

УДК 533.6.013.42

© 2003 г. В. И. МОРОЗОВ, В. В. ОВЧИННИКОВ

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ АЭРОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КРЫЛА ПРИ ОТРЫВНОМ ОБТЕКАНИИ

Рассматриваются математические модели аэроупругости крыла с учетом нелинейности аэродинамических характеристик. Приводится математическая постановка задачи, описан принцип построения математических моделей на базе методов дискретных вихрей и заданных собственных форм. Задача рассматривается на примерах профиля и тонкого балочного крыла. На нелинейную область обобщаются понятия статической и динамической аэроупругой устойчивости, показано влияние нелинейности и отрывов потока на критические скорости флаттера и дивергенции. Приведены результаты расчетов.

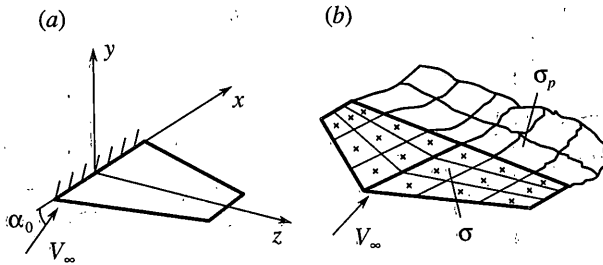
**1. Введение.** Для современных самолетов характерны такие режимы полета (маневрирование на больших углах атаки, выполнение фигур высшего пилотажа), когда зависимости аэродинамических нагрузок от кинематических параметров являются нелинейными, и для исследования характеристик их аэроупругой устойчивости недостаточно разработанных до настоящего времени линейных моделей аэроупругости. В то же время, очевидно, нелинейность аэродинамических характеристик, и, в особенности, наличие отрыва потока могут весьма заметно влиять на аэроупругую устойчивость. В настоящее время единственным способом теоретического изучения таких явлений представляется численный эксперимент на ЭВМ с помощью математической модели процесса аэроупругих колебаний. Данная работа посвящена синтезу математической модели деформирования и нагружения несущих поверхностей самолета при их отрывном и безотрывном обтекании потоком идеальной несжимаемой жидкости, а также исследованию с ее помощью аэроупругой устойчивости элементов летательных аппаратов. Эта модель строится на основе метода собственных форм [1] для описания возмущенного движения и деформирования элементов летательных аппаратов (ЛА) и метода дискретных вихрей [2] для определения аэродинамических нагрузок на упругое крыло.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим упругое тело (крыло, оперение ЛА) в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Введем связанную с ним систему координат  $Oxuz$  и скоростную систему координат  $Ox_a y_a z_a$  стандартным способом. Начала координат этих систем совпадают (фиг. 1,а).

Пусть возмущенное движение и деформирование тела полностью определяется вектором-столбцом параметров движения  $\mathbf{q}$  (в общем случае бесконечномерным). Тогда уравнения возмущенного движения, которые описывают его малые колебания около положения равновесия символически можно записать как

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, V_\infty) \quad (2.1)$$

Здесь  $L$  – дифференциальный (конечный, если решается статическая задача аэроупругости) оператор, зависящий от геометрических, упругих и массово-инерционных характеристик объекта,  $\mathbf{P}$  – вектор-столбец обобщенных аэродинамических сил, кото-



Фиг. 1

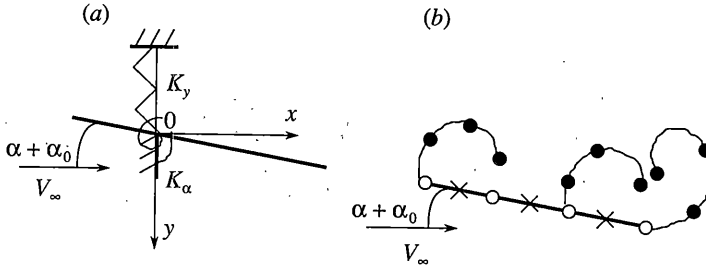
рый определяется воздействием потока на тело с учетом его упругих свойств,  $V_\infty$  – скорость набегающего потока.

В настоящее время хорошо развиты методы решения данной задачи при условии линейной зависимости обобщенных сил от параметров движения [1]. Как известно, в этом случае становится возможным записать аналитическое выражение для вектора столбца обобщенных сил. Например, при использовании гипотезы гармоничности, приближенно учитывающей влияние нестационарности обтекания на нагружение и деформирование ЛА [1] будет  $P(t) = P^q q(t) + P^{\dot{q}} \dot{q}(t)$ , где  $P^q, P^{\dot{q}}$  – матрицы коэффициентов аэродинамических производных обобщенных сил по соответствующим параметрам движения,  $t$  – время. Эти коэффициенты могут быть известными методами вычислены для каждого летательного аппарата заранее (см., например, [3]), и, следовательно, являются исходными данными для моделирования возмущенного движения упругого летательного аппарата. Таким образом, после расчета аэродинамических характеристик самолета и динамических характеристик его упругой конструкции (собственных форм и частот) задача аэроупругости сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если рассматривается возмущенное движение относительно базовой траектории (короткопериодическое), то эти уравнения – линейные с постоянными коэффициентами.

