МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2003

УДК 539.3:534.1

 А.М. АХТЯМОВ

ДИАГНОСТИРОВАНИЕ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕЕ КОЛЕБАНИЙ

Обоснована возможность однозначного распознания закрепления на внутреннем и внешнем контурах кольцевой пластины по собственным частотам ее осесимметрических колебаний. Доказана единственность решения соответствующей обратной задачи и найден метод диагностирования краевых условий по конечному набору первых собственных частот. Рассмотрены примеры диагностирования закрепления пластины как на внешнем, так и на внутреннем контурах по трем собственным частотам.

1. Введение. Кольцевые пластины являются деталями многих механизмов и конструкций. Поиску собственных частот кольцевых пластин было посвящено много работ (см., например, [1, 2]).

Если пластины недоступны для непосредственного осмотра или же доступ к ним является дорогостоящим, требующим разборки всей конструкции, то единственным источником установления их надежного закрепления является звучание колебаний пластины. Возникает задача определения закрепления пластины по ее звучанию или же с помощью специальных приборов, определяющих первые собственные частоты.

Рассматриваемая задача отыскания краевых условий относится к акустической диагностике и обратным задачам механики твердого тела [3–5], однако она была сформулирована для задач о колебаниях сравнительно недавно [6–10].

В [10] было показано, что если на одном из концов стержня реализуется жесткое закрепление, то закрепление на другом конце стержня можно однозначно установить по собственным частотам его колебаний. Там же был предложен метод определения двух краевых условий. В настоящей работе этот метод развит для случая пластины, а также предложен новый метод установления четырех краевых условий.

2. Постановка обратной задачи. Задача об осесимметрических колебаниях тонкой кольцевой пластины сводится [11] к следующей спектральной задаче:

$$\frac{d^4y}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3y}{dr^3}-\frac{1}{r^3}\frac{d^2y}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dy}{dr}-\lambda^4y = 0, \quad \lambda = \left(\frac{\rho h\omega^2}{D}\right)^{1/4} \tag{2.1}$$

$$U_i(y) = \sum_{j=1}^4 a_{ij}L_jy = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{2.2}$$

$$U_i(y) = \sum_{j=1}^4 b_{ij}L_{4+j}y = 0 \quad (i = 3, 4) \tag{2.3}$$

$$L_1y = y(a), \quad L_2y = \left[\frac{dy(r)}{dr}\right]_{r=a}$$

$$L_3y = \left[\frac{d^2y(r)}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dy(r)}{dr}\right]_{r=a}, \quad L_4y = \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2y(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dy(r)}{dr}\right)\right]_{r=a}$$

$$L_5y = y(1), \quad L_6y = \left[\frac{dy(r)}{dr}\right]_{r=1}$$

$$L_7y = \left[\frac{d^2y(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dy(r)}{dr}\right]_{r=1}$$

$$L_8y = \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2y(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dy(r)}{dr}\right)\right]_{r=1}$$

Здесь $y(r)$ – функция прогиба пластины; L_{jy} – линейные формы, характеризующие закрепление пластины на внутреннем и внешнем контурах; a – отношение внутреннего радиуса пластины к внешнему ($0 < a < 1$); ω – частотный параметр; D – цилиндрическая жесткость пластины; ν – отношение Пуассона; h – толщина; ρ – плотность.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} форм $U_1(y)$ и $U_2(y)$, через A, а матрицу, составленную из коэффициентов b_{ij} форм $U_3(y)$ и $U_4(y)$, через B:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{Vmatrix}$$

Миноры второго порядка матриц A и B будем для краткости обозначать через A_{ij} и B_{ij}:

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}, \quad B_{ij} = \begin{vmatrix} b_{1i} & b_{1j} \\ b_{2i} & b_{2j} \end{vmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

В работах [12, 13] приведены различные случаи закрепления кольцевой пластины. Ниже они перечислены для закрепления пластины на внутреннем контуре. Выписаны также их соответствующие матрицы A:

заделка

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

свободное опирание

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

свободный край

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

плавающая заделка

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

пять различных видов упругого закрепления

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} c_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Заметим, что во всех девяти случаях $A_{14} = 0$, $A_{23} = 0$. Случаи закрепления кольцевой пластины на внешнем контуре и соответствующие матрицы такие же, как и на внутреннем контуре. Единственное различие состоит в том, что знаки перед коэффициентами c_1 и c_2 в матрицах A и B имеют противоположные знаки.

