МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2003

УДК 539.3:534.1

© 2003 г. А.Г. БАГДОЕВ, А.А. ВАНЦЯН, Ю.С. САФАРЯН

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНАХ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ОСРЕДНЕННОЙ ЗАДАЧИ

Изучается теоретически и экспериментально дисперсионное уравнение колебаний магнитоупругой пластины в поперечном и продольном магнитном поле.

Рассматривается пространственный подход к получению дисперсионного уравнения, а также осредненный поход по классической теории изгиба. Показано, что в случае поперечного поля имеется количественное и качественное отличие пространственного и осредненного подхода. Дается сравнение с экспериментом, который подтверждает правильность пространственного подхода.

1. Введение. Линейные задачи о магнитоупругих изгибных колебаниях в пластине были рассмотрены в [1–3]. Нелинейные волны модуляций в продольном поле были исследованы в [4, 5]. Все указанные исследования были основаны на классической осредненной теории тонких пластин.

В настоящей работе рассмотрена пространственная постановка задачи колебаний пластины для поперечного и продольного магнитных полей вначале для большой электропроводности, а далее – для конечной ее величины. Дано сопоставление с результатами, полученными по осредненной теории. Показано, что в случае большой электропроводности в продольном поле обе теории дают одинаковые значения частоты колебания, а в случае поперечного поля результаты обеих теорий различаются как количественно, так и качественно. В пространственной (как и осредненной) постановке продольное поле приводит к увеличению частоты, а в поперечном поле имеет место уменьшение частоты за счет магнитного поля в пространственной постановке, и увеличение частоты – в осредненной постановке. В случае конечной электропроводности обе постановки дают различные результаты как для поперечного, так и для продольного полей.

Проведенные эксперименты для небольших магнитных полей 0.06–0.42 [T] подтверждают результаты пространственной теории. Исследованные в настоящей статье задачи должны представить интерес в устройствах, применяемых в управляемых термоядерных реакциях.

2. Пространственная задача для поперечного магнитного поля. В силу того, что волновая задача для пластин является изотропной, достаточно рассмотреть плоскую задачу. Пусть ось x направлена вдоль средней линии пластины, вдоль которой распространяется волна, ось z – нормальна к ней, невозмущенное магнитное поле $\mathbf{H}_0$ направлено по оси z, u_x, u_z – компоненты смещения по осям x, z; $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ – вектор магнитного поля, причем для индуцированного поля считается $h_x = H_0 H'_x$, $h_z = H_0 H'_z$.

Для квазимонохроматических волн можно полагать

$$u_x = \frac{1}{2}U_x(z)e^{i\tau} + \text{к.с.}, \quad u_z = \frac{1}{2}U_z(z)e^{i\tau} + \text{к.с.}$$
$$\tau = kx - \omega t, \quad H'_x = \frac{1}{2}H_x(z)e^{i\tau} + \text{к.с.}, \quad H'_z = \frac{1}{2}H_z(z)e^{i\tau} + \text{к.с.} \tag{2.1}$$

Уравнения движения магнитоупругой среды в линейной постановке имеют вид [1–3]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}-\frac{1}{4\pi}(\operatorname{rot}\mathbf{h}\times\mathbf{H}_0)_x\\ \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}-\frac{1}{4\pi}(\operatorname{rot}\mathbf{h}\times\mathbf{H}_0)_z\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad \sigma_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\\ \sigma_z &= \lambda\frac{\partial u_x}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.3}$$

где ρ – плотность. Уравнение электромагнитной индукции

$$\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\times\mathbf{H}_0\right)+\nu_m\Delta\mathbf{h},\quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\tag{2.4}$$

Здесь σ – электропроводность, ν_m – магнитная вязкость, c – скорость света. В поперечном магнитном поле уравнения (2.2), (2.4) в переменных (2.1) будут

$$\frac{b^2}{d^2}\frac{d^2U_x}{dz^2}-k^2U_x+\frac{\omega^2}{a^2}U_x+\xi ik\frac{dU_z}{dz} = -\frac{a_1^2}{a^2}\left(\frac{dH_x}{dz}-ikH_z\right)\tag{2.5}$$

$$\xi = 1-\frac{b^2}{a^2},\quad \xi ik\frac{dU_x}{dz}+\frac{d^2U_z}{dz^2}-\frac{b^2}{a^2}k^2U_z+\frac{\omega^2}{a^2}U_z = 0\tag{2.6}$$

$$-i\omega H_z+\nu_m k^2H_z-\nu_m\frac{d^2H_x}{dz^2} = -i\omega\frac{dU_x}{dz}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&-i\omega H_z+\nu_m k^2H_z-\nu_m\frac{d^2H_z}{dz^2} = -\omega kU_x\\ &a_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho},\quad a^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho},\quad b^2 = \frac{\mu}{\rho}\end{aligned}\tag{2.8}$$

