

ДИНАМИКА РОБОТА-МАНИПУЛЯТОРА С УПРУГОПОДАТЛИВЫМИ ЗВЕНЬЯМИ И ПРИВОДНЫМИ МЕХАНИЗМАМИ

Рассматриваются вопросы построения и анализа математических моделей динамики оснащенных приводами управления многозвенных роботов-манипуляторов, элементы конструкции которых обладают упругой податливостью. Обсуждается целесообразность одновременного учета распределенных свойств упругой гибкости и инерции исполнительных органов и передаточных механизмов приводных устройств манипуляционных систем для изучения возникающих в процессе их функционирования интенсивных высокочастотных упругих колебаний, вызывающих при отработке программных законов движения снижение быстродействия и точности позиционирования их рабочих органов, появление опасных резонансных явлений и, как следствие, увеличение динамических нагрузок на различные элементы конструкции. Проведено сопоставление результатов исследования динамических характеристик робота с упругоподатливыми приводными устройствами для двух постановок задач управления его пространственными движениями, соответствующих случаям абсолютно жестких и упругих звеньев манипулятора с эквивалентными физическими и геометрическими параметрами.

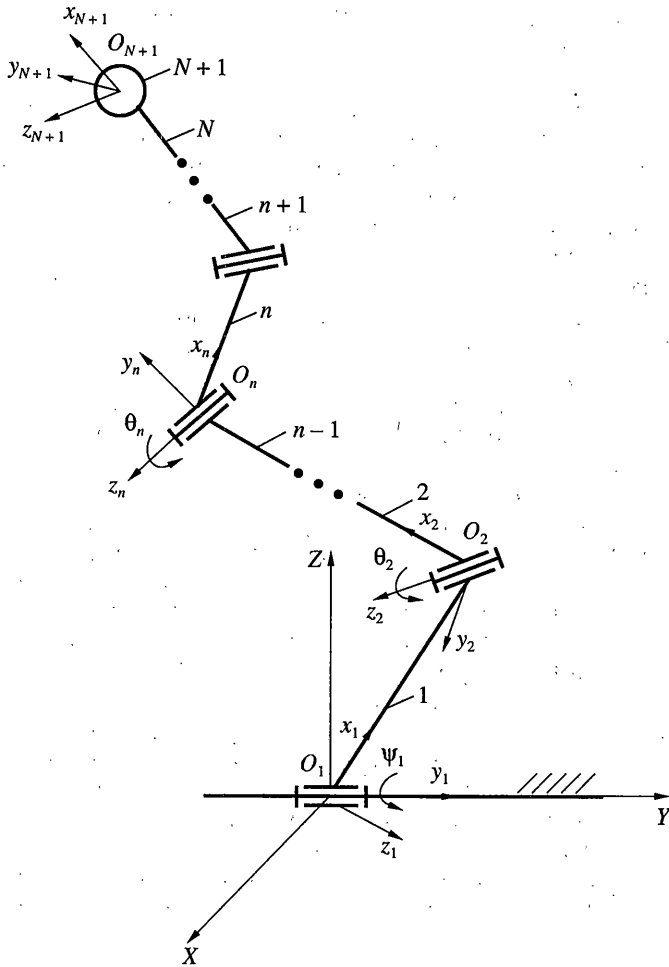
1. Введение. В процессе эксплуатации современных робототехнических и манипуляционных систем наиболее существенные ошибки позиционирования и траекторного управления их силовыми операциями связаны, в основном, с чувствительностью этих систем к изменению их геометрических и кинематических параметров, обусловленной наличием упругой податливости структурных звеньев исполнительных механизмов и элементов приводных устройств. При исследовании динамики роботов и манипуляторов с гибкими звеньями большое число публикаций [1–4] посвящено разработке методов анализа их динамических характеристик на основе конечномерных моделей, базирующихся на специальных предположениях об инерционных и жесткостных свойствах звеньев и формах их деформирования и описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Вопросы численного исследования динамики управляемых движений манипуляционных механизмов на основе моделей с распределенными параметрами жесткости и инерции их звеньев, описываемых системами дифференциальных уравнений гибридного типа, рассмотрены в работах авторов [5–7].

Характер влияния упругой податливости элементов приводного механизма на точность функционирования робота зависит от конструктивной схемы приводного устройства. Существуют три варианта расположения приводов: непосредственно в соединительных шарнирах манипуляционного механизма, на основании робота и комбинированное расположение в произвольном месте подвижных и неподвижных стержневых звеньев. Компоновка приводов, при которой двигатели располагаются на основании, позволяет уменьшить массы подвижных элементов, однако приводит к применению многозвенных передаточных кинематических цепей, связанных с максимальным увеличением их упругой податливости и ошибок позиционирования. Поэтому для такой схемы учет факторов упругости является наиболее актуальным. Результаты построения алгоритмов управления положениями жестких звеньев манипуляторов для выделенных типов схем размещения упругоподатливых приводных устройств обсуждаются в [8–10]. Исследования показателей точности позиционирования гибких стержневых звеньев роботов с учетом динамики приводов с упругими характеристиками механических

ких передач движения проведены в [11, 12] на базе упрощенных расчетных моделей, полученных введением ограничивающих предположений об упругих свойствах звеньев и передаточных приспособлений приводов.

В данной работе на основе подхода, развитого ранее в [7] для анализа пространственных движений упругих многозвенных роботов-манипуляторов последовательной шарнирно-стержневой структуры без конкретизации схем приводных устройств управления, поставлена задача теоретического моделирования динамики управляемого манипулятора как системы с распределенными параметрами упругой податливости и инерции его стержневых звеньев и сосредоточенными свойствами упругости связанных с шарнирными соединениями приводных устройств. Построена математическая модель исполнительного механизма манипулятора с учетом динамики приводов, включающая систему нелинейных дифференциальных уравнений гибридного типа. Порядок сформулированной при этом системы обыкновенных дифференциальных уравнений в связи с учетом упругой податливости приводных устройств увеличивается на удвоенное количество звеньев манипулятора. Для решения поставленных задач кинематического и динамического управления использован алгоритм [6, 7], базирующийся на совместном применении метода начальных параметров [7], неявной схемы Хуболта [13] представления частных производных по временной координате их конечно-разностными аналогами и высокоточных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений [13–15]. Рассмотрен пример, иллюстрирующий особенности динамического поведения робота с упругоподатливыми звеньями и приводными механизмами в сравнении с результатами выполненного на базе формализма Лагранжа моделирования динамики робота с абсолютно жесткими звеньями и упругими приводами, которые обладают эквивалентными геометрическими и физическими характеристиками.