Таким образом, имеем 9 видов краевых условий на внутреннем контуре и 9 на внешнем. Количество их возможных комбинаций $9^2 = 81$.

Поэтому обратная задача состоит в том, чтобы правильно распознать одну из 81 комбинаций краевых условий и в случае упругого закрепления найти соответствующий коэффициент c_1 или c_2.

Заметим, что речь не может идти о единственности восстановления всех коэффициентов a_{ij} и b_{ij}, поскольку, например, краевые условия $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$ и $y(1) - y'(1) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$ эквивалентны, а их соответствующие коэффициенты b_{ij} различны.

Поэтому задачей публикуемой статьи не является точное распознавание всех коэффициентов a_{ij} и b_{ij}. Цель – отыскание краевых условий, что равносильно нахождению линейных оболочек $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ и $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, построенных на векторах

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})^T, \quad \mathbf{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4})^T \quad (i = 1, 2)$$

Таким образом, в терминах спектральной задачи (2.1)–(2.3) поставленная обратная задача формулируется следующим образом: коэффициенты a_{ij} и b_{ij} форм $U_1(y)$, $U_2(y)$, $U_3(y)$, $U_4(y)$ задачи (2.1)–(2.3) неизвестны; ранги матриц A и B, составленных из этих коэффициентов, равны двум; миноры A_{14}, A_{23}, B_{14}, B_{23} этих матриц равны нулю; известны отличные от нуля собственные значения λ_k задачи (2.1)–(2.3). Требуется восстановить линейные оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$, $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, построенные на векторах

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})^T, \quad \mathbf{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4})^T \quad (i = 1, 2)$$

Наряду с этой постановкой задачи могут быть рассмотрены также частные случаи задачи – неполные обратные задачи установления краевых условий лишь на одном из контуров, когда закрепление на другом контуре известно.

3. Единственность решения обратной задачи. В дальнейшем для упрощения вычислений необходимы новые обозначения.

Обозначим через C следующую матрицу порядка 4×8, составленную из нулевых матриц 0, а также матриц A и B:

$$C = \left\| \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & B \end{matrix} \right\|$$

Элементы матрицы C обозначим через c_{ij}, а миноры матрицы C, как и в работе [14], – через

$$C\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1k_1} & c_{1k_2} & c_{1k_3} & c_{1k_4} \\ c_{2k_1} & c_{2k_2} & c_{2k_3} & c_{2k_4} \\ c_{3k_1} & c_{3k_2} & c_{3k_3} & c_{3k_4} \\ c_{4k_1} & c_{4k_2} & c_{4k_3} & c_{4k_4} \end{vmatrix}$$

Краевые условия (2.2)–(2.3) в новых обозначениях могут быть переписаны в виде

$$U_i(y) = \sum_{j=1}^{8} c_{ij} L_j y \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3.1}$$

В новых обозначениях обратная задача формулируется следующим образом: коэффициенты c_{ij} задачи (2.1), (3.1) – неизвестны; ранг матрицы C, составленной из этих коэффициентов, равен четырем; миноры A_{14}, A_{23}, B_{14}, B_{23} матриц A и B, из которых составлена матрица C, равны нулю; известны отличные от нуля собственные значения λ_k задачи (2.1), (3.1). Требуется восстановить линейную оболочку $\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4 \rangle$, построенную на векторах

$$\mathbf{c}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, 0, 0, 0, 0)^T \quad (i = 1, 2)$$

$$\mathbf{c}_j = (0, 0, 0, 0, b_{j1}, b_{j2}, b_{j3}, b_{j4})^T \quad (j = 3, 4)$$

Покажем единственность решения этой обратной задачи.

