - x)\operatorname{sign}(y-\eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^2} - \frac{\operatorname{sign}(y-\eta)(x+\xi)}{[(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2]^2}\right]d\xi d\eta$$

Итак все смещения определены, а по ним можно вычислить и все напряжения. Таким образом получено точное решение поставленной задачи. Поставленную задачу можно обобщить и на случай, когда в (1.2) $\tau_{zx}|_{z=0} \neq 0$ и $\tau_{zy}|_{z=0} \neq 0$ и когда при $z = 0$ заданы не напряжения, а смещения. И в этом случае изложенный метод позволяет получить точное решение.

Этим методом можно получить точное решение, когда на гранях $x = 0$ задаются не смещения, а выполняются условия скользящей заделки, т.е.

$$\tau_{xy}\big|_{x=0} = \tau_{xz}\big|_{x=0} = 0, \quad u_x\big|_{x=0} = 0$$

а на грани $z = 0$ условия могут быть произвольными оставаясь в рамках корректной постановки. Изложенный метод позволяет получить точное решение аналогичных задач для несвязной термоупругости при произвольном тепловом режиме.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Уфлянд Я.С.* Вторая основная задача теории упругости для клина // Тр. Ленинград. политехн. ин-та, 1960. № 210. С. 87–94.
2. *Уфлянд Я.С.* Некоторые пространственные задачи теории упругости для клина // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 549–553.
3. *Teodorescu P.P.* Problem statiale in teoria elasicitatii. Bucuresti: Ed. Acad. Repub. Soc. Romania, 1970. 377 c.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Гостехтеориздат, 1954. 491 с.
6. *Попов Г.Я., Абдымнапов С.А., Ефимов В.В.* Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы.: Изд-во Рауан, 1999. 113 с.
7. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. М.: Изд-во Иност. лит., 1955. 667 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблица интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.
9. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1964. 228 с.


Одесса

Поступила в редакцию
24.12.2001