МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2003

УДК 534.1

© 2003 г. М.Я. ИЗРАИЛОВИЧ

ВИБРОГАШЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается задача синтеза управления при интегральном квадратичном ограничении на его интенсивность для виброгашения вынужденных квазигармонических колебаний в одномерной механической системе, содержащей нелинейность. Решение в виде линейного закона управления получено на основе процедуры, включающей применение метода гармонической линеаризации и метода моментов. В случае, если в замкнутой системе существуют устойчивые режимы, отличные от расчетного, вводится расширенное (мультипликативно-стабилизирующее) управление, позволяющее обеспечить устойчивость квазиоптимального режима и устранить другие режимы.

Сложность задач синтеза активных виброгасящих воздействий при учете нелинейных сил заключается в том, что помимо номинального (расчетного) режима с минимальной интенсивностью в синтезированной системе могут возникать и другие устойчивые режимы, в том числе и такие которые имеют более высокую интенсивность, чем режимы, имеющие место при отсутствии виброгашения. Таким образом, введение активного виброгасящего воздействия может привести к негативному эффекту.

В публикуемой работе излагается метод построения законов управляемого виброгашения, позволяющий устранять такую неоднозначность и обеспечить реализацию только расчетного номинального режима для случая квазигармонических вынужденных колебаний одномерных механических систем произвольного порядка, содержащих локальную нелинейность[1].

1. Рассматривается задача синтеза активного управляемого виброгашения в системе

$$Q(s)x + R(s)f(x, sx) = M(s)F(t) + N(s)u \tag{1.1}$$

где $Q(s)$, $R(s)$, $M(s)$, $N(s)$ – полиномы от оператора дифференцирования s, характеризующие соответственно собственные свойства системы, расположение симметричного нелинейного звена $f(x, sx)$, точку приложения возмущения $F(t)$ и активного управляющего воздействия u; x – обобщенная координата системы.

Внешнее возмущение $F(t)$ предполагается гармоническим $F(t) = B\sin\omega t$, при этом частота ω соответствует резонансным либо фильтрующим свойствам пассивной части системы (1.1), тогда ее решение в установившемся режиме может быть представлено в виде $x = A\sin\psi + \varepsilon P(t)$, где $\psi = \omega t + \varphi$; $P(t)$ – суммарная составляющая высших гармоник, ε – малый параметр.

Ограничение на интенсивность управления задается в виде

$$\int_0^{2\pi/\omega} u^2 dt \le V \tag{1.2}$$

[1] Метод является обобщением на случай вынужденных колебаний общего принципа устранения неоднозначности, изложенного в [1].

Требуется найти закон управления с обратной связью $u^*(x, sx)$, обеспечивающий минимальную амплитуду колебаний системы (1.1) в установившемся периодическом режиме с частотой ω при ограничении (1.2).

При ограничении на амплитудное значение управления $|u| \le U$ такая задача для системы (1.1) решена в [2], а при отсутствии нелинейности в [3] на основе процедуры, включающей гармоническую линеаризацию [4] уравнения (1.1) и применение метода моментов [5]. Здесь используется аналогичная процедура.

Выражая внешнее возмущение $F(t)$ через гармоническое приближение решения уравнения (1.1) $x = A\sin\psi$, $sx = \omega A\cos\psi$:

$$F(t) = (B/A)(\cos\varphi - (s/\omega)\sin\varphi)x, \quad B > 0$$

и далее выполняя процедуру гармонической линеаризации входящих в (1.1) заданной $f(x, sx)$ и искомой $u(x, sx)$ нелинейностей, получим гармонически линеаризованное уравнение

$$\left[Q(s) + R(s)\left(f_1 + \frac{s}{\omega}f_2\right) - M(s)\frac{B}{A}\left(\cos\varphi - \frac{s}{\omega}\sin\varphi\right)\right]x = N(s)\left(u_1 + \frac{s}{\omega}u_2\right)x \tag{1.3}$$

$$f_1 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\psi, \omega A\cos\psi)\sin\psi d\psi$$

$$f_2 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\psi, \omega A\cos\psi)\cos\psi d\psi$$

$$u_1 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} u(A\sin\psi, \omega A\cos\psi)\sin\psi d\psi$$

$$u_2 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} u(A\sin\psi, \omega A\cos\psi)\cos\psi d\psi$$