Наряду с формами (3.1) рассмотрим следующие линейные однородные формы:

$$\tilde{U}_i(y) = \sum_{j=1}^{8} \tilde{c}_{ij} L_j y \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3.2}$$

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов $\tilde{c}_{ij}$, через $\tilde{C}$, а ее миноры – через

$$\tilde{C}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{pmatrix}$$

Теорема о единственности решения обратной задачи. Пусть выполнены следующие условия:

$$\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} \tilde{C} = 4 \tag{3.3}$$

$$A_{14} = \tilde{A}_{14} = A_{23} = \tilde{A}_{23} = B_{14} = \tilde{B}_{14} = B_{23} = \tilde{B}_{23} = 0 \tag{3.4}$$

Если отличные от нуля собственные значения $\{\lambda_k\}$ задачи (2.1), (3.1) и отличные от нуля собственные значения $\{\lambda_k\}$ задачи (2.1), (3.2) совпадают с учетом их кратностей, то совпадают и линейные оболочки $\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4 \rangle$ и $\langle \tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \tilde{\mathbf{c}}_3, \tilde{\mathbf{c}}_4 \rangle$.

Доказательство. Общим решением задачи (2.1) является (см. [12]) функция

$$y(r) = y(r, \lambda) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4$$

$$y_1 = J_0(\lambda r), \quad y_2 = I_0(\lambda r), \quad y_3 = Y_0(\lambda r), \quad y_4 = K_0(\lambda r)$$

где использованы стандартные обозначения для цилиндрических функций.

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4 используют краевые условия $U_i(y) = 0$ ($i = 1$–4). Уравнение частот получают из условия существования ненулевого решения для C_i. Ненулевое решение для C_i существует тогда и только тогда, когда равен нулю определитель [15]:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix}$$

Заметим, что

$$\Delta(\lambda) = \det(CD)$$

$$D = \begin{Vmatrix} L_1y_1 & L_1y_2 & L_1y_3 & L_14_1 \\ L_2y_1 & L_2y_2 & L_2y_3 & L_2y_4 \\ L_3y_1 & L_3y_2 & L_3y_3 & L_3y_4 \\ L_4y_1 & L_4y_2 & L_4y_3 & L_4y_4 \\ L_5y_1 & L_5y_2 & L_5y_3 & L_5y_4 \\ L_6y_1 & L_6y_2 & L_6y_3 & L_6y_4 \\ L_7y_1 & L_7y_2 & L_7y_3 & L_7y_4 \\ L_8y_1 & L_8y_2 & L_8y_3 & L_8y_4 \end{Vmatrix}$$

Используя формулу Бине–Коши, получаем

$$\Delta(\lambda) = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_8 \le 8} C\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Поскольку

$$C\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (k_3, k_4 \le 4, k_1, k_2 \ge 5)$$

$$C\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & 0 & 0 \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{1k_3-4} & b_{1k_4-4} \\ 0 & 0 & b_{2k_3-4} & b_{2k_4-4} \end{vmatrix}$$

$$(1 \le k_1 < k_2 \le 4, 5 \le k_3 < k_4 \le 8)$$

то применяя теорему Лапласа для вычисления определителей получаем:

$$\Delta(\lambda) = \sum_{\substack{1 \le k_1 < k_2 \le 4 \\ 5 \le k_3 < k_4 \le 8}} A_{k_1, k_2} B_{k_3-4, k_4-4} D\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Из свойств общей теории линейных дифференциальных операторов следует, что $\Delta(\lambda)$ является целой функцией (см. [15]). Из асимптотических оценок для цилиндрических функций (см. [16, 17]):

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z - \nu\pi/2 - \pi/4), \quad I_\nu(z) \sim e^z/\sqrt{2\pi z}$$

$$Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z - \nu\pi/2 - \pi/4), \quad K_\nu(z) \sim e^{-z}/\sqrt{2\pi z}$$

следует, что функция $\Delta(\lambda)$ является целой функцией класса C (см. [18]).

Отличные от нуля собственные значения задачи (2.1), (3.1) являются корнями функции $\Delta(\lambda)$ (см. [15]).

Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ помимо корней, совпадающих с отличными от нуля собственными значениями задачи, может иметь также корень $\lambda = 0$ конечной кратности.

Отсюда следует, что характеристические определители $\Delta(\lambda)$ и $\tilde{\Delta}(\lambda)$ задач (2.1), (3.1) и (2.1), (3.2) соответственно связаны соотношением

$$\Delta(\lambda) \equiv K\lambda^k \tilde{\Delta}(\lambda) \tag{3.6}$$

где k – некоторое целое неотрицательное число, а K – некоторая отличная от нуля константа.