В пространственной задаче решение можно искать в виде [2.6]:

$$U_z = A_j\operatorname{ch}(\nu_j z),\quad U_x = B_j\operatorname{sh}(\nu_j z),\quad H_x = C_j\operatorname{ch}(\nu_j z),\quad H_z = D_j\operatorname{sh}(\nu_j z)\tag{2.9}$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Из (2.5) – (2.8) можно получить связь между всеми константами в (2.9) через $B_{1.2.3}$ в форме

$$C_{1.2.3} = \frac{-i\omega\nu_{1.2.3}B_{1.2.3}}{X_{1.2.3}},\quad D_{1.2.3} = -\frac{\omega kB_{1.2.3}}{X_{1.2.3}},\quad X_{1.2.3} = -i\omega+\nu_m k^2-\nu_m\nu_{1.2.3}^2\tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}&\xi ikB_{1.2.3}+\left(\nu_{1.2.3}^2-\frac{b^2}{a^2}k^2+\frac{\omega^2}{a^2}\right)A_{1.2.3} = 0\\ &\left(\frac{b^2}{a^2}\nu_{1.2.3}^2-k^2+\frac{\omega^2}{a^2}\right)B_{1.2.3}+\xi ik\nu_{1.2.3}A_{1.2.3} = \frac{-a_1^2}{a^2}(C_{1.2.3}\nu_{1.2.3}-ikD_{1.2.3})\end{aligned}\tag{2.11}$$

Из (2.10, (2.11) для $\bar{\nu} = \nu_{1.2.3}$ можно получить

$$\frac{b^2}{a^2}\nu^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} + \xi^2 \frac{k^2\nu^2}{\nu^2 - (b^2/a^2)k^2 + (\omega^2/a^2)} = -\frac{a_1^2}{a^2}\frac{\nu^2 - k^2}{1 + i(k^2 - \nu^2)\nu_m/\omega} \tag{2.12}$$

Для конечных значений σ все $\nu = \nu_{1.2.3}$ конечны. Для $\sigma = \infty$ можно получить два конечных значения: $\nu^2 = \nu_{1.2}^2$. И для больших, но конечных σ добавляется третье значение: $\nu^2 = \nu_3^2$, которое для $\omega/(\nu_m k^2) \gg 1$ будет

$$i(\nu_3^2/\omega)\nu_m = (a_1^2/b^2) + 1 \tag{2.13}$$

Для того, чтобы вывести дисперсионное соотношение $\omega(k)$ в пространственной постановке нужно к (2.5) – (2.8) добавить граничные условия на поверхностях пластины $z = \pm h/2$ с диэлектриком: $\sigma_z = \sigma_{xz} = 0$ и условия непрерывности h. Вне пластины в диэлектрике индуцированное магнитное поле записывается в виде

$$\tilde{h}_x = 1/2(C_1^1 e^{\theta} + \text{к,с.}), \quad \tilde{h}_x = 1/2(C_2^1 e^{\theta} + \text{к.с.}), \quad \theta = i\tau \mp kz \tag{2.14}$$

Используя также уравнение $\partial\tilde{h}_x/\partial x + \partial\tilde{h}_z/\partial z = 0$, можно указанные граничные условия записать так

$$\begin{gathered} C_j \operatorname{ch}(\nu_j h/2) = -kC_j\nu_j^{-1}\operatorname{sh}(\nu_j h/2), \quad B_j\nu_j \operatorname{ch}(\nu_j h/2) + ikA_j\operatorname{ch}(\nu_j h/2) = 0 \\ A_j\nu_j\operatorname{sh}(\nu_j h/2) + \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} ikB_j\operatorname{sh}(\nu_j h/2) = 0 \end{gathered} \tag{2.15}$$

где снова проведено суммирование по $j = 1, 2, 3$. В (2.15) необходимо подставить (2.10) – (2.13).