В результате отделения в характеристическом уравнении, соответствующем уравнению (1.3), действительной и мнимой части получим

$$\begin{aligned} D_1(A) - (M_1\cos\varphi + M_2\sin\varphi)\frac{B}{A} &= N_1u_1 - N_2u_2 \\ D_2(A) - (M_2\cos\varphi - M_1\sin\varphi)\frac{B}{A} &= N_2u_1 + N_1u_2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$D_1(A) = Q_1 + R_1f_1 - R_2f_2, \quad D_2(A) = Q_2 + R_1f_2 + R_1f_2$$

$$Q_1 = \mathrm{Re}Q(j\omega), \quad R_1 = \mathrm{Re}R(j\omega), \quad M_1 = \mathrm{Re}M(j\omega)$$

$$N_1 = \mathrm{Re}N(j\omega), \quad Q_2 = \mathrm{Im}Q(j\omega), \quad R_2 = \mathrm{Im}R(j\omega)$$

$$M_2 = \mathrm{Im}M(j\omega), \quad N_2 = \mathrm{Im}N(j\omega)$$

В результате решения системы (1.4) относительно u_1, u_2 получим изопериметрические условия (моментные соотношения), налагаемые на искомую функцию u:

$$\int_0^{2\pi} u\sin\psi d\psi = \alpha_1(A, \varphi), \quad \int_0^{2\pi} u\cos\psi d\psi = \alpha_2(A, \varphi) \tag{1.5}$$

$$\alpha_1(A,\varphi) = \frac{\pi A}{|N|^2}\left\{N_1\left[D_1(A)-(M_1\cos\varphi+M_2\sin\varphi)\frac{B}{A}\right]+\right.$$

$$\left.+N_2\left[D_2(A)-(M_2\cos\varphi-M_1\sin\varphi)\frac{B}{A}\right]\right\}$$

$$\alpha_2(A,\varphi) = \frac{\pi A}{|N|^2}\left\{N_1\left[D_2(A)-(M_2\cos\varphi-M_1\sin\varphi)\frac{B}{A}\right]-\right. \tag{1.6}$$

$$\left.-N_2\left[D_2(A)-(M_1\cos\varphi+M_2\sin\varphi)\frac{B}{A}\right]\right\},\quad |N| = |N(j\omega)|$$

Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу. Допустим, что заданы амплитуда A и фаза φ и требуется найти функцию $u_0(\psi)$, удовлетворяющую моментным соотношениям (1.5) и при этом иметь минимальную интенсивность

$$I_0 = \int\limits_0^{2\pi/\omega} u^2 dt = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{2\pi} u^2 d\psi \tag{1.7}$$

В соответствии с [5] ее решение существует, единственно и имеет вид

$$u_0(\psi) = [\alpha_1(A,\varphi)\sin\psi+\alpha_2(A,\varphi)\cos\psi]/\pi \tag{1.8}$$

При этом из (1.7) в силу (1.6), (1.8) следует

$$I_0(A,\varphi) = \frac{\pi}{\omega|N|^2}[\zeta^2(A)-2\sin(\varphi+\varphi_1)\zeta(A)|M|B+|M|^2B^2] \tag{1.9}$$

$$\zeta(A) = |D(A)|A,\quad \sin\varphi_1 = \frac{D_1M_1+D_2M_2}{|D(A)||M|}$$

$$M = |M(j\omega)|,\quad |D(A)| = [D_1^2(A)+D_2^2(A)]^{\frac{1}{2}}$$

Из (1.9) определяется значение фазы $\varphi_0(A)$, соответствующее минимальному значению интенсивности $I_0(A,\varphi)$ как функции φ: $\varphi_0(A) = \pi/2 - \varphi_1(A)$ (при $B > 0$). Откуда следует

$$\sin\varphi_0(A) = \frac{D_1M_2-D_2M_1}{|M||D|},\quad \cos\varphi_0(A) = \frac{D_1M_1+D_2M_2}{|M||D|} \tag{1.10}$$