Из (3.5) и (3.6) следует, что

$$\sum_{\substack{1 \le k_1 < k_2 \le 4 \\ 5 \le k_3 < k_4 \le 8}} (A_{k_1,k_2} \cdot B_{k_3-4,k_4-4} - K\lambda^k \tilde{A}_{k_1,k_2} \tilde{B}_{k_3-4,k_4-4}) f_{k_1k_2k_3k_4}(\lambda) \equiv 0$$

$$f_{k_1k_2k_3k_4}(\lambda) := D\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{14} = A_{23} = B_{14} = B_{23} = \tilde{A}_{14} = \tilde{A}_{23} = \tilde{B}_{14} = \tilde{B}_{23} = 0$$

Все шестнадцать функций $f_{1212}(\lambda)$, $f_{1213}(\lambda)$, $f_{1224}(\lambda)$, $f_{1234}(\lambda)$, $f_{1312}(\lambda)$, $f_{1313}(\lambda)$, $f_{1324}(\lambda)$, $f_{1334}(\lambda)$, $f_{2412}(\lambda)$, $f_{2413}(\lambda)$, $f_{2424}(\lambda)$, $f_{2434}(\lambda)$, $f_{3412}(\lambda)$, $f_{3413}(\lambda)$, $f_{3424}(\lambda)$, $f_{3434}(\lambda)$ из последнего равенства образуют линейно независимую систему. Причем, умножение любой из функций на λ^k не влияет на линейную независимость соответствующих функций (это проверено автором с помощью разложения в ряд в пакете Maple). Поэтому

$$A_{k_1,k_2} B_{k_3-4,k_4-4} = K\tilde{A}_{k_1,k_2} \tilde{B}_{k_3-4,k_4-4} \tag{3.7}$$

Таким образом, все миноры четвертого порядка матрицы C пропорциональны соответствующим минорам четвертого порядка матрицы $\tilde{C}$, что равносильно пропорциональности 4-векторов $\mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{c}_2 \wedge \mathbf{c}_3 \wedge \mathbf{c}_4$ и $\tilde{\mathbf{c}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{c}}_2 \wedge \tilde{\mathbf{c}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{c}}_4$.

Известно [19], что между классами пропорциональных, отличных от нуля 4-векторов и четырехмерными подпространствами векторного пространства имеется естественное биективное соответствие. В этом соответствии каждому подпространству отвечает внешнее произведение $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4$ векторов произвольного его базиса $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$, а каждому 4-вектору $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4$ – подпространство $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \rangle$.

Поэтому из (3.7) следует равенство $\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4 \rangle = \langle \tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \tilde{\mathbf{c}}_3, \tilde{\mathbf{c}}_4 \rangle$. Что и требовалось доказать.

4. Метод распознавания краевых условий. Метод распознания краевых условий по собственным частотам основан на тождестве

$$\Delta(\lambda) \equiv \sum_{\substack{1 \le k_1 < k_2 \le 4 \\ 5 \le k_3 < k_4 \le 8}} A_{k_1,k_2} B_{k_3-4,k_4-4} f_{k_1k_2k_3k_4}(\lambda) \tag{4.1}$$

вытекающем из (3.5). Последовательность следующая.

1. Функция $\Delta(\lambda)$ из левой части этого тождества является целой функцией класса C, поэтому может быть найдена по собственным значениям λ_j по формуле (см. [18]):

$$\Delta(\lambda) = K\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^4}{\lambda_j^4}\right)$$

2. На втором этапе с точностью до константы находятся 4-векторы, составленные из определителей

$$C\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{pmatrix}$$

Векторы могут быть получены двумя способами. Первый метод основан на ортогонолизации Шмидта шестнадцати линейно независимых функций $f_{k_1k_2k_3k_4}(\lambda)$ в пространстве L_2 [20] и последовательном нахождении неизвестных определителей с помощью скалярного умножения обеих частей тождества (4.1) на ортогональные функции. Второй состоит в подстановке в тождество (4.1) первых пятнадцати собственных значений λ_j и решении алгебраической системы 15 линейных уравнений от 16 неизвестных определителей четвертого порядка матрицы C. Согласно доказанной теореме единственности, такая система должна иметь единственное с точностью до константы решение.

3. Третий этап состоит в установлении линейной оболочки $\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4\rangle$ и соответствующих краевых условий по найденным с точностью до константы 4-векторам. Он основан на известных методах восстановления линейной оболочки по внешнему произведению векторов [19].