2. Математическая модель и постановка задач управления. Построим математическую модель динамики оснащенного приводами управления многозвенного манипулятора, кинематическая схема которого изображена на фиг. 1. Примем, что его исполнительный механизм состоит из цепочки N прямолинейных упругих стержней, последовательно соединенных с неподвижным основанием и между собой посредством идеальных цилиндрических шарниров, с каждым из которых связано упругое приводное устройство, обладающее возможностью управления стержнем по угловому ускорению поворота вала его двигателя или по развиваемому двигателем моменту нагрузки на валу. На конце N -го стержня жестко прикреплено абсолютно твердое тело (груз), переносимое манипулятором. Пронумеруем от 1 до $N + 1$ входящие в рассматриваемую механическую систему упругие и абсолютно твердое тело в порядке их присоединения друг к другу, присвоив первый номер стержню, шарнирно соединенному с неподвижным основанием, которое условно определим нулевым номером. Для описания движения системы относительно инерциальной системы координат O_1XYZ с ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ введем связанные с каждым n -м ($n = \overline{1, N}$) упругим стержнем местную систему координат $O_n x_n y_n z_n$ с ортами $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n, \mathbf{k}_n$, начало которой совпадает с началом O_n рассматриваемого стержня, а ось $O_n x_n$ совпадает с нейтральной линией стержня в его недеформированном состоянии, и систему координат $O_{n+1} x_n^* y_n^* z_n^*$, начало которой совместим с концом O_{n+1} этого стержня, а ось $x_{n+1} x_n^*$ направим по касательной к нейтральной линии стержня в точке O_{n+1} . Соответствующие оси $O_n y_n, O_n z_n$ и $O_{n+1} y_n^*, O_{n+1} z_n^*$ указанных систем координат будут параллельны, когда упругий стержень находится в недеформированном состоянии и оси $O_n x_n, O_{n+1} x_n^*$ направлены вдоль одной прямой. Жестко свяжем с $(N + 1)$ -м телом местную систему координат $O_{N+1} x_{N+1} y_{N+1} z_{N+1}$ с ортами $\mathbf{i}_{N+1}, \mathbf{j}_{N+1}, \mathbf{k}_{N+1}$, оси которой являются главными цент-



Фиг. 1

ральными осями инерции и сохраняют правила выбора направлений, аналогичные осям системы $O_n x_n y_n z_n$. Примем, что каждая из осей соединительных шарниров совпадает с одной из осей местной системы координат $O_n x_n y_n z_n$. Через φ_n , ψ_n или θ_n соответственно обозначим угол поворота базиса $O_n x_n y_n z_n$ по отношению к базису $O_n x_{n-1}^* y_{n-1}^* z_{n-1}^*$ вокруг какой-либо из осей $O_n x_n$, $O_n y_n$ или $O_n z_n$, описывающий поворот n -го звена манипулятора относительно $(n-1)$ -го. Указанный угол поворота считается положительным, если с конца соответствующей оси этот поворот виден происходящим против хода часовой стрелки. Будем предполагать, что в каждом n -м ($n = \overline{1, N}$) шарнире, связывающем примыкающие концы $(n-1)$ -го и n -го стержней, к n -у звену манипулятора приложен передающийся от двигателя соответствующего приводного устройства внешний момент M_n^e , который является положительным, если стремится повернуть рассматриваемое звено в положительном направлении.

Выделим два случая управления пространственными движениями механической системы. В первом из них управление осуществляется заданием N функций угловых ускорений $\ddot{\alpha}_n = \ddot{\alpha}_n(t)$ поворотов валов двигателей приводных устройств (кинематическое

управление). Во втором случае управление выполняется путем задания N программных законов изменения развиваемых двигателем электромагнитных моментов $M_n = M_n(t)$ (динамическое управление). При этом принимается, что инерционностью электрической цепи двигателя n -го привода можно пренебречь и момент $M_n(t)$ генерировать с требуемой точностью. Здесь и ниже точкой обозначена полная производная по времени.

Для описания динамики n -го электропривода, управляющего движением n -го звена манипулятора, воспользуемся математической моделью вида [8]:

$$I_n \ddot{\alpha}_n = M_n - M_n^e i_n^{-1} \quad (2.1)$$

где I_n – суммарный момент инерции роторов двигателя и звеньев электропривода, приведенный к оси ротора; α_n – угол поворота вала двигателя; i_n – коэффициент передачи механизма передачи вращательного движения (редуктора).

При вычислении момента $M_n^e = M_n^e(t)$, который передается от двигателя к n -у шарниру, будем пренебрегать инертностью передаточного механизма и считать указанный момент зависящим только от упругой податливости механизма передачи движения. Примем также в дальнейшем, не ограничивая общности постановки задачи [6, 7], что ось рассматриваемого n -го шарнира совпадает, например, с осью $O_n z_n$. Тогда

$$M_n^e = k_n (\alpha_n i_n^{-1} - \theta_n) \quad (2.2)$$

где k_n – приведенный коэффициент жесткости n -го передаточного механизма.

Дифференциальное уравнение динамики n -го упругого привода с учетом (2.2) примет вид

$$I_n \ddot{\alpha}_n + k_n (\alpha_n i_n^{-1} - \theta_n) i_n^{-1} = M_n \quad (2.3)$$

Как и ранее [7], запишем уравнения динамического равновесия звеньев манипулятора, описывая их упругие свойства в рамках геометрической линейной теории Бернулли–Эйлера растяжения, изгиба и кручения прямолинейных стержней. Для этого на основании принципа Даламбера спроектируем на оси системы координат $O_n x_n y_n z_n$ действующие на произвольный элемент с координатой x_n ($0 \leq x_n \leq l_n$) n -го стержня силы упругости, инерции, тяжести и их моменты. Опустив для простоты в соответствующих местах индекс n , для n -го звена получим следующие уравнения динамики:

$$\begin{aligned} EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F a_x + q_x &= 0 \\ -EJ_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + EF \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u \partial v}{\partial x \partial x} \right] - \rho F a_y + q_y &= 0 \\ -EJ_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + EF \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u \partial w}{\partial x \partial x} \right] - \rho F a_z + q_z &= 0 \\ GJ_x \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \rho J_x \varepsilon_x &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где l – длина стержня; F, J_x, J_y, J_z – площадь и моменты инерции площади поперечного сечения стержня относительно осей x, y, z соответствующей местной системы координат; ρ – плотность материала стержня; E, G – модули упругости и сдвига; u, v, w, γ – функции упругих перемещений стержня вдоль осей x, y, z и угла закручивания; a_x, a_y, a_z – компоненты вектора абсолютного ускорения \mathbf{a} элемента стержня; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – компоненты вектора абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ элемента стержня; $q_x = -\rho F g \alpha_{31}$,