Совершенно иная ситуация складывается, если аналитической зависимости  $P(q)$  не существует, что и наблюдается при использовании нелинейной аэродинамической теории. В этом случае необходимо моделировать процесс обтекания упругого летательного аппарата с развитием нестационарного пространственного вихревого следа, иногда с учетом отрыва потока с передней кромки несущих поверхностей. Принцип суперпозиции не выполняется, т.е. нет возможности решать по отдельности задачи об изменении различных кинематических параметров движения, а затем суммировать их воздействие на аэродинамические обобщенные силы.

Выходом из положения является совместное решение упругой и аэродинамической задачи по временным шагам, т.е. прямое моделирование физического процесса обтекания. Задаваясь некоторой начальной формой объекта (например, недеформированной), строим для него аэродинамическую схематизацию, которая меняется в ходе моделирования вследствие деформации элементов конструкции летательного аппарата. Влияние аэродинамики на упругость проявляется в том, что именно нелинейные аэродинамические силы во взаимодействии с силами инерции определяют упомянутую деформацию.

Итак, формулируя конкретную задачу аэроупругости с учетом аэродинамической нелинейности, нужно ответить на следующие вопросы: как записать для данного случая оператор  $L$  и каким образом при заданной форме летательного аппарата (определяемой вектором параметров движения  $q$ ) и при данных условиях обтекания (опреде-



Фиг. 2

ляемых исходными предположениями аэродинамической модели) рассчитать обобщенные силы  $P$ ?

**3. Уравнения аэроупругости.** В данной работе изучались задачи аэроупругой устойчивости для профиля (отсека крыла) в плоскопараллельном потоке и для тонкого балочного крыла.

Сначала рассмотрим уравнения динамики профиля крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости (фиг. 2,а). Упругие свойства крыла в характерном сечении схематизируются пружинами, соответствующими двум степеням свободы колебательной системы. Пружины имеют жесткости  $K_y$  (изгибные колебания крыла) и  $K_\alpha$  (крутильные колебания крыла). Начало координат совпадает с центром вращения профиля и расположено на расстоянии  $x_0$  от его носка, ось  $y$  направлена вниз, ось  $x$  – по скорости невозмущенного потока.

Динамика малых колебаний такой системы около положения равновесия описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка [4], относительно угла закрутки профиля  $\alpha$  и его поступательного перемещения  $y$ . Эта система является частным случаем выражения (2.1) и в безразмерном виде записывается так:

$$\begin{cases} \mu \ddot{y} + s_\alpha \ddot{\alpha} + \mu \omega_y^2 y = -c_{ya} \\ s_\alpha \ddot{y} + i_\alpha \ddot{\alpha} + i_\alpha \omega_\alpha^2 \alpha = m_z \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\mu = \frac{2m}{\rho b^2}, \quad s_\alpha = \mu x_\alpha, \quad i_\alpha = \frac{2I_\alpha}{\rho b^4}, \quad \omega_y = \sqrt{\frac{K_y}{m}} \frac{b}{V_\infty}, \quad \omega_\alpha = \sqrt{\frac{K_\alpha}{I_\alpha}} \frac{b}{V_\infty}$$

$$c_{ya} = \frac{2Y_a}{\rho V_\infty^2 b}, \quad m_z = \frac{2M_z}{\rho V_\infty^2 b^2}$$

Здесь  $\mu$  – относительная плотность профиля,  $m$  – его погонная масса,  $s_\alpha$  – безразмерный статический момент профиля относительно его оси вращения,  $x_\alpha$  – расстояние между центром вращения и центром тяжести профиля),  $i_\alpha$  – безразмерный момент инерции профиля относительно его оси вращения,  $I_\alpha$  – погонный массовый момент инерции,  $\omega_y, \omega_\alpha$  – безразмерные частоты несвязанных изгибных и крутильных колебаний профиля,  $b$  – хорда профиля,  $\rho, V_\infty$  – плотность и скорость невозмущенного потока,  $c_{ya}, m_z$  – коэффициенты подъемной силы и аэродинамического момента относительно центра вращения профиля; дифференцирование производится по безразмерному времени  $\tau = tV_\infty/b$  ( $t$  – размерное время).

Уравнения (3.1) интегрируются численно и на каждом расчетном шаге по безразмерному времени определяются аэродинамические нагрузки для нового положения

профиля. При этом решаются связанные задачи динамики и нестационарной аэродинамики профиля.