Помимо полной обратной задачи – распознания краевых условий на обоих контурах кольцевой пластины – тем же методом могут быть решены и неполные обратные задачи – задачи установления закрепления лишь на одном из контуров при известном закреплении на другом. При этом, тождество (4.1) упрощается. В правой части этого тождества будет лишь четыре слагаемых, а не шестнадцать (некоторые из определителей обратятся в нуль). Например, если закрепление на внешнем контуре кольцевой пластины известно и представляет собой заделку ($B_{12} = 1$, остальные $B_{ij} = 0$), а закрепление на внутреннем контуре требуется определить, то тождество (4.1) примет вид $\Delta(\lambda) \equiv A_{12}f_{1212}(\lambda) + A_{13}f_{1312}(\lambda) + A_{24}f_{2412}(\lambda) + A_{34}f_{3412}(\lambda)$.

Для приближенного определения краевых условий на внутреннем контуре достаточно знания лишь трех собственных частот, так как система уравнений

$$\Delta(\lambda_j) = A_{12}f_{1212}(\lambda_j) + A_{13}f_{1312}(\lambda_j) + A_{24}f_{2412}(\lambda_j) + A_{34}f_{3412}(\lambda_j) \quad (j = 1, 2, 3) \tag{4.2}$$

от неизвестных $A_{12}, A_{13}, A_{24}, A_{34}$, согласно доказанной теореме единственности, должна иметь решение, определенное с точностью до константы. Неизвестная линейная оболочка $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle$ может быть найдена по найденным минорам A_{12}, A_{13}, A_{24}, A_{34} согласно методу, предложенному в [10].

Если же внутренний контур свободен от нагрузки ($A_{34} = 1$, остальные $B_{ij} = 0$), а закрепление на внешнем контуре неизвестно, то соответствующая система линейных уравнений (4.1) примет следующий вид:

$$\Delta(\lambda_j) = B_{12}f_{3412}(\lambda_j) + B_{13}f_{3413}(\lambda_j) + B_{24}f_{3424}(\lambda_j) + B_{34}f_{3434}(\lambda_j) \tag{4.3}$$

Для приближенного установления неизвестной линейной оболочки $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\rangle$, характеризующей закрепление пластины на внешнем контуре, снова потребуется лишь три собственных частоты.

5. Примеры. Отметим, что решение полной обратной задачи на конкретном примере довольно громоздко. Поэтому приведем здесь лишь решение неполных обратных задач, когда закрепление на одном из контуров известно. Во всех примерах полагаем, что $\nu = 1/3$, а $a = 1/10$.

Пример 1 (*заделка – заделка*). Пусть внешний контур кольцевой пластинки заделан и известны значения $\lambda_1 = 5.223078558$, $\lambda_2 = 8.681373922$, $\lambda_3 = 12.17430533$, соответствующие первым трем собственным частотам ω_i, определенных частотомером. Требуется определить закрепление кольцевой пластины на внутреннем контуре. Решение системы (4.2) с данными λ_i, найденное Maple с точностью до константы, имеет вид

$$\begin{aligned} A_{12} &= -0.14110798 \cdot 10^{12} A_{34} \quad A_{24} = 6.6336854 A_{34}, \\ A_{13} &= 5.5348967 A_{34}, \quad A_{34} = A_{34} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Приближенно можно считать, что с точностью до константы $A_{12} = 1$, $A_{13} = 0$, $A_{24} = 0$, $A_{34} = 0$ (точность приближения по каждой компоненте равна 10^{-9}). Кроме того, всегда можно считать, что $A_{14} = 0$, $A_{23} = 0$.

Найдем линейную оболочку, соответствующую этим минорам. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ – произвольный вектор искомой линейной оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$. Тогда координаты вектора $\mathbf{x}$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{rank} \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix} = 2 \tag{5.2}$$

Поскольку

$$A_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

то условие (5.2) эквивалентно обращению в нуль обоих окаймляющих A_{12} миноров

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.3}$$

Разлагая соответствующие определители по третьей строке, получаем

$$x_1 A_{23} - x_2 A_{13} + x_3 A_{12} = 0, \quad x_1 A_{24} - x_2 A_{14} + x_4 A_{12} = 0 \tag{5.4}$$

Подставим в эти равенства значения A_{ij}. Как было показано выше, значения A_{12} можно считать равным 1, а значения миноров A_{13}, A_{24} и A_{34} можно считать равными нулю. Кроме того, согласно условию теоремы $A_{14} = 0$, $A_{23} = 0$. Поэтому систему уравнений (5.4) можно переписать следующим образом: $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, а произвольный вектор искомой линейной оболочки имеет вид $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0, 0)^T$.