$q_y = -\rho F g \alpha_{32}$, $q_z = -\rho F g \alpha_{33}$ – компоненты вектора интенсивности сил тяжести; $\alpha_{11} = \cos(X, x)$, $\alpha_{12} = \cos(X, y)$, ..., $\alpha_{33} = \cos(z, z)$ – компоненты матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ направляющих косинусов углов между осями систем координат O_1XYZ и $Oxyz$.

Рассматривая движение выделенного элемента стержня с радиус-вектором $\mathbf{r}(x) = (x + u)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ в связанной со стержнем местной системе координат $Oxyz$ как сложное [6, 7, 16], вектор его абсолютного ускорения $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x)$ представим в виде суммы

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{a}^e(x) + \mathbf{a}^r(x) + \mathbf{a}^c(x)$$

$$\mathbf{a}^e(x) = \mathbf{a}(0) + \boldsymbol{\varepsilon}(0) \times \mathbf{r}(x) + \boldsymbol{\omega}(0) \times (\boldsymbol{\omega}(0) \times \mathbf{r}(x))$$

$$\mathbf{a}^r(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}^c(x) = 2\boldsymbol{\omega}(0) \times \left(\frac{\partial u}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial t} \mathbf{k} \right)$$

Здесь $\mathbf{a}^e(x)$, $\mathbf{a}^r(x)$, $\mathbf{a}^c(x)$ – векторы переносного, относительного и кориолисового ускорений соответственно; $\mathbf{a}(0) = a_x(0)\mathbf{i} + a_y(0)\mathbf{j} + a_z(0)\mathbf{k}$ – вектор абсолютного ускорения начала местной системы координат; $\boldsymbol{\omega}(0) = \omega_x(0)\mathbf{i} + \omega_y(0)\mathbf{j} + \omega_z(0)\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(0) = \varepsilon_x(0)\mathbf{i} + \varepsilon_y(0)\mathbf{j} + \varepsilon_z(0)\mathbf{k}$ – векторы угловой скорости и углового ускорения вращения местной системы координат относительно инерциальной системы отсчета.

Согласно [16], абсолютную угловую скорость $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(x)$ элемента стержня, участвующего одновременно в нескольких вращательных движениях, можно представить равенством

$$\boldsymbol{\omega}(x) = \boldsymbol{\omega}(0) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{k}$$

а его абсолютное угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(x)$ получить дифференцированием последнего в местной системе координат

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \boldsymbol{\varepsilon}(0) + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \mathbf{i} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{k}$$

Систему дифференциальных уравнений (2.4) динамики n -го звена манипулятора с учетом выражений для компонент абсолютных ускорений \mathbf{a} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ и вектора интенсивности сил тяжести представим в форме

$$\begin{aligned} EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \rho F [a_x(0) - (\omega_y^2(0) + \omega_z^2(0))x] + \rho F g \alpha_{31} \\ -EJ_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + EF \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u \partial v}{\partial x \partial x} \right] &= \rho F \left[a_y(0) + (\varepsilon_z(0) + \omega_x(0)\omega_y(0))x + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] + \rho F g \alpha_{32} \\ -EJ_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + EF \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u \partial w}{\partial x \partial x} \right] &= \rho F \left[a_z(0) - (\varepsilon_y(0) - \omega_x(0)\omega_z(0))x + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] + \rho F g \alpha_{33} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$GJ_x \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = \rho J_x \varepsilon_x(0)$$

$$\dot{\omega}_x(0) = \varepsilon_x(0), \quad \dot{\omega}_y(0) = \varepsilon_y(0), \quad \dot{\omega}_z(0) = \varepsilon_z(0)$$

полученной в предположении о слабом влиянии сил инерции Кориолиса, продольных и крутильных колебаний ($\rho F \partial^2 u / \partial t^2$ и $\rho J_x \partial^2 \gamma / \partial t^2$) упругого стержня на рассматриваемые динамические явления при реальных значениях угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(0)$ и малых упругих смещениях u , v , w , γ [6, 7].

Дополним систему дифференциальных уравнений (2.5), содержащих в качестве неизвестных полевые переменные $u(x, t)$, $v(x, t)$, $w(x, t)$, $\gamma(x, t)$ и функции времени $a_x(0, t)$, $a_y(0, t)$, $a_z(0, t)$, $\epsilon_x(0, t)$, $\epsilon_y(0, t)$, $\epsilon_z(0, t)$, соответствующими граничными условиями, вытекающими из способа соединения концов упругих стержней. Рассматриваемые переменные далее будем отмечать индексами n .

Из условий жесткой связи системы $O_n x_n y_n z_n$ с началом $x_n = 0$ n -го стержня получим следующие граничные уравнения:

$$u_n(0) = 0, \quad v_n(0) = 0, \quad w_n(0) = 0, \quad \gamma_n(0) = 0, \quad \frac{\partial v_n(0)}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial w_n(0)}{\partial x_n} = 0 \quad (2.6)$$

Условия шарнирного соединения конца $x_{n-1} = l_{n-1}$ $(n-1)$ -го стержня с началом $x_n = 0$ n -го ($n = \overline{2, N}$) стержня будут включать [6, 7]:

(1) условие противоположности направления равных по модулю векторов реакций $\mathbf{R}_{n-1}(l_{n-1}) = -\mathbf{R}_n(0)$;

(2) условие противоположности направления равных по модулю векторов моментов $\mathbf{M}_{n-1}(l_{n-1}) = -\mathbf{M}_n(0)$;

(3) условие равенства векторов абсолютных ускорений $\mathbf{a}_{n-1}(l_{n-1}) = \mathbf{a}_n(0)$;

(4) соотношение $\epsilon_n(0) - \ddot{\theta}_n \mathbf{k}_n = \epsilon_{n-1}(l_{n-1}) + \boldsymbol{\omega}_n(0) \times \boldsymbol{\omega}_{n-1}(l_{n-1})$ между угловыми ускорениями систем координат $O_{n-1} x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$ и $O_n x_n y_n z_n$, которое получено дифференцированием по времени в системе $O_n x_n y_n z_n$ равенства $\boldsymbol{\omega}_n(0) - \dot{\theta}_n \mathbf{k}_n = \boldsymbol{\omega}_{n-1}(l_{n-1})$, вытекающего из правила определения угловых скоростей при сложении нескольких вращательных движений [16].