В трехмерном случае рассматриваются малые колебания тонкого консольно заземленного крыла около положения равновесия в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Для описания упругих свойств объекта используется балочная схематизация [1] и метод собственных форм. Расчетные схемы крыла приведены на фиг. 1а; б. Согласно методу собственных форм упругие перемещения точек системы представляются в виде разложения по формам ее собственных свободных колебаний. Крыло схематизируется балкой с распределенными по ее длине массой и жесткостью, собственные формы и частоты колебаний которой определяются заранее. Уравнения возмущенного движения системы (2.1) записываются в форме:

$$M(\ddot{\mathbf{q}} + 2\chi\Omega\dot{\mathbf{q}} + \Omega^2\mathbf{q}) = \mathbf{P}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) \quad (3.2)$$

При решении задачи статической аэроупругости уравнение (3.2) имеет вид

$$M\Omega^2 = \mathbf{P}_n(\mathbf{q}) \quad (3.3)$$

Здесь  $\chi$ ,  $\Omega$  – диагональные матрицы коэффициентов конструкционного демпфирования и частот собственных свободных колебаний системы;  $\mathbf{q}$  – вектор-столбец безразмерных параметров движения по собственным формам колебаний;  $M$  – диагональная матрица обобщенных масс системы. Вектор-столбец  $\mathbf{P}_n$  обобщенных аэродинамических сил определяется на каждом шаге численного интегрирования уравнения (3.2) (или на каждой итерации при решении статического уравнения (3.3)) из решения задачи аэродинамики по формуле [1]:

$$\mathbf{P}_{nl} = \int \varphi_l \Delta p ds$$

где  $\Delta p$  – перепад давлений;  $\varphi_l$  – перемещения точек системы по  $l$ -й форме. Интегрирование производится по всей площади крыла  $S$ . При этом, в отличие от линейных задач аэроупругости, где аэродинамическая и динамическая части задачи разделены, здесь на каждом расчетном шаге по времени (на каждой итерации) необходим пересчет деформированной формы крыла и вихревой схемы. Для численного интегрирования уравнения (3.2) используется метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности с автоматическим выбором шага, уравнение (3.3) решается методом простой итерации.

При известных параметрах движения системы (крыла) перемещения ее точек определяются с помощью разложения по формам

$$\mathbf{r} = \sum_{l=1}^{N_q} \varphi_l \mathbf{q}_l \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{r}$  – вектор-столбец упругих перемещений расчетных точек.

**4. Определение аэродинамических нагрузок.** Обобщенные аэродинамические силы определяются в данной работе из решения нелинейной нестационарной задачи об отрывном или безотрывном обтекании деформируемого тела потоком идеальной несжимаемой жидкости. Эта задача в наиболее общем виде ставится следующим образом.

Упругий элемент ЛА, закрепленный определенным образом (установочный угол атаки  $\alpha_0$ ), совершает колебания в потоке идеальной несжимаемой жидкости, которая имеет на бесконечном удалении от него скорость  $V_\infty$ . Вводятся безразмерное время  $\tau$  как  $\tau = tV_\infty/b$ , где  $b$  – характерный размер тела и безразмерное давление  $c_p = 2p/\rho V_\infty^2$ ,

где  $\rho$  – плотность жидкости. Безразмерные аэродинамические коэффициенты определяются следующим образом:

$$c_{xa} = 2X_a/\rho V_\infty^2 S, \quad c_{ya} = 2Y_a/\rho V_\infty^2 S, \quad c_{za} = 2Z_a/\rho V_\infty^2 S$$

$$c_x = 2X/\rho V_\infty^2 S, \quad c_y = 2Y/\rho V_\infty^2 S, \quad c_z = 2Z/\rho V_\infty^2 S$$

соответственно в скоростной и в связанной системах координат;  $m_x = 2M_x/\rho V_\infty^2 S b$ ,  $m_y = 2M_y/\rho V_\infty^2 S b$ ,  $m_z = 2M_z/\rho V_\infty^2 S b$ , где  $S$  – характерная площадь тела;  $X, Y, Z$  – аэродинамические силы вдоль осей системы координат  $Oxyz$ ;  $M_x, M_y, M_z$  – моменты этих сил;  $X_a, Y_a, Z_a$  – аэродинамические силы вдоль осей системы координат  $Ox_a y_a z_a$ .

Линии схода вихревой пелены  $\sigma_p$  (отрыва потока) с поверхности объекта  $\sigma$  считаются известными и фиксированными на острых кромках поверхности тела. Поле скоростей  $V(x, y, z, t)$  вне поверхностей  $\sigma$  и  $\sigma_p$  считается потенциальным. Тогда для потенциала возмущенных скоростей  $\Phi$  вне этих поверхностей выполняется уравнение Лапласа [2]:

$$\Delta \Phi = 0 \tag{4.1}$$

Поле давлений в любой точке пространства определяется интегралом Коши–Лагранжа, который в этом случае при затухании возмущений на бесконечности принимает вид [2]:

$$p(x, y, z, t) = p_\infty - \rho \left( \partial \Phi / \partial t + \frac{1}{2} V^2 \right) \tag{4.2}$$

где  $p_\infty$  – давление на бесконечности. После определения давлений на поверхности тела легко находятся интегрированием по его поверхности аэродинамические силы и моменты. Таким образом, задача сводится к отысканию потенциала скоростей  $\Phi$ , удовлетворяющего уравнению (4.1) и граничным условиям: условию непротекания на поверхности тела; условию затухания возмущений на бесконечном удалении от тела; условию Чаплыгина–Жуковского о конечности скоростей на линии схода свободной вихревой пелены; условию отсутствия перепада давлений и кинематической совместности течений на пелене.