Детерминантное уравнение для (2.15) будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1 + (k/\nu)\operatorname{th}(\nu_1 h/2)}{\chi_1} & \dfrac{1 + (k/\nu_2)\operatorname{th}(\nu_2 h/2)}{\chi_2} & \dfrac{1 + (k/\nu_3)\operatorname{th}(\nu_3 h/2)}{\chi_3} \\ 1 + k^2\xi/\Delta_1 & 1 + k^2\xi/\Delta_2 & 1 + k^2\xi/\Delta_3 \\ \dfrac{\operatorname{th}(\nu_1 h/2)}{\nu_1}\Gamma_1 & \dfrac{\operatorname{th}(\nu_2 h/2)}{\nu_2}\Gamma_2 & \dfrac{\operatorname{th}(\nu_3 h/2)}{\nu_3}\Gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.16}$$

$$\Delta_j = \nu_j^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}, \quad \chi_j = 1 + i\frac{k^2 - \nu_j^2}{\omega}\nu_m, \quad \Gamma_j = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} - \frac{\xi\nu_j^2}{\Delta_j} \tag{2.17}$$

В (2.16) нужно подставить ν_j из (2.12), (2.13). Для конечных $\omega/(\nu_m k^2)$ получается сложная система, которая может аналитически решена для малых a_1/b.

Уравнение (2.12) является уравнением третьего порядка для ν^2, решение которого в общем случае произвольных σ и a_1 невозможна. Уже отсюда следует, что простые соотношения осредненной теории [1–3] не подтверждаются в пространственном подходе.

В случае больших $\omega/\nu_m k^2$ из (2.13), (2.17) получим $\chi_3 = -a_1^2/b_1^2$.

Представляет интерес для изгибных волн [2, 6] получить дисперсионное уравнение с учетом малых порядка $\nu_{1.2}^2 h^2$. Чтобы получить аналитическое решение, нужно предположить малость a_1^2/b^2, но полученные при этом значения $\nu_{1.2}^2$ все еще сложны. Поэтому предположим, что $a_1^2/\omega^2 \ll 1$ (как показано далее, это несущественное ограничение). Тогда из (2.12) следует

$$\nu_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{a^2} + \frac{a_1^2 k^2}{a^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2\theta}\right) - \frac{a_1^4 k^4}{a^2\omega^2\xi}$$
$$\nu_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{b^2} - \frac{a_1^2}{b^2}k^2\left(1 + \frac{\omega^2}{b^2\theta}\right) + \frac{a_1^2\omega^2}{b^4} + \frac{a_1^4 k^4}{a^2\omega^2\xi}, \quad \theta = \frac{i\omega}{\nu_m} \tag{2.18}$$

В случае конечных θ можно записать

$$\nu_3 = k^2 - \theta, \quad 1 - \frac{k^2 - \nu_3^2}{\theta} = -\frac{a_1^2}{b^2}R, \quad R = -\frac{\xi k^2 - \theta}{\theta}$$

Тогда из уравнения (2.16) следует

$$-\frac{1}{Ra_1^2}b^2\left(\frac{\operatorname{th}(\nu_1 h/2)}{\operatorname{th}(\nu_2 h/2)} - N\frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{1 + k^2\xi/\Delta_1}{1 + k^2\xi/\Delta_2}\right) +$$
$$+ (1 + k^2\xi/\Delta_3)\left(\frac{1}{\chi_1}\frac{\nu_1}{\nu_2}N\frac{1}{1 + k^2\xi/\Delta_2} - \frac{1}{\chi_2}\frac{\operatorname{th}(\nu_1 h/2)}{\operatorname{th}(\nu_2 h/2)}\right)\frac{1}{1 + k^2\xi/\Delta_2} - \tag{2.19}$$
$$-\frac{\operatorname{th}(\nu_1 h/2)\Gamma_3}{\nu_3}\frac{\nu_1}{\Gamma_1 \operatorname{th}(\nu_2 h/2)}\left(\frac{1}{\chi_1} - \frac{1}{\chi_2}\frac{1 + k^2\xi/\Delta_1}{1 + k^2\xi/\Delta_2}\right) = 0, \quad N = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$$

В силу малости ω, a_1, можно во втором и третьем слагаемых в (2.19) полагать

$$\nu_1^2 \approx k^2 - \frac{\omega^2}{a^2}, \quad \nu_2^2 \approx k^2 - \frac{\omega^2}{b^2}, \quad \chi_1 = 1 - \frac{\omega^2}{a^2\theta}, \quad \chi_2 = 1 - \frac{\omega^2}{b^2\theta}$$
$$\Gamma_1 = -\frac{2b^2}{a^2}, \quad \Gamma_3 = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} - \frac{\xi(k^2 - \theta)}{k^2\xi - \theta}$$
$$1 + \frac{\xi k^2}{\Delta_3} \approx 1 + \frac{\xi k^2}{\xi k^2 - \theta}, \quad N \approx 1 + \frac{\omega^2}{2b^2k^2}$$