Указанные граничные условия в проекциях на оси системы $O_n x_n y_n z_n$ с учетом известных [6] дифференциальных зависимостей для внутренних силовых факторов, возникающих в сечениях $x_{n-1} = l_{n-1}$ и $x_n = 0$ примыкающих стержней представим следующими скалярными уравнениями

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{l} -E_n F_n \frac{\partial u_n(0)}{\partial x_n} \\ E_n J_{z,n} \frac{\partial^3 v_n(0)}{\partial x_n^3} \\ E_n J_{y,n} \frac{\partial^3 w_n(0)}{\partial x_n^3} \end{array} \right\| - \mathbf{B}_{n-1,n}^T \left\| \begin{array}{l} -E_{n-1} F_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}} \\ E_{n-1} J_{z,n-1} \frac{\partial^3 v_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}^3} \\ E_{n-1} J_{y,n-1} \frac{\partial^3 w_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}^3} \end{array} \right\| = 0 \\ & \left\| \begin{array}{l} -G_n J_{x,n} \frac{\partial \gamma_n(0)}{\partial x_n} \\ E_n J_{y,n} \frac{\partial^2 w_n(0)}{\partial x_n^2} \\ -E_n J_{z,n} \frac{\partial^2 v_n(0)}{\partial x_n^2} \end{array} \right\| - \mathbf{B}_{n-1,n}^T \left\| \begin{array}{l} -G_{n-1} J_{x,n-1} \frac{\partial \gamma_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}} \\ E_{n-1} J_{y,n-1} \frac{\partial^2 w_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}^2} \\ -E_{n-1} J_{z,n-1} \frac{\partial^2 v_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}^2} \end{array} \right\| = 0 \quad (2.7) \\ & \left\| \begin{array}{l} a_{x,n}(0) \\ a_{y,n}(0) \\ a_{z,n}(0) \end{array} \right\| - \mathbf{B}_{n-1,n}^T \left\| \begin{array}{l} a_{x,n-1}(l_{n-1}) \\ a_{y,n-1}(l_{n-1}) \\ a_{z,n-1}(l_{n-1}) \end{array} \right\| = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{x,n}(0) \\ \varepsilon_{y,n}(0) \\ \varepsilon_{z,n}(0) - \ddot{\theta}_n \end{vmatrix} - \mathbf{B}_{n-1,n}^T \begin{vmatrix} \omega_{x,n-1}(l_{n-1}) \\ \omega_{y,n-1}(l_{n-1}) \\ \omega_{z,n-1}(l_{n-1}) \end{vmatrix} - \mathbf{B}_{n-1,n}^T \begin{vmatrix} \varepsilon_{x,n-1}(l_{n-1}) \\ \varepsilon_{y,n-1}(l_{n-1}) \\ \varepsilon_{z,n-1}(l_{n-1}) \end{vmatrix} = 0$$

окончательная форма которых может быть получена с привлечением записанных при $x_{n-1} = l_{n-1}$ выражений для векторов абсолютных ускорений $\mathbf{a}_{n-1}(x_{n-1})$, $\varepsilon_{n-1}(x_{n-1})$.

Особенности структуры матриц перехода $\mathbf{B}_{n-1,n} = \mathbf{A}_n^T \mathbf{A}_{n-1}$ [7] и принятой стратегии управления позволяют на основании равенства (2.2) для выбранной ориентации оси цилиндрического шарнира преобразовать третье равенство во второй группе уравнений (2.7) к двум соотношениям:

$$\begin{aligned} -E_{n-1} J_{z,n-1} \frac{\partial^2 v_{n-1}(l_{n-1})}{\partial x_{n-1}^2} &= k_n (\alpha_n i_n^{-1} - \theta_n) \\ -E_n J_{z,n} \frac{\partial^2 v_n(0)}{\partial x_n^2} &= k_n (\alpha_n i_n^{-1} - \theta_n) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Следует отметить, что граничные условия шарнирного присоединения начала $x_1 = 0$ первого стержня к основанию в силу неподвижности последнего будут отличаться от (2.7), (2.8) и трансформироваться к виду

$$\begin{aligned} a_{x,1}(0) &= 0, \quad a_{y,1}(0) = 0, \quad a_{z,1}(0) = 0 \\ \varepsilon_{x,1}(0) &= 0, \quad \varepsilon_{y,1}(0) = 0, \quad \varepsilon_{z,1}(0) = \ddot{\theta}_1 \\ -E_1 J_{z,1} \frac{\partial^2 v_1(0)}{\partial x_1^2} &= k_1 (\alpha_1 i_1^{-1} - \theta_1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Граничные условия жесткого присоединения $(N+1)$ -го тела к концу $x_N = l_N$ N -го упругого стержня запишем в виде дифференциальных уравнений свободного движения твердого тела [16]:

$$\begin{aligned} M_{N+1} \mathbf{a}_{N+1} &= \mathbf{R}_N(l_N) - M_{N+1} g \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{L}}_{N+1} = \mathbf{M}_N(l_N) + \mathbf{r}_{N+1} \times \mathbf{R}_N(l_N) \\ \mathbf{r}_{N+1} &= x_{N+1} \mathbf{i}_{N+1} + y_{N+1} \mathbf{j}_{N+1} + z_{N+1} \mathbf{k}_{N+1} \\ \mathbf{a}_{N+1} &= \mathbf{a}_N(l_N) - \varepsilon_{N+1} \times \mathbf{r}_{N+1} - \boldsymbol{\omega}_{N+1} \times \boldsymbol{\omega}_{N+1} \times \mathbf{r}_{N+1} \\ \boldsymbol{\omega}_{N+1} &= \omega_{x,N+1} \mathbf{i}_{N+1} + \omega_{y,N+1} \mathbf{j}_{N+1} + \omega_{z,N+1} \mathbf{k}_{N+1} \\ \varepsilon_{N+1} &= \varepsilon_{x,N+1} \mathbf{i}_{N+1} + \varepsilon_{y,N+1} \mathbf{j}_{N+1} + \varepsilon_{z,N+1} \mathbf{k}_{N+1} \\ \mathbf{L}_{N+1} &= I_{x,N+1} \omega_{x,N+1} \mathbf{i}_{N+1} + I_{y,N+1} \omega_{y,N+1} \mathbf{j}_{N+1} + I_{z,N+1} \omega_{z,N+1} \mathbf{k}_{N+1} \\ \mathbf{R}_N(l_N) &= -E_N F_N \frac{\partial u_N(l_N)}{\partial x_N} \mathbf{i}_{N+1} + E_N J_{z,N} \frac{\partial^3 v_N(l_N)}{\partial x_N^3} \mathbf{j}_{N+1} + E_N J_{y,N} \frac{\partial^3 w_N(l_N)}{\partial x_N^3} \mathbf{k}_{N+1} \\ \mathbf{M}_N(l_N) &= -G_N J_{x,N} \frac{\partial \gamma_N(l_N)}{\partial x_N} \mathbf{i}_{N+1} + E_N J_{z,N} \frac{\partial^2 v_N(l_N)}{\partial x_N^2} \mathbf{j}_{N+1} - E_N J_{y,N} \frac{\partial^2 w_N(l_N)}{\partial x_N^2} \mathbf{k}_{N+1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

где M_{N+1} – масса тела; r_{N+1} – радиус-вектор точки присоединения тела к концу N -го стержня в системе координат $O_{N+1}x_{N+1}y_{N+1}z_{N+1}$; \mathbf{a}_{N+1} – вектор абсолютного уско-

рения центра масс O_{N+1} тела; ω_{N+1} , ϵ_{N+1} – векторы угловой скорости и углового ускорения тела; L_{N+1} – главный момент количеств движения тела относительно точки O_{N+1} ; $I_{x,N+1}$, $I_{y,N+1}$, $I_{z,N+1}$ – главные моменты инерции тела относительно осей системы $O_{N+1}x_{N+1}y_{N+1}z_{N+1}$; $R_N(l_N)$ – вектор реакции конца $x_N = l_N$ N -го стержня, приложенный к телу в точке присоединения; $M_N(l_N)$ – вектор момента сил упругости, приложенный к телу в точке присоединения конца N -го стержня.

В проекциях на оси жестко связанной с $(N+1)$ -м телом местной системы координат граничные условия (2.10) представим соотношениями

$$\begin{aligned}
 M_{N+1}a_{x,N+1} &= -E_N F_N \frac{\partial u_N(l_N)}{\partial x_N} - M_{N+1}g\alpha_{31}^{N+1} \\
 M_{N+1}a_{y,N+1} &= E_N J_{z,N} \frac{\partial^3 v_N(l_N)}{\partial x_N^3} - M_{N+1}g\alpha_{32}^{N+1} \\
 M_{N+1}a_{z,N+1} &= E_N J_{y,N} \frac{\partial^3 w_N(l_N)}{\partial x_N^3} - M_{N+1}g\alpha_{33}^{N+1} \\
 I_{x,N+1}\dot{\omega}_{x,N+1} + (I_{z,N+1} - I_{y,N+1})\omega_{y,N+1}\omega_{z,N+1} &= \\
 = -G_N J_{x,N} \frac{\partial \gamma_N(l_N)}{\partial x_N} + E_N J_{y,N} \frac{\partial^3 w_N(l_N)}{\partial x_N^3} y_{N+1} - E_N J_{z,N} \frac{\partial^3 v_N(l_N)}{\partial x_N^3} z_{N+1} \\
 I_{y,N+1}\dot{\omega}_{y,N+1} + (I_{x,N+1} - I_{z,N+1})\omega_{z,N+1}\omega_{x,N+1} &= \\
 = E_N J_{y,N} \frac{\partial^2 \dot{w}_N(l_N)}{\partial x_N^2} + E_N F_N \frac{\partial u_N(l_N)}{\partial x_N} z_{N+1} - E_N J_{y,N} \frac{\partial^3 w_N(l_N)}{\partial x_N^3} x_{N+1} \\
 I_{z,N+1}\dot{\omega}_{z,N+1} + (I_{y,N+1} - I_{x,N+1})\omega_{x,N+1}\omega_{y,N+1} &= \\
 = -E_N J_{z,N} \frac{\partial^2 v_N(l_N)}{\partial x_N^2} + E_N J_{z,N} \frac{\partial^3 v_N(l_N)}{\partial x_N^3} x_{N+1} + E_N F_N \frac{\partial u_N(l_N)}{\partial x_N} y_{N+1} \\
 a_{x,N+1} &= a_{x,N}(l_N) - \epsilon_{y,N+1}z_{N+1} + \epsilon_{z,N+1}y_{N+1} - \\
 - \omega_{x,N+1}(\omega_{x,N+1}x_{N+1} + \omega_{y,N+1}y_{N+1} + \omega_{z,N+1}z_{N+1}) + \omega_{N+1}^2 x_{N+1} \\
 a_{y,N+1} &= a_{y,N}(l_N) - \epsilon_{z,N+1}x_{N+1} + \epsilon_{x,N+1}z_{N+1} - \\
 - \omega_{y,N+1}(\omega_{x,N+1}x_{N+1} + \omega_{y,N+1}y_{N+1} + \omega_{z,N+1}z_{N+1}) + \omega_{N+1}^2 x_{N+1} \\
 a_{z,N+1} &= a_{z,N}(l_N) - \epsilon_{x,N+1}y_{N+1} + \epsilon_{y,N+1}x_{N+1} - \\
 - \omega_{z,N+1}(\omega_{x,N+1}x_{N+1} + \omega_{y,N+1}y_{N+1} + \omega_{z,N+1}z_{N+1}) + \omega_{N+1}^2 x_{N+1} \\
 \omega_{N+1}^2 &= \omega_{x,N+1}^2 + \omega_{y,N+1}^2 + \omega_{z,N+1}^2
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для определения компонент $\alpha_{11}^{N+1} = \cos(X, x_{N+1})$, $\alpha_{12}^{N+1} = \cos(X, y_{N+1})$, ..., $\alpha_{33}^{N+1} = \cos(Z, z_{N+1})$ матрицы $A_{N+1} = A_{N+1}(t)$ направляющих косинусов углов между соответ-