С учетом этого из (1.9) определяется связь между I_0 и A:

$$[\zeta(A)-|M|B]^2 = \frac{\omega I_0}{\pi}|N|^2 \tag{1.11}$$

Возвращаясь теперь к исходной постановке задачи: определению минимальной амплитуды колебаний $A = A^*$ при заданной интенсивности управления $I_0 = V$ и предполагая, что функция $\zeta(A) = |D(A)|A$ есть монотонно возрастающая, что имеет место для широкого класса нелинейностей, из (1.11) получим уравнение для определения A^*:

$$A = \frac{|M|B - |N|\sqrt{\omega V/\pi}}{|D(A)|} \tag{1.12}$$

Значение A^* определяется как минимальный положительный корень уравнения (1.12).

Окончательные выражения для параметров $\alpha_1^* = \alpha_1(A^*, \varphi^*)$, $\alpha_2^* = \alpha_2(A^*, \varphi^*)$ и закона программного управления $u^*(\psi)$, соответствующего значениям A^*, $\varphi^* = \varphi_0(A^*)$, определяются в результате подстановки выражений $\sin\varphi^* = \sin\varphi_0(A^*)$, (1.10) в (1.6) с учетом того, что A^* удовлетворяет уравнению (1.12):

$$\begin{gathered}\alpha_1^* = -\frac{\sqrt{\pi\omega V}}{|N||D^*|}(N_1 D_1^* + N_2 D_2^*), \quad \alpha_2^* = -\frac{\sqrt{\pi\omega V}}{|N||D^*|}(N_1 D_2^* - N_2 D_1^*) \\ D_1^* = D_1(A^*), \quad D_2^* = D_2(A^*), \quad |D^*| = |D(A^*)|\end{gathered} \tag{1.13}$$

С учетом этого в соответствии с (1.8) определяется $u^*(\psi)$:

$$u^*(\psi) = -n^*(a_1^* \sin\psi + a_2^* \cos\psi) \tag{1.14}$$

$$n^* = \sqrt{\frac{\omega V}{\pi}}(|N||D^*|)^{-1}$$

$$a_1^* = N_1 D_1^* + N_2 D_2^*, \quad a_2^* = N_1 D_2^* - N_2 D_1^* \tag{1.15}$$

2. Решение задачи синтеза управления по обратной связи $u^*(x, sx)$ на основе программного закона $u^*(\psi)$ (1.14) осуществляется с учетом того, что в гармоническом приближении $x = A^* \sin\psi$, $sx = \omega A^* \cos\psi$. В силу этого определяется линейный закон управления

$$u^*(x, sx) = -(n/A^*)(a_1^* x + (a_2^*/\omega)sx) \tag{2.1}$$

При использовании принципа управления по возмущению $F(t) = B\sin\omega t$ и $sF(t) = \omega B\cos\omega t$ представляются в виде

$$\begin{gathered}F(t) = \frac{B}{A^*}\left(\cos\varphi^* - \frac{s}{\omega}\sin\varphi^*\right)x \\ sF(t) = \frac{B}{A^*}\left(\cos\varphi^* s - \frac{\sin\varphi^*}{\omega}s^2\right)x\end{gathered} \tag{2.2}$$

Поскольку $s^2 x = -\omega^2 x$, то из (2.2) x, sx выражаются через $F(t)$, $sF(t)$ следующим образом:

$$x = \frac{A^*}{B}\left(F\cos\varphi^* + sF\frac{\sin\varphi^*}{\omega}\right), \quad sx = \frac{A^*}{B}(sF\cos\varphi^* - F\omega\sin\varphi^*)$$

Подставляя эти выражения в (2.1), получим следующий закон управления по возмущению:

$$u^*(F, sF) = \frac{\sqrt{\frac{\omega V}{\pi}}}{B|N||M|}\left[(N_1 M_1 + N_2 M_2)F + (N_1 M_2 - N_2 M_1)\frac{sF}{\omega}\right] \tag{2.3}$$