Кроме того можно показать, что

$$N\frac{1 + k^2\xi/\Delta_1}{1 + k^2\xi/\Delta_2} = 1 - \frac{\omega^4}{4b^4k^4} - \frac{\omega^2 a_1^2}{4a^2b^2k^2\xi} - \frac{\omega^2 a_1^2}{4b^4k^2\xi} \tag{2.20}$$

причем слагаемые, содержащие a_1^4/ω^2, ω^2/θ, сокращаются и не дают вклад в (2.20). При этом для $\sigma \gg 1$, $\operatorname{th}(\nu_3 h/2) \approx 1$ уравнения (2.19), (2.20) дают дисперсионное соотношение

$$\omega = \omega_1^0 + i\omega_2^0 \tag{2.21}$$

$$(\omega_1^0)^2 = \frac{h^2}{3}b^2k^4\xi - \frac{2a_1^2k^2b^2}{a^2\xi}$$

$$\omega_2^0 = -\frac{a_1^2k^2}{h\omega_1^0\sqrt{2\omega_1^0/\nu_m}} \tag{2.22}$$

В то же время для конечных σ, $\mathrm{th}(\nu_3 h/2) \approx \nu_3 h/2$ уравнения (2.19), (2.20) дают

$$(\omega_1^0)^2 = \frac{\xi}{3}k^4b^2h^2 - 2a_1^2k^2, \quad \omega_2^0 = -\frac{4a_1^2k^4\xi\nu_m}{(\omega_1^0)^2} \tag{2.23}$$

Таким образом для больших и конечных σ получены дисперсионные соотношения для поперечного магнитного поля.

3. Осредненная задача для поперечного магнитного поля. Для сравнения с осредненной постановкой для произвольных a_1/b можно использовать осредненные уравнения изгиба магнитоупругих пластин в поперечном поле. Для перемещений согласно классической теории имеем

$$u_z = u(x,t), \quad u_x = -z\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u = \frac{1}{2}(Ae^{i\tau} + \text{к.с.}), \quad \tau = kx - \omega t \tag{3.1}$$

Уравнение движения и индукции в осредненной постановке [1–3] имеют вид

$$D\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + \rho h\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = Z$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial h_x}{\partial t} = -H_0\frac{\partial V_z}{\partial x} + \nu_m\left(\frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2}\right)\\ \frac{\partial h_z}{\partial t} = -H_0\frac{\partial V_x}{\partial x} + \nu_m\left(\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2}\right)\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$V_{x,z} = \frac{\partial u_{x,z}}{\partial t}, \quad D = \frac{\mathrm{E}h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad z = \rho\int_{-h/2}^{h/2}\left(K_z + z\frac{\partial K_x}{\partial x}\right)dz$$

$$K_z = 0, \quad K_x = \frac{1}{4\pi\rho}H_0\left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}\right) \tag{3.3}$$

где $K_{x,z}$ – компоненты силы Лоренца, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Сращивая решения уравнений (3.2), (3.3) с решением для магнитного поля в диэлектрике $\tilde{h}_x$, $\tilde{h}_z$ можно получить для произвольного σ:

$$Dk^4 - \rho h\omega^2 = -i\frac{H_0^2}{4\rho}k^2\left(\frac{k^2h^3}{12} + 2\frac{\lambda_1^2 - k^2}{\lambda_1^3}\frac{\lambda_1(h/2)\,\mathrm{ch}(\lambda_1 h/2) - \mathrm{sh}(\lambda_1 h/2)}{\mathrm{ch}(\lambda_1 h/2) + (k/\lambda_1)\,\mathrm{sh}(\lambda_1 h/2)}\right)\frac{\omega}{i\omega - k^2\nu_m} \tag{3.4}$$

$$\lambda_1 = (k^2 - i\omega/\nu_m)^{1/2}$$

Уравнение (3.4) совпадает с полученным в [3]. Для больших σ и λ_1 можно из (27) получить

$$(\omega_1^0)^2 = \frac{1}{\rho h}\left(Dk^4 + \frac{H_0^2}{4\pi}k^2 h\right), \quad \omega_2^0 = -\frac{H_0^2 k^2}{4\pi\sqrt{2\nu_m^{-1}}h\rho(\omega_1^0)^{3/2}} \tag{3.5}$$