ствующими осями систем координат O_1XYZ и $O_{N+1}x_{N+1}y_{N+1}z_{N+1}$ следует воспользоваться кинематическими уравнениями Пуассона [16]:

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_{11}^{N+1} &= \alpha_{12}^{N+1} \omega_{z, N+1} - \alpha_{13}^{N+1} \omega_{y, N+1} \\
 \dot{\alpha}_{12}^{N+1} &= \alpha_{13}^{N+1} \omega_{x, N+1} - \alpha_{11}^{N+1} \omega_{z, N+1} \\
 \dot{\alpha}_{13}^{N+1} &= \alpha_{11}^{N+1} \omega_{y, N+1} - \alpha_{12}^{N+1} \omega_{x, N+1} \\
 \dot{\alpha}_{21}^{N+1} &= \alpha_{22}^{N+1} \omega_{z, N+1} - \alpha_{23}^{N+1} \omega_{y, N+1} \\
 \dot{\alpha}_{22}^{N+1} &= \alpha_{23}^{N+1} \omega_{x, N+1} - \alpha_{21}^{N+1} \omega_{z, N+1} \\
 \dot{\alpha}_{23}^{N+1} &= \alpha_{21}^{N+1} \omega_{y, N+1} - \alpha_{22}^{N+1} \omega_{x, N+1} \\
 \dot{\alpha}_{31}^{N+1} &= \alpha_{32}^{N+1} \omega_{z, N+1} - \alpha_{33}^{N+1} \omega_{y, N+1} \\
 \dot{\alpha}_{32}^{N+1} &= \alpha_{33}^{N+1} \omega_{x, N+1} - \alpha_{31}^{N+1} \omega_{z, N+1} \\
 \dot{\alpha}_{33}^{N+1} &= \alpha_{31}^{N+1} \omega_{y, N+1} - \alpha_{32}^{N+1} \omega_{x, N+1}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Таким образом, дополненная уравнением динамики (2.2) n -го электропривода система уравнений (2.5) динамики n -го ($n = \overline{1, N}$) звена в сочетании с кинематическими уравнениями Пуассона (2.12) образует систему разрешающих уравнений гибридного типа в обыкновенных и частных производных по временной и пространственной координатам относительно искоемых переменных, которая совместно с граничными уравнениями (2.6)–(2.9), (2.11) и соответствующими начальными условиями при заданном законе кинематического или динамического управления однозначно определяет движение обладающего N степенями подвижности манипуляционного механизма с упругими звеньями и приводными устройствами.

Поставим вначале задачу кинематического управления системой (2.2), (2.5)–(2.9), (2.11), (2.12). Пусть задан программный закон изменения во времени N углов $\alpha_n = \alpha_n(t)$ (или угловых ускорений $\ddot{\alpha}_n = \ddot{\alpha}_n(t)$) поворотов валов двигателей приводных устройств ($n = \overline{1, N}$). Требуется определить функции упругих перемещений $u_n(x_n, t)$, $v_n(x_n, t)$, $w_n(x_n, t)$, $\gamma_n(x_n, t)$ звеньев и управляющие моменты $M_n(t)$ ($n = \overline{1, N}$) двигателей, обеспечивающих реализацию N заданных зависимостей $\alpha_n = \alpha_n(t)$ (или $\ddot{\alpha}_n = \ddot{\alpha}_n(t)$).

Задачу динамического управления системой сформулируем следующим образом. Пусть задан программный закон изменения N управляющих электромагнитных моментов $M_n = M_n(t)$ ($n = \overline{1, N}$). Необходимо найти функции упругих перемещений звеньев и N углов $\alpha_n(t)$ (или угловых ускорений $\ddot{\alpha}_n(t)$) поворотов валов двигателей.

3. Результаты математического моделирования. Обсудим результаты исследования рассмотренной в качестве примера задачи динамического управления пространственными движениями двухзвенного робота-манипулятора шарнирно-стержневой структуры с упругоподатливыми приводными устройствами. Для анализа и оценки вклада распределенных свойств упругости звеньев манипулятора в общую динамическую ошибку позиционирования его рабочего органа (схвата), обусловленную возникающими при отработке приводами программных законов управления, воспользуемся следующими двумя постановками задачи. Первая из них соответствует случаю абсо-

лютно жестких звеньев и с привлечением формализма Лагранжа приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, порядок которой в результате учета упругой податливости приводных механизмов удваивается и становится равным $4N$. Вторая постановка формулируется в терминах упругоподатливых звеньев, имеющих эквивалентные жестким физические и геометрические параметры, и приводится на основе изложенного в п. 1 метода к гибридной модели (2.2), (2.5)–(2.9), (2.11), (2.12). Подход, базирующийся на сравнительном анализе полученных в двух постановках динамических характеристик манипулятора, может служить эффективным средством оценки точности позиционирования его рабочего органа, за счет возможности вычисления погрешности позиционирования, которая, как известно [2, 8], является одной из основных характеристик промышленного робота и зависит от упругой податливости всех элементов конструкции системы. Считая, что при выполнении технологических операций исполнительные органы манипулятора (и, в частности, схват) в каждый момент времени должны занимать вполне определенное положение в пространстве (программное положение), задаваемое программными значениями обобщенных координат $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\theta_2 = \theta_2(t)$, найденными в жесткой постановке для случая динамического управления, будем определять обусловленные упругой податливостью погрешности позиционирования ΔX_3 , ΔY_3 , ΔZ_3 по осям неподвижной системы координат O_1XYZ центра масс O_3 переносимого тела (груза) по отношению к программному положению как разности соответствующих координат его центра масс в системе O_1XYZ , вычисленных в упругой и жесткой постановках.