В настоящей работе эта задача решается методом дискретных вихрей [2]. Согласно этому методу, поверхность обтекаемого тела заменяется вихревым слоем, интенсивность которого подлежит определению. Непрерывное распределение вихревого слоя аппроксимируется дискретными вихревыми отрезками (фиг. 1, б). При этом уравнение Лапласа удовлетворяется автоматически, а выполнение граничных условий в конечном количестве контрольных точек в любой момент времени приводит к системе линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных интенсивностей (циркуляций) вихревых отрезков. В матричном виде эта система может быть записана так

$$\begin{cases} W_\sigma(t) \Gamma_\sigma(t) + W_{\sigma_p}(t) \Gamma_{\sigma_p}(t) = V_n(t) \\ (\sum (\Gamma_\sigma(t) + \Gamma_{\sigma_p}(t)))' = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

на каждом расчетном шаге по времени. Здесь  $W_\sigma, W_{\sigma_p}$  – матрицы коэффициентов влияния скорости от вихревых отрезков на поверхности тела и на пелене соответственно в контрольных точках поверхности тела,  $\Gamma_\sigma, \Gamma_{\sigma_p}$  – векторы-столбцы интенсивностей вихревых отрезков,  $V_n$  – вектор-столбец нормальной скорости в контрольной

точке, определяющийся формой тела и условиями его движения. Обеспечение условия Чаплыгина–Жуковского на линиях отрыва происходит в зависимости от модификации метода за счет выбора расчетной схемы объекта. Кроме того, система дополнена условием постоянства суммарной интенсивности вихревых отрезков на теле и в потоке, следующим из теоремы Томсона о сохранении циркуляций [2]. Типичная вихревая схема для профиля изображена на фиг. 2, *b* (здесь крестами обозначены контрольные точки, точками – суммарные и свободные вихри), для крыла – на фиг. 1, *b*.

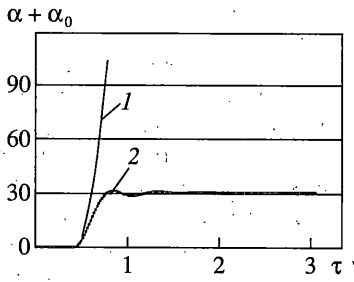
Нестационарная задача решается шаг за шагом по времени, при этом на каждом шаге с поверхности тела сходит очередной участок вихревой пелены, чем обеспечивается неизменность циркуляции. Граничное условие на пелене выполняется перемещением вихревых отрезков по линиям жидких частиц. Определение нового положения вихревых отрезков производится путем интегрирования уравнений движения жидких частиц. В случае решения стационарной задачи вихревая пелена выстраивается итерационно.

Сопряжение аэродинамической и упругой частей задачи осуществляется следующим образом. Уравнение (2.1) решается численно (интегрируется, когда рассматривается динамическая задача аэроупругости и решается итерационно с определением равновесной формы объекта при исследовании статической аэроупругости). Обобщенные силы, стоящие в правой части уравнения (2.1), определяются на каждом шаге расчета (на каждой итерации) из решения аэродинамической задачи об обтекании упругого тела. При этом форма тела в потоке изменяется, а значит, на каждом шаге (итерации), кроме того, приходится пересчитывать положение точек объекта и изменять вихревую схему.

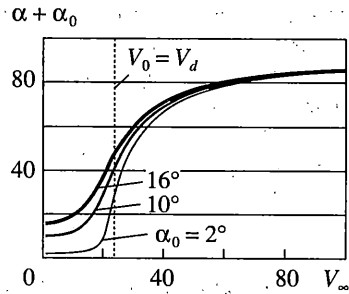
Конкретный вид формул (4.3) (коэффициенты влияния, условие постоянства циркуляции и т.п.) определяются в зависимости от постановки задачи: аэродинамическая задача для профиля решается методом дискретных вихрей в двумерной постановке [2], при рассмотрении крыла конечного размаха используется метод дискретных вихрей с замкнутыми рамками [5].

**5. Статическая аэроупругая устойчивость.** Представляется целесообразным начать исследования в такой сложной и малоизученной области с применения относительно простой двумерной математической модели аэроупругости. Несмотря на модельный характер таких задач, они имеют весьма большой научный, методический и даже определенный практический интерес. В первую очередь, двумерные задачи позволяют сделать ряд общих выводов относительно методики расчета (обеспечение устойчивости метода, получение осредненных по времени характеристик и т.д.), которые могут затем быть использованы при исследованиях с помощью математических моделей трехмерных течений. Это чрезвычайно важно для сокращения объемов расчета, который при применении пространственных моделей нелинейной аэродинамики требует весьма больших ресурсов машинного времени. Далее, ряд приближенных оценок аэроупругой устойчивости элементов ЛА в ходе проекторочного расчета можно сделать на основе результатов решения двумерных задач, очень полезными оказываются также полученные из них качественные соображения касательно влияния параметров профиля и условий обтекания на динамику его колебаний в потоке и характеристики аэроупругой устойчивости. Наконец, результаты решения двумерных задач аэроупругости при нелинейных режимах обтекания могут оказать серьезную помощь при постановке трубного эксперимента и проектировании установок для экспериментального исследования элементов ЛА на около- и закритических режимах полета.