Второе соотношение (3.5) совпадает со вторым соотношением (2.22), но первое соотношение количественно и качественно отличается от пространственного решения (2.23), приводя к увеличению $(\omega_1^0)^2$ за счет H_0, в то время как (2.22) ведет к уменьшению $(\omega_1^0)^2$. Для $\sigma \sim 1$ в (3.4) можно считать $\lambda_1 h \ll 1$, причем $Dk^4 - \rho h\omega^2 = (\rho a_1^2 k^2 h^3 i\omega\nu_m^{-1})/12$, что не совпадает с (2.23).

4. Случай продольного магнитного поля в пространственной и осредненной постановке. Пусть невозмущенное магнитное поле H_0 направлено по оси x, тогда из (2.2) – (2.4) вместо (2.5) – (2.8) получится

$$\begin{gathered}
\frac{b^2}{a^2}\frac{d^2U_x}{dz^2} - k^2U_x + U_x\frac{\omega^2}{a^2} + \xi ik\frac{dU_z}{dz} = 0 \\
\xi ik\frac{dU_x}{dz} + \frac{d^2U_z}{dz^2} - \frac{b^2}{a^2}k^2U_z + \frac{\omega^2}{a^2}U_z = \frac{a_1^2}{a^2}\left(\frac{dH_x}{dz} - ikH_z\right) \\
-i\omega H_x + k^2\nu_m H_x + -\nu_m\frac{d^2H_x}{dz^2} = i\omega\frac{dU_z}{dz} \\
-i\omega H_z + k^2\nu_m H_z - \nu_m\frac{d^2H_z}{dz^2} = \omega k U_z
\end{gathered} \tag{4.1}$$

где U_z, U_x определяются из (2.9), причем

$$H_x = C_j\operatorname{sh}(\nu_j z), \quad H_z = D_j\operatorname{ch}(\nu_j z) \tag{4.2}$$

Вместо (2.10) получится

$$\begin{gathered}
C_{1,2,3} = \frac{i\omega\nu_{1,23,3}}{X}A_{1,2,3}, \quad D_{1,2,3} = \frac{\omega k}{X}A_{1,2,3} \\
\left(\frac{b^2}{a^2}\nu_{1,2,3}^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)B_{1,2,3} + \xi i\nu_{1,2,3}A_{1,2,3} = 0 \\
\xi ik\nu_{1,2,,3}B_{1,2,3} + \left(\nu_{1,2,3}^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)A_{1,2,3} = \frac{a_1^2}{a^2}(\nu_{1,2,3}C_{1,2,3} - ikD_{1,2,3}) \\
\xi ik\nu_{1,2,3}B_{1,2,3} + \left(\nu_{1,2,3}^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)A_{1,2,3} = -\frac{a_1^2}{a^2}\frac{\omega}{X_{1,2,3}}i(\nu_{1,2,3}^2 - k^2)A_{1,2,3}
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Из (4.3) можно вместо (2.12) получить дисперсионное уравнение

$$\nu^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} + \frac{\xi^2\nu^2k^2}{\nu^2b^2/a^2 - k^2 + \omega^2/a^2} = -\frac{a_1^2}{a^2}\frac{\nu^2 - k^2}{1 + i(k^2 - \nu^2)\nu_m/\omega} \tag{4.4}$$

Для больших σ из (4.4) будем иметь

$$1 - i(\nu_3^2/\omega)\nu_m = -a_1^2/a^2 \tag{4.5}$$

Условия $\sigma_z = 0$, $\sigma_{zz} = 0$, $h_x = \tilde{h}_x$, $h_z = \tilde{h}_z$, при $z = \pm h/2$, дают соотношения (по j суммируется от 1 до 3):

$$C_1\left(\operatorname{sh}(\nu_1 h/2) + \frac{k}{\nu_1}\operatorname{ch}(\nu_1 h/2)\right) + C_2\left(\operatorname{sh}(\nu_2 h/2) + \frac{k}{\nu_2}\operatorname{ch}(\nu_2 h/2)\right) +$$

$$+ C_3\left(\operatorname{sh}(\nu_3 h/2) + \frac{k}{\nu_3}\operatorname{ch}(\nu_3 h/2)\right) = 0$$

$$D_{1.2.3} = -\frac{ik}{\nu_{1.2.3}}C_{1.2.3} \tag{4.6}$$

$$B_j\nu_j\operatorname{ch}(\nu_j h/2) + ikA_j\operatorname{ch}(\nu_j h/2) = 0$$

$$A_j\nu_j\operatorname{sh}(\nu_j h/2) + \frac{a^2 - 2b^2}{a^2}ikB_j\operatorname{sh}(\nu_j h/2) = 0$$