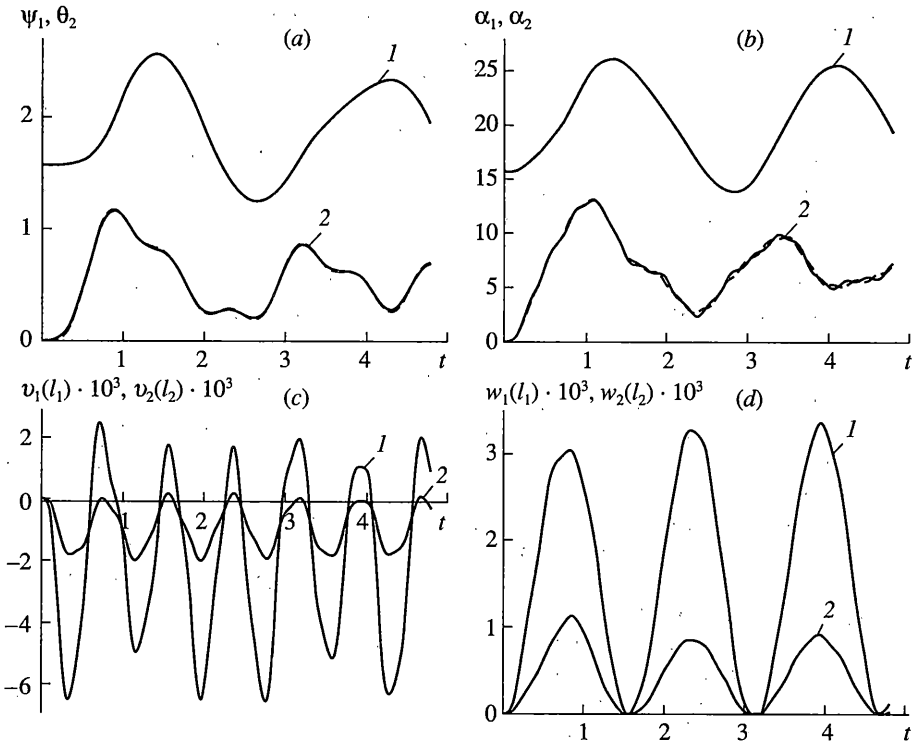
При расчетах приняты следующие параметры конструкции робота. Звенья манипулятора длины $l_1 = 1$ м, $l_2 = 0.8$ м соответственно моделировались стальными трубчатыми стержнями с одинаковыми площадями поперечного сечения $F_1 = F_2 = 1.02102 \cdot 10^{-3}$ м², жесткостями $E_1 F_1 = E_2 F_2 = 6.94292 \cdot 10^7$ Н, $G_1 J_{1x} = G_2 J_{2x} = 2.82056 \cdot 10^4$ Н · м², $E_1 J_{1y} = E_2 J_{2y} = 3.68843 \cdot 10^4$ Н · м², $E_1 J_{1z} = E_2 J_{2z} = 3.68843 \cdot 10^4$ Н · м² при растяжении, кручении и изгибе в двух плоскостях. Характеристики приводных устройств выбраны равными $I_1 = I_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ кг · м², $i_1 = i_2 = 10$, $k_1 = k_2 = 1 \cdot 10^3$ Н · м/рад.

Переносимый манипулятором груз представляет собой шарообразное однородное абсолютно твердое тело радиуса $r = 0.1$ м, масса которого составляет $M = 32.86$ кг. Принято, что оси первого и второго соединительных шарниров совпадают соответственно с осями y_1 и z_2 местных систем координат.

В исходном положении при $t = 0$ манипулятор находится в состоянии покоя; его кинематическая цепочка вытянута в одну прямую линию, вдоль которой направлены оси x_1 , x_2 звеньев, и повернута на угол $\psi_1(0) = \pi/2$ рад относительно оси первого соединительного шарнира. При этом $\theta_2(0) = 0$.

Динамическое управление пространственными движениями манипулятора осуществлялось путем изменения электромагнитных моментов $M_1(t)$, $M_2(t)$, развиваемых двигателями установленных в соединительных шарнирах приводов, на отрезке времени $0 \leq t \leq 4.8$ с изучения движения манипуляционной системы. Заданные законы программного управления манипулятором носят гармонический характер $M_1 = 15(1 - \cos 4t)$ Н, $M_2 = 15(1 - \cos 8t)$ Н.

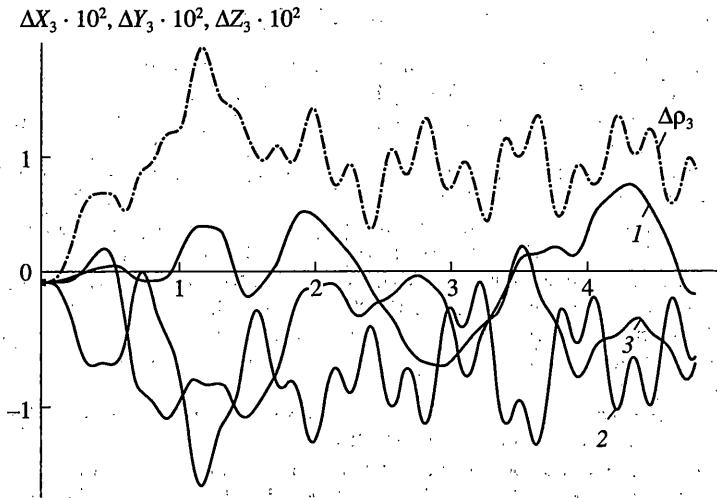
Вычисленные в процессе численного моделирования задач динамического управления углы поворотов $\psi_1(t)$, $\theta_2(t)$ связанных со звеньями местных систем координат $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$ относительно инерциальной O_1XYZ и местной $O_1x_1y_1z_1$ систем координат в жестком случае (штриховые линии) и относительно инерциальной O_1XYZ и дополнительной $O_2x_1^*y_1^*z_1^*$ систем координат в упругом случае (сплошные линии) вокруг осей y_1 , z_2 соответственно изображены на фиг. 2,а, где цифрой 1 отмечена группа кривых для угла ψ_1 [рад], а цифрой 2 – для угла θ_2 [рад]. Отличия значений данных функций, найденных нами для жесткой и упругой постановок, наблюдаются на этапах