Рассмотрим задачу определения равновесного угла закрутки профиля на пружине в потоке жидкости. Она имеет прикладное значение в связи с нахождением критической скорости дивергенции профиля  $V_d$  – такой скорости невозмущенного потока, при которой упругие силы, действующие на профиль, уже не могут уравновесить аэроди-



Фиг. 3



Фиг. 4

намические, и крутильные деформации профиля вследствие этого неограниченно возрастают. Следует отметить, что такое определение, строго говоря, справедливо лишь при использовании линейных моделей аэродинамики. Если используется нелинейная модель, то каждой скорости невозмущенного потока соответствует вполне определенный конечный угол закрутки вплоть до разрушения конструкции.

Для решения этой задачи используем второе уравнение системы (3.1). В стационарном случае оно принимает вид

$$i_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 \alpha = m_z \tag{5.1}$$

Задача ставится следующим образом: получить угол закрутки профиля  $\alpha$ , удовлетворяющий уравнению (5.1) при заданной скорости набегающего потока и установочном угле  $\alpha_0$ .

Применяя линейную модель аэродинамики, можно получить аналитическое выражение для равновесного угла закрутки и скорости дивергенции профиля [6]:

$$V_{d.} = \sqrt{\frac{2K_{\alpha}}{\rho b^2 c_{ya}^{\alpha} (x_0 - x_p)}}, \quad \alpha = \frac{\alpha_0}{(V_d/V_{\infty})^2 - 1}$$

где  $x_p$  и  $x_0$  – координаты центра давления и оси вращения относительно носка профиля,  $c_{ya}^{\alpha}$  – наклон кривой подъемной силы.

На фиг. 3 показаны результаты расчета угла атаки  $\alpha + \alpha_0$  [град] профиля на пружине в зависимости от времени при установочном угле атаки  $\alpha_0 = 2^{\circ}$ . Видно, что при расчете по линейной аэродинамической модели (кривая 1) на скорости, соответствующей скорости дивергенции ( $V_d = 23$  м/с для этого случая), наблюдается неограниченное увеличение угла атаки с течением времени, при расчете же по нелинейной модели (использовалась схема без отрыва по передней кромке профиля вследствие малости установочного угла) происходит хотя и быстрый, но ограниченный рост угла атаки с последующим выходом на равновесное значение (кривая 2). Тем не менее, равновесный угол столь велик, что это соответствует традиционному пониманию сущности явления дивергенции – происходит разрушение конструкции из-за необратимых деформаций.

На фиг. 4 представлены результаты исследования зависимости равновесного угла атаки от скорости потока  $V_{\infty}$  [м/с] при различных значениях установочного угла  $\alpha_0$ . Видно, что на всех графиках скорости дивергенции приблизительно соответствует перегиб кривой, а при неограниченном увеличении скорости равновесный угол атаки стремится к  $90^{\circ}$  (профиль занимает положение поперек потока). При небольших скоростях, как и следовало ожидать, наблюдается увеличение равновесного угла атаки с ростом угла установочного.

Рассмотрим подробнее вопрос о соотношении критической скорости дивергенции  $V_d$ , получающейся при расчетах по линейной модели и характерной для нелинейного подхода точки перегиба кривой, описывающей зависимость угла атаки от скорости набегающего потока  $V_\infty$ . Значение скорости, при котором наступает перегиб кривой (или, что то же самое, наблюдается самый быстрый рост угла атаки с увеличением скорости потока), обозначим  $V_n$ . При безотрывном обтекании эта скорость должна удовлетворять уравнению равновесия (5.1), которое в размерном виде можно записать как

$$K_\alpha(\alpha - \alpha_0) = \frac{1}{2}\rho V^2 b^2 (x_0 - 0.25)\pi \sin 2\alpha$$

Здесь и далее скорость набегающего потока обозначена через  $V$  для сокращения записи. В правой части уравнения равновесия учтено, что точное значение коэффициента  $m_z$  при безотрывном обтекании профиля равно  $(x_0 - 0.25)\pi \sin 2\alpha$  [2]. Кроме того, кривизна на кривой, описывающей зависимость  $\alpha(V)$ , должна быть равна нулю в точке перегиба. Для аналитической записи этого условия воспользуемся неявной формой записи зависимости  $\alpha(V)$ , следующей из уравнения равновесия:

$$F(\alpha, V) = K_\alpha(\alpha - \alpha_0) - \frac{1}{2}\rho V^2 b^2 (x_0 - 0.25)\pi \sin 2\alpha = 0$$

Известно [7], что кривизна линии, заданной уравнением  $F(\alpha, V) = 0$ , определяется как

$$K = \det \begin{bmatrix} F_{\alpha\alpha} & F_{\alpha V} & F_\alpha \\ F_{V\alpha} & F_{VV} & F_V \\ F_\alpha & F_V & 0 \end{bmatrix} / (F_\alpha^2 + F_V^2)^{\frac{3}{2}}$$