В результате получим уравнение, следующее из (4.6), (4.3):

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{k}{\nu_1} + \operatorname{th}(\nu_1 h/2)\right)\frac{\nu_1}{\chi_1'} & \left(\frac{k}{\nu_2} + \operatorname{th}(\nu_2 h/2)\right)\frac{\nu_2}{\chi_2'} & \left(\frac{k}{\nu_3} + \operatorname{th}(\nu_3 h/2)\right)\frac{\nu_3}{\chi_3'} \\ 1 - \dfrac{\xi\nu_1^2}{\frac{b^2}{a^2}\nu_1^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} & 1 - \dfrac{\xi\nu_2^2}{\frac{b^2}{a^2}\nu_2^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} & 1 - \dfrac{\xi\nu_3^2}{\frac{b^2}{a^2}\nu_3^2 - k^2 + \frac{\omega^3}{a^2}} \\ \operatorname{th}(\nu_1 h/2)\Gamma_1'\frac{1}{\nu_1} & \operatorname{th}(\nu_2 h/2)\Gamma_2'\frac{1}{\nu_2} & \operatorname{th}(\nu_3 h/2)\Gamma_3'\frac{1}{\nu_3} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.7}$$

$$\chi_{1,2,3}' = 1 + \frac{i(k^2 - \nu_{1.2.3}^2)}{\omega}\nu_m, \quad \Gamma_{1,2,3}' = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2}\frac{\xi\nu_{1,2,3}^2 k^2}{b^2/a^2\nu_{1,2,3}^2 - k^2(\omega^2/a^2)} + \nu_{1,2,3}^2$$

Решение (4.4) для конечных σ имеет вид

$$\nu_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{b^2} - \frac{a_1^2}{a^2}k^2 + \frac{\omega^2 a_1^2}{a^4} - \frac{b^2 a_1^4 k^4}{\xi\omega^2 a^4} - \frac{a_1^2\omega^2 k^2}{a^4\theta} \tag{4.8}$$

$$\nu_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{b^2} + \frac{a_1^2}{b^2}k^2 + \frac{a_1^4 k^4}{b^2\xi^2\omega^2} - \frac{a_1^4 k^4}{b^2\omega^2} + \frac{a_1^2\omega^2 k^2}{b^4\theta}$$

$$\chi_3' = -\frac{\xi k^2 + \theta(b^2/a^2)a_1^2}{\theta(b^2/a^2)}\frac{}{a^2}, \quad \theta = i\frac{\omega}{\nu_m} \tag{4.9}$$

Для больших σ получим $\chi_3^1 = -a_1^2/a^2$, $\Gamma_3 = \nu_3^2$ и уравнение (4.7) запишется в виде

$$\frac{\operatorname{th}(\nu_1 h/2)}{\operatorname{th}(\nu_2 h/2)} - \frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{1 - \xi\nu_1^2/\Delta_1'}{1 - \xi\nu_2^2/\Delta_2'}N' - \frac{a_1^2}{a^2}\frac{2k}{h(1 + k/\nu_3)}\frac{\nu_1}{\nu_2}\frac{1}{1 - \xi\nu_2^2/\Delta_2'}\frac{\xi\nu_2^2/\Delta_2' - \xi\nu_1^2/\Delta_1'}{\Gamma_1'} = 0 \tag{4.10}$$

$$N' = \frac{\Gamma_2'}{\Gamma_1'}, \quad \Delta_{1,2}' = \frac{b^2}{a^2}\nu_{1,2}^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}$$

где ν_3 определяется из (4.5). Как и прежде можно показать, что слагаемые с a_1^4/ω^2 не дают вклада в дисперсионное уравнение (4.10) и для больших σ получим

$$(\omega_1^0)^2 = \frac{h^2 b^2}{3} k^4 \xi + \frac{2a_1^2 k}{h} \tag{4.11}$$

$$\omega_2^0 = -\frac{k^2 a_1^2}{h(\omega_1^0)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\nu_m^{-1}}} \tag{4.12}$$