В качестве базисных векторов этой линейной оболочки можно выбрать, например, векторы $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ и $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, 0)^T$. Следовательно, закрепление на внутреннем контуре соответствует заделке.

Заметим, что закрепление края пластины определено верно. Числа λ_1, λ_2, λ_3, приведенные выше, приближенно совпадают с первыми тремя корнями уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Точность приближения равна 10^{-9}.

Пример 2 (*свободный край – заделка*). Пусть известно, что внешний контур заделан и

$$\lambda_1 = 3.183521171,\ \lambda_2 = 6.275190497,\ \lambda_3 = 9.495330300 \tag{5.5}$$

где λ_i – значения $(\rho h\omega_i^2/D)^{1/4}$, соответствующие первым трем собственным частотам ω_i, определенных частотомером. Требуется найти закрепление кольцевой пластины на внутреннем контуре.

Решение системы (4.2), найденное Maple с точностью до константы, имеет вид

$$\begin{aligned} A_{12} &= -1203.083941A_{24}, & A_{24} &= A_{24}, \\ A_{13} &= -118.4115570A_{24}, & A_{34} &= 0.1759918\cdot 10^9 A_{24} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Найдем линейную оболочку, соответствующую этим минорам. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ – произвольный вектор искомой линейной оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle$. Тогда координаты вектора $\mathbf{x}$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{rank}\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix} = 2 \tag{5.7}$$

Поскольку

$$A_{34} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

то условие (5.7) эквивалентно обращению в нуль обоих окаймляющих A_{34} миноров:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.8}$$

Разлагая соответствующие определители по третьей строке, получаем

$$x_1A_{34} - x_3A_{14} + x_4A_{13} = 0, \quad x_2A_{34} - x_3A_{24} + x_4A_{23} = 0 \tag{5.9}$$

Подставим в эти равенства значения (5.6). Минор A_{34} можно считать равным 1, а значения миноров A_{12}, A_{13} и A_{24} можно считать равными нулю. Кроме того, согласно условию теоремы $A_{14} = 0$, $A_{23} = 0$. Поэтому система уравнений (5.9) перепишется в виде $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, а произвольный вектор искомой линейной оболочки – в виде $\mathbf{x} = (0, 0, x_3, x_4)^T$.

В качестве базисных векторов этой линейной оболочки можно выбрать, например, векторы $\mathbf{a}_1 = (0, 0, 1, 0)^T$ и $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 0, 1)^T$. Следовательно, закрепление на внутреннем контуре соответствует свободному контуру.

Заметим, что закрепление края пластины определено верно. Числа λ_1, λ_2, λ_3, приведены выше, приближенно совпадают с первыми тремя корнями уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Точность приближения равна 10^{-9}.

Пример 3 (*свободный край – заделка*). Пусть известно, что внутренний контур свободен, а закрепление на внешнем контуре неизвестно. Будем предполагать, что известные собственные значения λ_i совпадают с (5.5) – значениями из предыдущего примера.

Если внутренний контур свободен от нагрузки, а закрепление на внешнем контуре неизвестно, то, как было показано выше, соответствующая система линейных уравнений имеет вид (4.3). Ее решением являются миноры

$$B_{12} = -0.1453724665 \cdot 10^{11} \cdot B_{24}, \quad B_{24} = B_{24},$$
$$B_{13} = -1.403711906 \cdot B_{24}, \quad A_{34} = 1.457409899 \cdot B_{24}.$$

Приближенно можно считать, что с точностью до константы $B_{12} = 1$, $B_{13} = 0$, $B_{24} = 0$, $B_{34} = 0$ (точность приближения равна 10^{-9}). Кроме того, всегда можно считать, что $B_{14} = 0$, $B_{23} = 0$. Линейная оболочка, соответствующая этим минорам, находится также как и в примере 1 и соответствует заделке.

