

**О ВЛИЯНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ,
БЛИЗКИХ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ**

Исследуется влияние граничных условий на форму волнообразования и величину низших собственных частот оболочек вращения, близких к цилиндрическим. Предполагается, что оболочка находится под предварительным действием нормального давления. Рассматриваются оболочки средней длины. Предполагается, что форма образующей срединной поверхности оболочки описывается достаточно гладкой, знакопостоянной функцией. Проведено исследование и упрощение соответствующих уравнений и граничных условий. Для случая, когда образующая срединной поверхности изменяется по параболическому закону, приведенное уравнение отличается от известного [1] дополнительным членом, который может иметь такой же порядок, как и другие члены. Рассмотрены оболочки как положительной, так и отрицательной гауссовой кривизны. Исследованы случаи, когда оба края оболочки жестко закреплены и когда один край свободно оперт, а другой жестко закреплен. Приведены формулы и графики зависимости наименьшей частоты и формы волнообразования от вида граничных условий, предварительного напряжения и амплитуды отклонения оболочки от цилиндра (порядка толщины). Показана различная степень влияния граничных условий на оболочки положительной и отрицательной гауссовой кривизны в зависимости от амплитуды отклонения от цилиндрической формы и предварительного напряжения.

1. Рассматриваются оболочки, у которых срединная поверхность образована вращением некоторой достаточно гладкой кривой вокруг оси z , в прямоугольной системе координат x, y, z с началом в середине отрезка оси вращения (фиг. 1). При этом радиус поперечного сечения срединной поверхности оболочки определяется равенством

$$R = r + \delta_0 F(\xi), \quad \xi = z/r \quad (1.1)$$

где $F(\xi)$ – положительная функция, заданная на интервале $(-l/r, l/r)$, так что $F(\pm l/r) = 0$; $\max F(\xi) = 1$; $|F(\xi)| \leq 1$; $L = 2l$ – длина оболочки; r – радиус торцевого сечения; δ_0 – малый параметр, характеризующий максимальное отклонение от цилиндрической формы. При $\delta_0 > 0$ образующая срединной поверхности имеет форму выпуклости, при $\delta_0 < 0$ – вогнутости. Рассматриваются оболочки средней длины [2] и считается, что

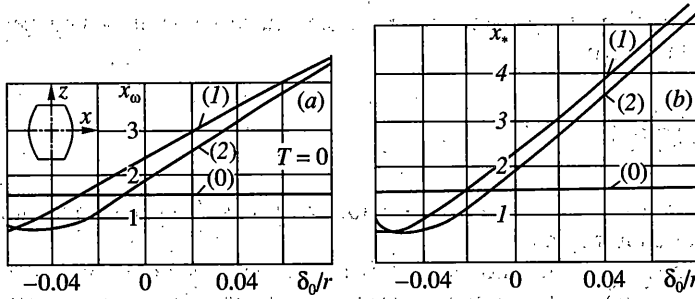
$$(\delta_0/r)^2, \quad (\delta_0/l)^2 \ll 1 \quad (1.2)$$

Уравнение срединной поверхности в параметрическом представлении имеет вид

$$x = R(\xi) \cos \varphi, \quad y = R(\xi) \sin \varphi$$

где φ – угловая координата. Отсюда получаем, что коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности будут

$$A^2 = r^2 + \delta_0^2 (F')^2, \quad B^2 = R^2(\xi) \quad (1.3)$$



Фиг. 1

На основании сделанных допущений в выражении A^2 можно пренебречь вторым членом. Следовательно

$$A \approx r, \quad B = R(\xi)$$

Главные радиусы кривизны имеют вид

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = -\frac{R''}{r^2}, \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R(\xi)} \quad (1.4)$$

Для рассматриваемых оболочек средней длины формы колебаний, соответствующие низшим частотам, сопровождаются слабовыраженным волнообразованием в продольном направлении в сравнении с окружным, поэтому справедливо соотношение

$$\partial^2 f / \partial \xi^2 \ll \partial^2 f / \partial \varphi^2 \quad (f = u, v, w) \quad (1.5)$$