3. Анализ динамики замкнутой системы (1.1) с законом управления (2.1) осуществляется методом гармонической линеаризации. С этой целью в уравнения (1.4) вместо u_1, u_2 следует представить функции u_1^*, u_2^* – коэффициенты гармонической линеаризации функции $u^*(x, sx)$, определяемые по формулам: $u_1^* = -n^*a_1^*/A^*$; $u_2^* = -n^*a_2^*/A^*$. В результате из (1.4) определяется система двух уравнений с двумя неизвестными A, φ:

$$\begin{aligned} D_1(A) - (M_1\cos\varphi + M_2\sin\varphi)\frac{B}{A} &= -\frac{n^*}{A^*}(N_1a_1^* - N_2a_2^*) \\ D_2(A) - (M_2\cos\varphi - M_1\sin\varphi)\frac{B}{A} &= -\frac{n^*}{A^*}(N_2a_1^* + N_1a_2^*), \end{aligned} \tag{3.1}$$

Исключая из системы (3.1) фазу φ, получаем уравнение относительно амплитуды режимов замкнутой системы

$$\zeta^2(A) + 2(|D^*|A^*)^{-1}|N|\sqrt{\frac{\omega V}{\pi}}[D_1^*D_1(A) + D_2^*D_2(A)]A^2 + \frac{\omega V}{\pi}|N|^2\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = (|M|B)^2 \tag{3.2}$$

Значение $A = A^*$, в силу того что оно определяется как минимальный корень уравнения (1.12), является также корнем уравнения (3.2), что проверяется непосредственной подстановкой. Условие устойчивости режима A^*, в соответствии с [6], имеет вид $\partial A^*/\partial B > 0$. В силу (3.2):

$$\frac{\partial A^*}{\partial B} = \left[\frac{\partial\zeta(A^*)}{\partial A} + \frac{|N|\sqrt{\omega V/\pi}}{A^*}\right]|M| > 0 \tag{3.3}$$

если $\zeta(A) = |D(A)|A$ есть монотонно возрастающая функция, что имеет место для достаточно широкого класса нелинейностей. Если же $\partial\zeta/\partial A(A^*) < 0$, и неравенство (3.3) не выполняется, то следует увеличить интенсивность управления V, за счет чего можно обеспечить устойчивость, поскольку с ростом V возрастает числитель и уменьшается знаменатель A^* положительного слагаемого $\sqrt{\omega V/\pi}\,|N|A^{*-1}$.

При отсутствии нелинейности $f(x, sx)$ уравнение (3.2) имеет единственное положительное решение $A^* = |Q|^{-1}(B|M| - \sqrt{\omega V/\pi}\,|N|)$, а условие устойчивости (3.3) всегда выполняется. В общем же случае уравнение (3.2) может иметь положительные корни A_i, отличные от A^*, и среди них могут быть такие, которые удовлетворяют $\partial A_i/\partial B > 0$, т.е. в замкнутой системе могут реализоваться режимы, отличные от расчетного с амплитудой A^*. При отсутствии управляющего воздействия значения амплитуд вынужденных колебаний определяются из уравнения

$$\zeta(A) = (|M|B)^2$$

Обозначим положительные корни этого уравнения, удовлетворяющие условию устойчивости, через A_i^0. Среди корней A_i уравнения (3.2), удовлетворяющих условию устойчивости, могут оказаться корни $A_i > A_i^0$. Таким образом, в системе (1.1), (2.1) наряду с расчетным квазиоптимальным режимом с амплитудой A^* могут реализоваться режимы с большими амплитудами, чем в неуправляемой системе. Аналогичная ситуация может иметь место и при использовании закона управления по возмущению (2.3).

Для устранения этого дефекта замкнутой системы необходима корректировка закона управления (2.1). В случае автоколебательных управляемых систем в [1] предложен принцип построения мультипликативно-стабилизирующего управления. В соответствии с этим принципом в первоначально определенное управление вводится сомножитель, который равен единице при функционировании системы в номинальном расчетном режиме, и принимает бо́льшие значения при отклонении от него.