Пример 4 (*свободный контур – опертый край*). Пусть известно, что внутренний контур свободен, а закрепление на внешнем контуре неизвестно. Будем предполагать, что известные собственные значения λ_i совпадают со значениями $\lambda_1 = 2.211408062$, $\lambda_2 = 5.419474435$, $\lambda_3 = 8.637746899$, соответствующими первым трем собственным частотам ω_i, определенных частотомером. Требуется определить закрепление кольцевой пластины на внутреннем контуре. Решение системы (4.3) с данными λ_i, найденное Maple с точностью до константы, имеет вид

$$\begin{aligned} B_{12} &= -0.8409643510 \cdot 10^{-9} B_{13}, \quad B_{24} = 0.1205279429 \cdot 10^{-9} B_{13} \\ B_{13} &= B_{13}, \quad B_{34} = -.3109035767 \cdot 10^{-10} B_{13} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Приближенно можно считать, что с точностью до константы $B_{13} = 1$, $B_{12} = 0$, $B_{24} = 0$, $B_{34} = 0$ (точность приближения равна 10^{-8}). Кроме того, по условию теоремы $B_{14} = 0$, $B_{23} = 0$.

Найдем линейную оболочку, соответствующую этим минорам. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ – произвольный вектор искомой линейной оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$. Тогда координаты вектора $\mathbf{x}$ удовлетворяют условию

$$\operatorname{rank} \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \right\| = 2 \tag{5.11}$$

Поскольку

$$B_{13} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \neq 0$$

то условие (5.11) эквивалентно обращению в нуль обоих окаймляющих B_{13} миноров

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{14} \\ b_{12} & b_{23} & b_{24} \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.12}$$

Разлагая соответствующие определители по третьей строке, получаем

$$x_1 B_{23} - x_2 B_{13} + x_3 B_{12} = 0, \quad x_1 B_{34} - x_3 B_{14} + x_4 B_{13} = 0 \tag{5.13}$$

Подставив в эти равенства значения B_{ij}, получим $x_2 = 0$, $x_4 = 0$; произвольный вектор искомой линейной оболочки имеет вид $\mathbf{x} = (x_1, 0, x_3, 0)^T$.

В качестве базисных векторов этой линейной оболочки можно выбрать, например, векторы $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ и $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 1, 0)^T$.

Следовательно, закрепление на внешнем контуре соответствует свободному опиранию.

6. Выводы. Из доказанной теоремы и рассмотренных примеров следует, что закрепление на обоих контурах кольцевой пластины, недоступной для осмотра, вполне может быть распознано по звучанию ее колебаний. Более того, краевые условия могут быть удовлетворительно диагностированы и с помощью частотомера, улавливающего только первые три собственные частоты.

Выражаю признательность М.А. Ильгамову и С.Ф. Урманчееву за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 01-01-00996) и Минобразования России (грант Е02-1.0–77).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сахаров И.Е.* Частоты собственных колебаний кольцевых пластинок // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 5. С. 107–110.
2. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев: Наук. думка, 1964. 288 с.
3. *Павлов Б.В.* Акустическая диагностика механизмов: М.: Машиностроение, 1971. 223 с.
4. *Биргер И.А.* Техническая диагностика. М.: Машиностроение, 1978. 239 с.
5. *Кас М.* Can One Hear the Shape of a Drum? // Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73. № 4. P. 1–23.
6. *Ахтямов А.М.* Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1127–1128.
7. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М.* Аналоги теоремы единственности Борга в случае нераспадающихся краевых условий // Докл. РАН. 1999. Т. 367. № 6. С. 739–741.
8. *Ахтямов А.М.* О единственности восстановления краевых условий задачи Штурма – Лиувилля по ее спектру // Мат. моделирование. 2000. Т. 12. № 3. С. 6.
9. *Ахтямов А.М.* О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по ее спектру // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6. Вып. 4. С. 995–1006.
10. *Ахатов И.Ш., Ахтямов А.М.* Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 290–298.
11. *Strutt W.* (*Lord Rayleigh*). The Theory of Sound. V. 1. L.: Macmillan, 1929. 480 p.
12. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
13. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т. / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1. 831 с.
14. *Lancaster P.* Theory of Matrices. N. Y.; L.: Acad. Press, 1969. 316 p.
15. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
16. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
17. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1968. 344 с.
18. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
19. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979. 312 с.
20. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.

Уфа

Поступила в редакцию
14.03.2002