В осредненной постановке в продольном магнитном поле уравнение индукции имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_x}{\partial t} &= -H_0 \frac{\partial V_z}{\partial z} + \nu_m \left(\frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial h_z}{\partial t} &= H_0 \frac{\partial V_z}{\partial x} + \nu_m \left(\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \tag{4.13}$$

Решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} h_x &= \frac{1}{2} C z e^{i\tau} + \frac{1}{2} C_1 \operatorname{sh}(\lambda_1 z) e^{i\tau} + \text{к.с}, \quad \lambda_1 = \sqrt{k^2 - i\omega\nu_m^{-1}} \\ h_z &= \frac{1}{2} G z e^{i\tau} + \frac{1}{2} G_1 \operatorname{ch}(\lambda_1 z) e^{i\tau} + \text{к.с} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Выражая C и G через A с использованием (3.1), (4.13), получим

$$C = 0, \quad G = \frac{H_0 k A \omega}{-i\omega + \nu_m k^2} \tag{4.15}$$

В первом уравнении (3.2) и (3.3) будем иметь

$$K_x = 0, \quad K_z = \frac{H_0}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial h_z}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial z} \right) \tag{4.16}$$

Магнитное поле в диэлектрике ищется в виде (2.14). Используя уравнение $\partial \tilde{h}_x/\partial x + \partial \tilde{h}_z/\partial z = 0$ и условие непрерывности h_x, h_z при $z = \pm h/2$ получим

$$C_1 = -\frac{iG}{\operatorname{sh}(\lambda_1 h/2) + (k/\lambda_1)\operatorname{ch}(\lambda h/2)}, \quad G_1 = -\frac{ik}{\lambda_1} C_1 \tag{4.17}$$

Подставляя (4.14) – (4.17) в уравнение (3.2), (3.3), (4.13), получим дисперсионное соотношение

$$Dk^4 - \rho h \omega^2 = -\frac{\rho a_1^2 \omega k}{\omega + ik^2 \nu_m} \left(kh - 2 \frac{k^2 - \lambda_1^2}{\operatorname{sh}(\lambda_1 h/2) + (k/\lambda_1)\operatorname{ch}(\lambda_1 h/2)} \frac{\operatorname{sh}(\lambda_1 h/2)}{\lambda_1^2} \right) \tag{4.18}$$

Для случая $\lambda_1 h \gg 1$ из (4.18) получим в осредненной постановке значения ω_1^0, ω_2^0, совпадающие с пространственной постановкой (4.11), (4.12).

Таким образом, в случае больших σ, в отличие от случая поперечного поля, в продольном поле дисперсионные соотношения для пространственной и осредненной постановок совпадают. Для ограниченных σ и $\lambda_1 h \ll 1$ из (4.18) в осредненной постановке получим соотношение

$$Dk^4 - \rho h\omega^2 = \rho\frac{a_1^2\omega k \nu_m^{-1} i2h}{2k - i\omega\nu_m^{-1}h} \tag{4.19}$$

Откуда следует

$$(\omega_1^0)^2 = \frac{Dk^4}{\rho h} + (\omega_1^0\nu_m^{-1})^2 h a_1^2\frac{2k}{4k^2 + \omega^2\nu_m^{-2}h^2}, \quad \omega_2^0 = -\frac{1}{2}a_1^2\nu_m^{-1} \tag{4.20}$$

В пространственной задаче для конечных σ и θ из (4.7), (4.8) можно получить (4.21)

$$(\omega_1^0)^2 = \frac{h^2b^2k^4}{3}\xi + a_1^2k^2\left(1 + \frac{2b^4}{a^2\xi} + \frac{2b^2}{a^2}\right), \quad \omega_2^0 = -\frac{a_1^2}{2}\nu_m^{-1} \tag{4.22}$$

где упругая часть $\frac{1}{3}h^2b^2k^4\xi = Dk^4/\rho h$. Таким образом, в отличие от случая больших σ, для конечных σ и для продольного поля значения ω_1^0 в пространственном и осредненном подходе не совпадают.