где индексы у функции  $F$  означают частные производные по соответствующим переменным. Вычисляя эти производные и вводя обозначение  $A = \pi r b^2 (x_0 - 0.25)$ , имеем

$$F_\alpha = K_\alpha - AV^2 \cos 2\alpha, \quad F_V = -AV \sin 2\alpha, \quad F_{\alpha V} = -2AV \cos 2\alpha$$

$$F_{\alpha\alpha} = 2AV^2 \sin 2\alpha, \quad F_{VV} = -A \sin 2\alpha$$

Из условия  $K = 0$  после некоторых преобразований получим

$$-A^3(2 + 2\cos^2 2\alpha)V^4 + 2A^2 K_\alpha \cos 2\alpha V^2 + K_\alpha^2 A = 0, \quad \sin 2\alpha \neq 0$$

Решив это уравнение относительно  $V^2$  и отбросив один из корней, как заведомо отрицательный, находим выражение для скорости в точке перегиба

$$V_n^2 = \frac{K_\alpha(\cos 2\alpha + \sqrt{2 + 2\cos^2 2\alpha})}{A(2 + \cos^2 2\alpha)}$$

Учитывая, что  $K_\alpha/A = V_d^2$ , запишем

$$\left(\frac{V_n}{V_d}\right)^2 = \frac{\cos 2\alpha + \sqrt{2 + 2\cos^2 2\alpha}}{2 + \cos^2 2\alpha}$$

Ввиду того, что скорость  $V_n$  удовлетворяет уравнению равновесия, должно быть

$$V_n^2 = \frac{K_\alpha 2(\alpha - \alpha_0)}{A \sin 2\alpha}, \quad \left(\frac{V_n}{V_d}\right)^2 = \frac{2(\alpha - \alpha_0)}{\sin 2\alpha}$$



Отброшенное в процессе преобразований значение  $\alpha$ , при котором  $\sin 2\alpha = 0$ , т.е.  $\alpha = \pi/2$ , соответствует стремлению профиля встать поперек потока при неограниченном увеличении скорости.

Сравнивая два выражения для отношения  $(V_n/V_d)^2$ , получим трансцендентное уравнение, определяющее угол атаки в точке перегиба:

$$\frac{2(\alpha - \alpha_0)}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha + \sqrt{2 + 2\cos^2 2\alpha}}{2 + \cos^2 2\alpha} \quad (5.2)$$

Решив его, можно затем найти отношение  $(V_n/V_d)^2$ . Из равенства (5.2) следует, что положение точки перегиба зависит лишь от установочного угла атаки  $\alpha_0$ . В случае, когда  $\alpha_0 = 0$ , отношение  $(V_n/V_d)^2$  можно найти из следующих соображений. Очевидно, что при  $\alpha \in [0, \pi/2]$  выполняется условие  $2\alpha/\sin 2\alpha \geq 1$ , причем равенство достигается в пределе при  $\alpha \rightarrow 0$ . Оценим теперь левую часть (5.2) и докажем, что в интервале  $\alpha \in [0, \pi/2]$  она не превосходит значения 1. Сравним ее числитель  $\cos 2\alpha + \sqrt{2 + 2\cos^2 2\alpha}$  и знаменатель  $2 + \cos^2 2\alpha$  или полученные из них неотрицательные выражения  $\sqrt{2 + 2\cos^2 2\alpha}$  и  $2 + \cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha$ . Находя разность квадратов данных выражений, имеем

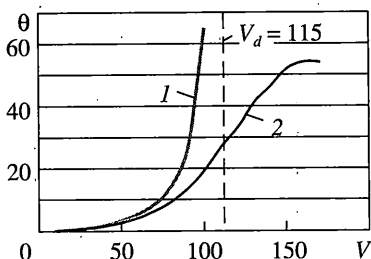
$$\begin{aligned} (2 + \cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha)^2 - (2 + \cos^2 2\alpha) &= \cos^4 2\alpha - 2\cos^3 2\alpha + 3\cos^2 2\alpha - 4\cos 2\alpha + 2 = \\ &= \cos^3 2\alpha(\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1) + 2(\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1) = \\ &= (\cos^2 2\alpha + 2)(1 - \cos 2\alpha)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при интересующих значениях  $\alpha$  числитель (5.2) не превосходит знаменатель, что и доказывает предлагаемую оценку.

Итак, при  $\alpha_0 = 0$ , уравнение (5.2) может выполняться, только при условии, что его правая и левая части равны 1. При этом нулевой кривизне линии  $F(\alpha, V) = 0$  будут соответствовать значения  $\alpha = 0$ ,  $V = V_d$ . Т.е. при  $\alpha_0 = 0$  скорость дивергенции и скорость, при которой наблюдается максимально быстрый рост угла атаки в зависимости от скорости потока, совпадают.

Когда установочный угол  $\alpha_0$  увеличивается, точка перегиба несколько сдвигается в сторону меньших скоростей. Можно заметить, что расхождение между скоростями  $V_n$  и  $V_d$  не очень сильно изменяется при увеличении  $\alpha_0$  (так, при  $\alpha_0 = 17^\circ$ ,  $(V_n/V_d) = 0.9$ , а  $\alpha + \alpha_0 = 39^\circ$ , т.е. суммарный угол атаки слишком велик, чтобы можно было пользоваться расчетной схемой безотрывного обтекания). Таким образом, при сохранении безотрывного обтекания можно считать, что скорости  $V_n$  и  $V_d$  различаются меньше, чем на 10%. Поэтому можно определить скорость набегающего потока  $V_n$  как скорость дивергенции при безотрывном обтекании.