Здесь этот принцип обобщается на рассматриваемый класс задач. Вместо закона $u^*(x, sx)$ (2.1) вводится закон

$$\begin{aligned} u_{Ms}(A, A^*, x, sx) &= \chi(A, A^*)u(x, sx) \\ \chi(A, A^*) &= [1 + \rho\delta(A, A^*)]^m \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\delta(A, A^*)$ – непрерывная и дифференцируемая функция величины A^* и текущего значения $A = [x^2 + (sx/\omega)^2]^{1/2}$, обладающая следующими свойствами

(a) $\delta(A^*, A^*) = 0$

(b) $\dfrac{\partial}{\partial A}\delta(A^*, A^*) \neq 0$

(c) $\delta(A, A^*) \neq 0$ при $A \neq A^*$

(d) $|\delta(A, A^*)|$ – монотонно возрастающая функция величины $|A - A^*|$ (ρ, m – постоянные параметры).

Функция $\chi(A, A^*)$ именуется мультипликативным стабилизатором, а управление u_{Ms} – мультипликативно-стабилизирующим управлением (МСУ).

При $A = A^*$ $u_{Ms} = u^*$, а при отклонении A от A^* значения u_{Ms} и u^* могут существенно различаться между собой.

Поскольку коэффициенты гармонической линеаризации функции u_{Ms} (3.4) с учетом (2.1) определяются по формулам:

$$u_{Ms1} = -\chi(A, A^*)\frac{na_1}{A^*}, \quad u_{Ms2} = -\chi(A, A^*)\frac{na_2}{A^*}$$

то уравнения (3.1) в случае закона u_{Ms} (3.4) принимают вид

$$\begin{aligned} D_1(A) - (M_1\cos\varphi + M_2\sin\varphi)\frac{B}{A} &= -\frac{\chi(A, A^*)}{A^*}n^*(N_1a_1^* - N_2a_2^*) \\ D_2(A) - (M_2\cos\varphi - M_1\sin\varphi)\frac{B}{A} &= -\frac{\chi(A, A^*)}{A^*}n^*(N_2a_1^* + N_1a_2^*) \end{aligned}$$

В результате исключения фазы φ вместо (3.2) получается следующее уравнение относительно A:

$$\begin{aligned} &\zeta^2(A) + 2\chi(A, A^*)(|D^*|A^*)^{-1}|N|\sqrt{\frac{\omega V}{\pi}}[D_1^*D_1(A) + D_2^*D_2(A)]A^2 + \\ &+\chi^2(A, A^*)\left(\frac{\omega V}{\pi}\right)|N|^2\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = (|M|B)^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

В силу (3.5) условие устойчивости режима A^* (3.3) трансформируется к виду

$$\frac{\partial A^*}{\partial B} = \left\{\frac{\partial\zeta(A^*)}{\partial A} + \sqrt{\frac{\omega V}{\pi}}|N|\left[\frac{1}{A^*} + \frac{\partial\chi(A^*, A^*)}{\partial A}\right]\right\}|M| > 0 \tag{3.6}$$

Уравнение (3.5) и неравенство (3.6) содержит произвольную функцию $\delta(A, A^*)$, а также два параметра ρ и m. За счет их выбора обеспечивается единственность положительного решения уравнения (3.5) $A = A^*$ и выполнение неравенства (3.6). Таким образом достигается единственность и устойчивость номинального режима с минимальной амплитудой.

4. В качестве примера рассматривается система с одной степенью свободы

$$(s^2 + \omega_0^2)x + f(x, sx) = B\sin\omega t + u \tag{4.1}$$

где $f(x, sx)$ – симметричная нелинейность диссипативного или автоколебательного типа, для которой $f_1(A, \omega) = 0$. При этом предполагается резонансный характер возмущения, т.е. $\omega = \omega_0$.

В данном случае уравнение (1.2) для определения минимальной амплитуды A^* имеет вид

$$A|f_2(A, \omega)| = B - \sqrt{\omega_0 V/\pi} \tag{4.2}$$

Если функция $f = f(sx)$ соответствует чисто диссипативной нелинейности, то $f_2(A, \omega_0) > 0$, и в (4.2) можно опустить знак модуля. Если $f(x, sx)$ – нелинейность автоколебательного типа, то уравнение $f_2(A, \omega_0) = 0$ соответствует режиму возбуждения автоколебаний при отсутствии внешнего возбуждения, при этом автоколебания имеют частоту ω_0 и амплитуду A_0. Если предполагать, что A^* должна быть меньше A_0, то и в этом случае $f_2(A^*, \omega_0) > 0$.