5. Экспериментальные исследования колебаний пластин в поперечном и продольном поле и сравнение с результатами теории. Исследования влияния постоянного магнитного поля (МП) на частоты собственных колебаний пластины проводятся по обычной схеме. Пластина жестко закреплена на левом конце держателем и свободна на правом конце, и находится в продольном МП, направленном по оси x, или в поперечном МП, направленном по оси z. Продольное МП $H_{0x} = H_0$ образовано соленоидом, чья ось направлена по оси x. Чтобы изучить влияние поперечного МП ($H_{0z} = H_0$), пластина размещена между полюсами упругого магнита. В отличие от случая продольного поля, которое задано по всей поверхности пластины, поперечное поле задается внутри некоторой области. Для определения собственных колебаний пластины на малом расстоянии от жестко заделанного конца силой $P_1 = P_0\sin\omega t$ производится гладко регулируемое по частоте и амплитуде вибратора колебание. Посредством пьезодатчика, который закреплен на пластине, от вибрирующей пластины, сигналы подаются на вход осциллографа С8–17.

В момент резкого увеличения амплитуды вибраций пластины, который соответствует резонансу, фиксируется частота колебания. Затем подается МП (H_{0x} или H_{0z}) для которого получатся новые резонансные частоты. Было отмечено увеличение частоты для продольного поля и уменьшение частоты для поперечного поля. Сравним теоретические и экспериментальные данные. Рассмотрим латунь, для которой [2] $b = 1.7 \cdot 10^5$ см/сек, $l = 34$ см, а ω_{00} находится по формуле

$$\omega_{00} = k_i\frac{2h}{\sqrt{3}}b\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{1 + 4M/(\rho l^2 h)}}$$

где V есть масса вибратора, l – длина пластины, k_i – волновые числа при консольном опирании пластины, в условиях в которых проводился эксперимент, причем для первых трех гармоник имеет место $k_1 = 2/l$; $k_2 = 5/l$, $k_3 = 8/l$. Пусть $h = 0.5$ см, $M = 2$ кг, тогда получим для $k = k_2$ $\omega_{00} = 550$ гц. Эксперимент дает $\omega_{00} = 590$ гц. При наличии продольного магнитного поля $H_{0x} = 0.06$ тесла из эксперимента следует $\omega_{00} = 600$ гц, т.е. 1.3% добавка за счет поля. В то же время на основании теории получим по формуле $\omega_H^2 = \omega_{00} + 2a_1^2 k_2/h$, $\omega_H = 550$ гц + 2 гц или 0.4% ошибки, т.е. имеется качественное согласие с опытом. Для алюминия $b = 3 \cdot 10^5$ см/сек, $l = 34$ см, и для второй гармоники $\omega_{00} = 640$ гц. Эксперимент дает $\omega_{00} = 570$ гц и в поле $H_{0x} = 0.05$ тесла, $\omega_H = 584$ гц или 2% ошибки. Указанная теория дает $\omega_H = 640$ гц + 3 гц или 0.5%. В то же время осредненная теория дает для $\sigma \gg 1$ те же значения, а для $\sigma \sim 1$ значения ω_H далекие опыта. В поперечном поле $H_{0z} = 0.42$ тесла для латуни согласно формуле $\omega_H^2 = \omega_{00}^2 - a_1^2 k_2^2$ и поскольку $\omega_{00} = 570$ гц, получим $\omega_H = 570$ гц – 15 гц или 2.5% поправки. Эксперимент дает $\omega_{00} = 620$ гц, $\omega_H = 600$ гц или 3% поправки. Для алюминия $\omega_{00} = 600$ гц и теория дает $\omega_H = 600$ гц – 30 гц или 5% поправки. Таким образом при пространственном подходе поле уменьшает ω_H, что согласуется с экспериментом, как количественно, так и качественно. В то же время осредненная теория дает увеличение ω_H по сравнению с ω_{00}, что не согласуется с опытом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 272 с.
2. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е.* Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматлит, 1996. 285 с.
3. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.* Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ереван: Изд-е НАН Армении, 1992. 124 с.
4. *Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.* Нелинейные колебания пластин в продольном магнитном поле // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1982. Т. 35. № 1. 16–22 с.
5. *Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.* Модуляция термомагнитоупругих волн в нелинейной пластине // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. № 1. С. 25–29.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. *Bagdoev A.G., Sahakyan S.G.* The stability of non-linear modulation waves in plate in magnetic field for space averaged problems // Information technologies and management. 1999. № 2. 95–101 p.
8. *Bagdoev A.G., Vantsyan A.A.* Theoretical and experimental investigations of waves in plate in magnetic field for space and averaged problems // Int. J. of solids and structures. 2002. V. 39. P. 251–259.

Горис

Поступила в редакцию
25.09.2001