Фиг. 2

разгона двигателей приводов и являются наибольшими в моменты достижения управляющими моментами $M_1(t)$, $M_2(t)$ своих максимальных значений. Эта особенность в значительной мере обусловлена сохраняющимся гармоническим характером упругого деформирования звеньев манипулятора с частотами, близкими к частотам управляющих воздействий, который в свою очередь является причиной увеличения амплитуд и уменьшения периодов возникающих в приводных механизмах манипулятора высокочастотных колебаний от 0.3 с для модели с жесткими звеньями (штриховые линии) до 0.2 с для модели с упругими звеньями (сплошные линии), наблюдающихся на фиг. 2, b, где изображены углы $\alpha_1(t)$ [рад] (кривые 1), $\alpha_2(t)$ [рад] (кривые 2) поворотов упругих валов двигателей приводов. Для демонстрации эффекта упругого деформирования звеньев на фиг. 2, c, d представлены функции перемещений $v_1(l_1, t)$ [м], $v_2(l_2, t)$ [м], $w_1(l_1, t)$ [м], $w_2(l_2, t)$ [м] концов стержней (графики 1, 2, соответственно). Можно заметить, что они принимают свои максимальные амплитудные значения (например, $|w_1(l_1, t)|_{\max} = 3.3708 \cdot 10^{-3}$ м, $|w_2(l_2, t)|_{\max} = 1.1251 \cdot 10^{-3}$ м) в те же моменты времени, что и управления $M_1(t)$, $M_2(t)$. При этом функции $v_1(l_1, t)$, $v_2(l_2, t)$, как и $M_2(t)$, имеют более высокочастотный характер, чем функции $w_1(l_1, t)$, $w_2(l_2, t)$ и $M_1(t)$.

Возникающие в процессе функционирования робота нежелательные упругие колебания звеньев манипулятора кроме отклонений “жестких” составляющих $\psi_1(t)$, $\theta_2(t)$ их пространственного движения от задаваемых программных положений (фиг. 2) вызывает также появление существенных погрешностей позиционирования ΔX_3 [м], ΔY_3 [м], ΔZ_3 [м] центра масс транспортируемого груза по каждой из осей инерциальной сис-



Фиг. 3

темы координат, изменение которых с течением времени иллюстрируется графиками 1–3 (сплошные линии) на фиг. 3. Они носят высокочастотный характер и их максимальные абсолютные значения составляют $|\Delta X_3(t)|_{\max} = 7.743 \cdot 10^{-3}$ м, $|\Delta Y_3(t)|_{\max} = 1.623 \cdot 10^{-2}$ м, $|\Delta Z_3(t)|_{\max} = 1.091 \cdot 10^{-2}$ м. Очевидно, что максимальные погрешности позиционирования по координатам Y и Z в зависимости от назначения и области применения робота могут оказаться неприемлемыми в связи со значительным превышением предельно допустимых при выполнении некоторых технологических операций значений погрешностей позиционирования. На фиг. 3 штрихпунктирной линией выделена максимальная ошибка позиционирования $\Delta \rho_3 = (\Delta X_3^2 + \Delta Y_3^2 + \Delta Z_3^2)^{1/2}$ [м] центра масс груза как функция времени, предельное значение которой равно $|\Delta \rho_3(t)|_{\max} = 1.867 \cdot 10^{-2}$ м. При этом средняя ошибка его позиционирования за время изучения движения 4.8 с составляет $9.38 \cdot 10^{-2}$ м.

4. Заключение. Результаты выполненных исследований позволяют сделать следующие выводы:

1. Учет упругой податливости звеньев роботов-манипуляторов при моделировании динамики их движения приводит к математическим моделям гибридного типа, включающим обыкновенные производные от угловых переменных, определяющих движение звеньев как твердых тел, и частные производные от функций относительных перемещений звеньев, описывающих их упругие деформации.

2. Учет упругой податливости передаточных механизмов приводных устройств манипуляторов сопровождается, в рамках принятой модели, увеличением числа параметров, определяющих его пространственное положение, на $2N$, где N количество звеньев.

3. Численное моделирование динамики управляемого движения упругого манипулятора позволило установить, что обусловленные гибкостью его звеньев погрешности позиционирования транспортируемого груза носят высокочастотный характер и могут достигать существенных значений.

4. Наличие факторов упругости конструкции манипуляторов обуславливает появление высокочастотных колебаний также и в их приводных механизмах, что вызывает необходимость одновременного учета упругой податливости приводов и исполнительных органов при построении математических моделей динамики роботов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 3. С. 118–124.
2. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 363 с.
3. Morris A.S., Madani A. Static and dynamic modelling of a two-flexible-link robot manipulators // Robotica. 1996. V. 14. № 3. P. 289–300.
4. Yu S., Elbestawi M.A. Modelling and dynamic analysis of a two-link manipulator with both joint and link flexibilities // J. Sound and Vibrat. 1995. V. 179. № 5. P. 839–854.
5. Meirovitch L., Stemple T. Hybrid equations of motion for flexible multibody systems using quasicordinates // J. Guid., Contr., and Dyn. 1995. V. 18. № 4. P. 678–688.
6. Гуляев В.И., Завражина Т.В. Динамическое управление плоскими движениями упругого двузвонного космического робота-манипулятора // Проблемы управления и информатики. 1998. № 1. С. 140–154.
7. Гуляев В.И., Завражина Т.В. Динамика управляемых движений упругого робота-манипулятора // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 5. С. 19–28.
8. Крутько П.Д. Управление исполнительными системами роботов. М.: Наука, 1991. 336 с.
9. De Queiroz M.S., Donerudi S., Burg T., Dawson D.M. Model-based control of rigid-link flexible-joint robots: An experimental evaluation // Robotica. 1998. V. 16. № 1. P. 11–21.
10. Vukobratovic M., Matijevic V., Potkonjak V. Control of robots with elastic joints interacting with dynamic environment // J. Intell and Rob. Syst. 1998. V. 23. № 1. P. 87–100.
11. Korayem M.H., Basu A. Optimal load of robotic manipulator with joint elasticity using accuracy and actuator constraints // Intern. J. Adv. Manuf. Technol. 1995. V. 10. № 6. P. 427–434.
12. Gogate Sachin, Lin Yueh-Jaw. Formulation and control of robots with link and joint flexibility // Robotica. 1993. V. 11. № 3. P. 273–282.
13. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 447 с.
14. Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1990. 512 с.
15. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 332 с.
16. Лойцянский Л.Г., Лурье Л.И. Курс теоретической механики. М.: Наука; Т. 1. 1982. 352 с.; Т. 2. 1983. 640 с.

Киев

Поступила в редакцию
12.04.2001