В силу этого в соответствии с (1.14) $u^*(\psi) = -\sqrt{\omega_0 V/\pi}\cos\psi$ и на основании (2.1) получим

$$u^*(sx) = -\frac{1}{A^*}\sqrt{\frac{\omega_0 V}{\pi}}\frac{sx}{\omega_0} \tag{4.3}$$

Уравнение для определения амплитуд замкнутой системы (4.1), (4.3) с учетом (3.2) имеет вид

$$A^2\left[f_2(A, \omega_0) + \frac{1}{A^*}\sqrt{\frac{\omega_0 V}{\pi}}\right]^2 = B^2 \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4), кроме $A = A^*$, может иметь и другие неотрицательные решения. Пусть $f(sx)$ описывает диссипативную характеристику достаточно общего вида $f(sx) = k_0\sin sx + k_1 sx + k_2 sx|sx|$. В этом случае $f_2(A, \omega_0) = 4k_0/\pi A + k_1\omega_0 + 8/3\pi k_2\omega_0^2 A$, и уравнению (4.4) соответствуют два квадратных уравнения:

$$\frac{8}{3\pi}k_2\omega_0^2 A^2 + k_1\omega_0 A + \frac{1}{A^*}\sqrt{\frac{\omega_0 V}{\pi}}A + \frac{4k_0}{\pi} = \pm B \tag{4.5}$$

которые в общем случае имеют четыре корня A_i, один из которых (соответствующий знаку (+)) – A^*, а среди других A_i могут быть такие, которые превосходят значение A^* и при этом удовлетворяют условию устойчивости.

Поэтому вместо закона $u^*(sx)$ (4.3) следует ввести МСУ

$$u_{MC} = [1 + \rho(A - A^*)]u^*(sx) \tag{4.6}$$

Для системы (4.1) с законом управления (4.3), (4.6) уравнения (4.5) принимают вид:

$$\frac{8}{3\pi}k_2\omega_0^2 A^2 + k_1\omega_0 A + \frac{1 + \rho(A - A^*)}{A^*}\sqrt{\frac{\omega_0 V}{\pi}}A + \frac{4k_0}{\pi} = \pm B \tag{4.7}$$

При $\rho = \rho_1 = -\frac{A^*}{\sqrt{\omega_0 V/\pi}}\frac{8}{3\pi}\omega_0^2 k_2$ уравнения (4.7) трансформируются в линейные

$$\left(k_1\omega_0 + \frac{1-\rho_1 A^*}{A^*}\sqrt{\frac{\omega_0 V}{\pi}}\right)A + \frac{4k_0}{\pi} = \pm B$$

которые имеют каждое по одному корню: один из них $A_1 = A^*$, соответствует знаку (+), а второй A_2 – отрицателен. Таким образом обеспечивается единственность режима с минимальной амплитудой A^*.

В качестве конкретного примера рассматривается случай, когда

$$f(sx) = k_1 sx - k_2 sx|sx| \quad (k_1, k_2 > 0) \tag{4.8}$$

Система (4.1) с характеристикой $f(sx)$ (4.8) при отсутствии управления имеет два устойчивых режима с амплитудами (определяемыми в гармоническом приближении):

$$A_1^0 = \frac{k_1}{2q} + \left(\frac{k_1^2}{4q^2} + \frac{B}{q\omega_0}\right)^{1/2} \tag{4.9}$$

$$A_2^0 = \frac{k_1}{2q} - \left(\frac{k_1^2}{4q^2} - \frac{B}{q\omega_0}\right)^{1/2}$$
$$q = \frac{8}{3\pi}\omega_0 k_2, \quad B < \frac{k_1^2\omega_0}{4q} \tag{4.10}$$