В трехмерном случае аналогичные исследования были проведены для динамически подобной модели крыла самолета Як-40. Изучалось влияние скорости набегающего потока на угол закрутки  $\theta$  [град] конца крыла. Деформации упругого крыла находились на основе численного решения уравнения (3.3). На фиг. 5 представлены зависимости угла  $\theta$  от скорости набегающего потока  $V_\infty$  [м/с]. Хорошо видно, что при скорости, равной критической скорости дивергенции, которая для такого крыла может быть определена традиционными методами [1, 4], угол  $\theta$ , рассчитанный по линейной модели (кривая 1), неограниченно растет, а при расчете по нелинейной модели (кривая 2) наблюдается хотя и быстрый, но ограниченный рост этого угла. Такая разница в зависимостях угла



Фиг. 5

закрутки обусловлена изменением нелинейных стационарных аэродинамических характеристик при деформациях упругого крыла.

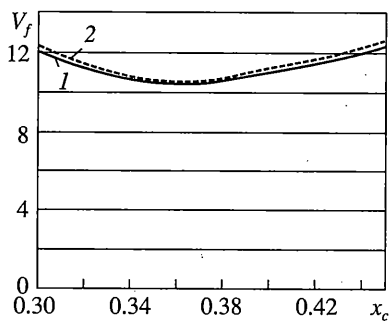
**6. Динамическая аэроупругая устойчивость.** Среди большого разнообразия задач динамической аэроупругости в нелинейной по аэродинамике постановке наибольший интерес вызывает вопрос определения критической скорости флаттера. При использовании линейных моделей аэродинамики данная задача сводится к общей проблеме собственных значений для некоторой матрицы [1]. В данном случае, вследствие отсутствия аналитического выражения нелинейных аэродинамических нагрузок критическая скорость флаттера ( $V_f$ ) элементов летательного аппарата вычислялась с помощью прямого моделирования. Наблюдая за динамикой колебаний профиля при различных скоростях набегающего потока, можно с заданной точностью найти такую скорость, при которой наблюдаются незатухающие колебания. Эта скорость в настоящей работе и считается критической скоростью флаттера. Для достоверного суждения о поведении системы проводились расчеты до больших значений безразмерного времени ( $\tau > 100$ ).

На двумерной модели исследовались флаттерные характеристики профиля крыла, динамика которого в потоке газа описывается уравнениями (3.1). Изучалось влияние нелинейности аэродинамических характеристик на зависимости критической скорости флаттера от различных массово-инерционных и жесткостных параметров профиля при безотрывном и отрывном обтекании.

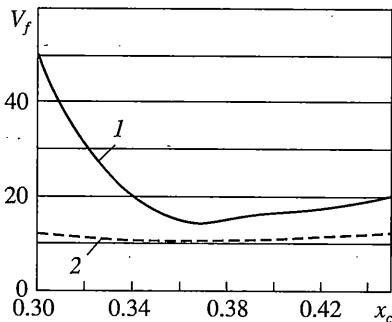
На фиг. 6 проведена зависимость критической скорости флаттера профиля при безотрывном обтекании от положения его центра тяжести  $x_c$  в сравнении с аналогичной зависимостью из [6], полученной с помощью линейной аэродинамической теории (кривая 1). Из графика видно, что при безотрывном обтекании на малых углах атаки нелинейность не оказывает существенного влияния на величину критической скорости флаттера – кривые, соответствующие линейной и нелинейной (кривая 2) моделям, практически совпадают.

Проводились численные эксперименты по определению критической скорости флаттера при отрывном обтекании профиля. Предполагалось, что отрыв с передней кромки существует всегда и не зависит от угла атаки профиля. Такой расчетной схеме соответствует, например, аэродинамический нож или интерцептор, установленный в районе носка профиля. На фиг. 7 представлены зависимости критической скорости  $V_f$  для того же профиля, что и на фиг. 6, при отрывном (кривая 1) и безотрывном (кривая 2) обтекании. Из графика видно, что при наличии отрыва потока  $V_f$  может увеличиваться в несколько раз. Для объяснения этого явления можно воспользоваться выражением для критической скорости флаттера при малых отношениях частот изгибных и крутильных колебаний  $\omega_y/\omega_\alpha$  [6]:

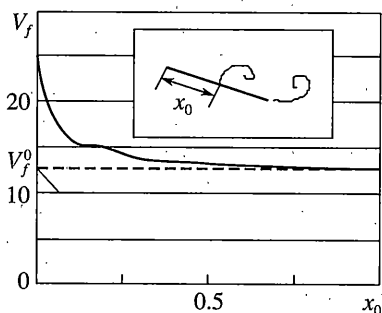
$$V_f = \sqrt{\frac{2K_\alpha}{\rho b^2 c_{ya}^a (x_c - x_p)}}$$



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

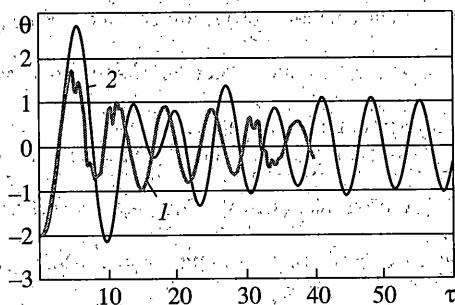
где  $x_c$  – координата центра тяжести,  $x_p$  – центра давления профиля относительно его носка. В силу того, что при отрывном обтекании центр давления смещается вниз по потоку [2] ( $x_p$  увеличивается), то при неизменном  $x_c$  критическая скорость флаттера растет, и можно ожидать, что при определенном его значении (большем, чем при безотрывном обтекании) флаттер вообще не будет наблюдаться.

Проводились также исследования влияния места отрыва  $x_0$  потока на критическую скорость. На фиг. 8 показано, как изменяется величина  $V_f$  при движении точки срыва по хорде профиля. Видно, что при этом критическая скорость монотонно изменяется от своего значения при отрывном обтекании до значения при обтекании безотрывном  $V_f^0$ .

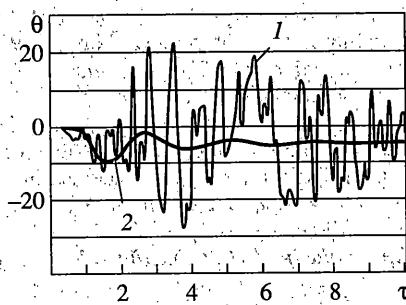
Можно также заметить, что существенное влияние на критическую скорость отрыв оказывает, пока он расположен не далее, чем в 25% хорды от носка профиля. В ином случае превышение над критической скоростью флаттера при безотрывном обтекании составляет не более 5%.

Итак, анализ простой двумерной модели позволил выявить ряд качественных эффектов, отработать основные приемы сопряжения аэродинамической и упругой частей задачи. С учетом полученных результатов по аналогичным методикам были проведены некоторые исследования для упругого крыла конечного размаха при отрывном и безотрывном обтекании.

Рассматривалось поведение в нестационарном потоке газа тонких балочных крыльев (фиг. 1, а, б). Возмущенное движение крыла описывается уравнением (3.2), для расчета обобщенных аэродинамических сил используется метод дискретных вихрей с замкнутыми рамками [5].



Фиг. 9



Фиг. 10

Достоверность расчета на флаттер, который, как и для профиля, проводится прямым моделированием колебаний, оценивалась двумя способами. В аэродинамической трубе Т-1 ВВИА им. Н.Е. Жуковского был проведен эксперимент с вышеупомянутым крылом и зафиксирована скорость потока, при которой наблюдались незатухающие колебания крыла. Далее, с помощью математической модели аэроупругости, в которой использована линейная аэродинамическая теория, традиционным способом [1] был проведен расчет критической скорости флаттера того же крыла. Результаты, полученные по линейной ( $V_f = 25$  м/с) и нелинейной моделям ( $V_f = 24$  м/с), с экспериментом ( $V_f = 23$  м/с) согласуются удовлетворительно.

При исследовании задач динамической аэроупругости главное внимание уделялось влиянию отрывов потока, которые, как было обнаружено при изучении плоских профилей, могут существенно изменять характеристики аэроупругой устойчивости элементов ЛА. Выяснено, что наличие отрыва потока с передней кромки по-разному влияет на крылья различных типов.

Для крыла ЯК-40 расчет показывает обнаруженный для профиля эффект повышения скорости флаттера при наличии отрыва. Как видно из фиг. 9, при отрывном обтекании (кривая 1) колебания крыла становятся затухающими в отличие от безотрывного обтекания (кривая 2) при  $V_\infty = V_f = 24$  м/с, что показывает возможность разработки аэродинамических способов борьбы с флаттером. В то же время, в иных случаях наличие отрыва может вызывать и нежелательные эффекты, как, например, у стреловидного крыла самолета типа Ту-22М3 при наличии отрыва (кривая 1) наблюдаются нерегулярные колебания типа бафтинга (фиг. 10), которых нет при безотрывном обтекании (кривая 2).

Разработанные в данном исследовании модели и результаты, полученные как для профилей, так и для крыльев конечного размаха, могут быть применены в исследованиях по разработке способов борьбы с флаттером и другими нежелательными колебаниями. Как показывает практика, сейчас для подавления колебаний все чаще применяются сложные и дорогие активные системы управления, и аэродинамические, более дешевые способы представляют собой их вероятную альтернативу. Следует отметить, правда, что механический перенос методов линейной аэроупругости на новые задачи оказывается неосуществимым, и каждый новый результат получается после достаточно больших исследований по разработке и отладке вихревой схемы и алгоритма численного интегрирования уравнений возмущенного движения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов В.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Математическое моделирование сложных аэроупругих систем. М.: Физматлит, 1995. 735 с.

2. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.
3. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
4. Ферлинг Г. Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984. 599 с.
5. Апарин В.А., Дворак А.В. Метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками // Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. 1986. Сб. 1313. С. 424–432.
6. Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмэн Р.Л. Аэроупругость. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 799 с.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Физматгиз, 1962. 608 с.

Москва

Поступила в редакцию  
17.10.2002