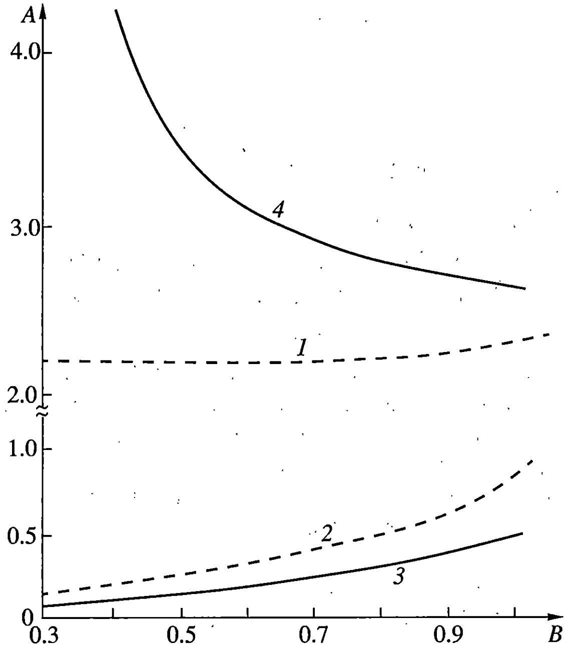
Минимальная амплитуда A^*, определяемая из уравнения (4.2):

$$A^* = \frac{k_1}{2q} - \left(\frac{k_1^2}{4q^2} - \frac{B - \sqrt{\omega_0 V/\pi}}{q\omega_0}\right)^{1/2} \tag{4.11}$$

Уравнения (4.5) в данном случае имеют два положительных решения, соответствующих устойчивым режимам. Одно из них A^* (4.11), а второе определяется по формуле:

$$A_1 = \frac{c}{2q} + \left(\frac{c^2}{4q^2} + \frac{B}{q\omega_0}\right)^{1/2}$$
$$c = k_1 + \frac{\sqrt{\omega_0 V/\pi}}{\omega_0 A^*} \tag{4.12}$$

Сопоставление режимов неуправляемой системы (4.9), (4.10) и управляемой системы (4.11), (4.12) показывает, что эффект введения управляемого виброгашения соответствует снижению интенсивности режима с меньшей амплитудой A_2, но вместе с тем приводит к увеличению интенсивности режима с большей амплитудой A_1°. На фигуре приведены графики зависимостей A_1° (4.9) (кривая *1*), A_2° (4.10) (кривая *2*), A^* (4.11) (кривая *3*) и A_1 (4.12) (кривая *4*) от амплитуды возмущающей силы, рассчитанные при $k_1 = 2$, $q = 1$, $\omega_0 = 1$, $\sqrt{V/\pi} = 0.2$. Таким образом, введение управления приводит, вместо снижения, к существенному увеличению амплитуды вынужденных колебаний.



Фиг. 1

При введении МСУ (4.6) уравнения для определения режимов замкнутой системы (4.5) принимают вид

$$-\frac{8}{3\pi}\omega_0^2 k_2 A^2 + \left[k_1\omega_0 + \frac{1+\rho(A-A^*)}{A^*}\sqrt{\frac{\omega_0 V}{\pi}}\right]A = \pm B$$

при

$$\rho = \rho_1 = \frac{A^*}{\sqrt{\omega_0 V/\pi}}\frac{8}{3\pi}\omega_0^2 k_2$$

отсюда определяются два корня $A_\pm = \pm A^*$, и в замкнутой системе существует единственный устойчивый режим с минимальной амплитудой A^*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00217).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Израилович М.Я.* Стабилизация и устранение неоднозначности управляемых автоколебательных режимов. Мультипликативный стабилизатор // Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 1. С. 25–29.
2. *Израилович М.Я.* Управление вынужденными колебаниями гармонически линеаризуемых механических систем // Проблемы машиностр. и надежности машин. 1994. № 5. С. 18–27.
3. *Израилович М.Я., Синёв А.В.* Синтез одного класса активных виброзащитных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 6. С. 153–156.
4. *Попов Е.П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М.: Наука, 1973. 583 с.
5. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 475 с.
6. *Коловский М.З.* Нелинейная теория виброзащитных систем. М.: Наука, 1966. 211 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.05.2001