где u, v, w – осевая, окружная, радиальная компоненты перемещения характеризующие форму колебания. Поэтому согласно формулировке Новожилова [3] за основные уравнения колебаний, можно принять уравнения соответствующие полубезмоментной теории Власова [4]. В результате система уравнений рассматриваемых оболочек принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} &= \left(\nu - \frac{\delta_0 F''}{r} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - \left[1 + \frac{\delta_0 F''}{r} (2 + \nu) \right] \frac{R}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \varphi^2} \\ \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} &= \left(1 - \frac{\delta_0 F''}{r} \nu \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + \left[(2 + \nu) + \frac{\delta_0 F''}{r} \right] \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi} \\ \varepsilon \left(\frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) &+ \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\left(-\frac{R''}{r} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2} \right] + \left(\frac{R''}{r} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + \\ &+ \left(\frac{R''}{r} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} - \frac{T_1^0}{Eh} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} \right) - \frac{T_2^0}{Eh} \left(\frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} - \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) + \frac{\rho r^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = 0, \\ \varepsilon &= \frac{h^2}{12r^2(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина оболочки; T_1^0, T_2^0 – нормальные усилия исходного состояния. Исходное состояние предполагается безмомент-

ным. На основании соответствующего безмоментного решения и неравенств (1.2), (1.5) нетрудно показать, что

$$T_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \ll T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \quad T_2^0 \approx -qr \quad (1.7)$$

Здесь q – нормальное давление, которое положительное, если оно внешнее, и отрицательное, если оно внутреннее.

Для характеристики форм колебаний рассматриваемых оболочек средней длины и осуществления дальнейших упрощений введем коэффициенты изменчивости $\mu_i (i = 1, 2)$, показывающие во сколько раз увеличиваются (или уменьшаются) функции, характеризующие эти формы, при дифференцировании по координатам ξ, φ :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right| \sim \mu_1 |f|, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right| \sim \mu_2 |f| \quad (1.8)$$

Для рассматриваемых оболочек формы колебаний, соответствующие низшим частотам, как было отмечено, сопровождаются слабовыраженным волнообразованием в продольном направлении в сравнении с окружным, т.е. решение слабо меняется по координате ξ и существенно – по координате φ :

$$\mu_1 \sim 1, \quad \mu_2 \gg 1 \quad (1.9)$$

Следовательно имеют место неравенства

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right| \sim |f|, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right| \gg |f|, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \right| \quad (1.10)$$

Учитывая эти условия, а также что

$$|F'| \sim \mu |F|, \quad \mu \sim 1 \quad (1.11)$$

уравнение (1.6) можно упростить. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} &= - \left[1 + \frac{\delta_0 F''}{r} (2 + \nu) \right] \frac{R}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \varphi^2} \\ \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} &= \left(1 - \frac{\delta_0 F''}{r} \nu \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3}, \quad \varepsilon = \frac{h^2}{12r^2(1-\nu^2)} \\ \varepsilon \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\left(-\frac{R''}{r} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right] + \left(-\frac{R''}{r} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + \left(\frac{R''}{r} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \varphi^4} - \\ - \frac{T_2^0 \partial^6 w}{Eh \partial \varphi^6} + \frac{\rho r^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Решение системы (1.12) для гармонических колебаний замкнутых оболочек будем искать в виде

$$u = U(\xi) \sin n\varphi \cos \omega t, \quad v = V(\xi) \sin n\varphi \cos \omega t, \quad w = W(\xi) \cos n\varphi \cos \omega t \quad (1.13)$$

При этом, как можно видеть $\mu_2 = n$. Из первых двух уравнений системы (1.12) получаем

$$n^2 U = \left[1 + \frac{\delta_0 F''}{r} (2 + \nu) \right] \frac{R}{r} W' \quad (1.14)$$

$$nV = \left(1 - \frac{\delta_0 F''}{r} \nu \right) W \quad (1.15)$$

Отметим некоторые упрощения, которые следуют для граничных условий жесткого закрепления и свободного опирания края оболочки (при $\xi = \text{const}$):

$$u = v = w = w_\xi = 0 \quad (1.16)$$

$$T_1 = \nu = \dot{w} = M_1 = 0 \quad (1.17)$$

На основании равенства (1.15), выполнение условия $w = 0$ приводит к выполнению условия $v = 0$. На основании же (1.14) выполнение условия $w_\xi = 0$ приводит к выполнению условия $u = 0$. Таким образом при выполнении условий $w = w_\xi = 0$ ($\xi = \text{const}$) выполняются все условия (1.16).

Для рассматриваемых оболочек

$$T_1 = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)R} \left[\left(\frac{R}{r} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\delta_0 F''}{r} w \right) + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} - w + \frac{\delta_0 F''}{r} u \right) \right]$$

Подставляя сюда выражения (1.13) и учитывая (1.15), получаем

$$T_1 = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)R} \left[\frac{R}{r} U' + (1 - \nu^2) \frac{\delta_0 F''}{r} W + \frac{\delta_0 F''}{r} U \right] \cos n\phi \cos \omega t \quad (1.18)$$

Равенство (1.14), учитывая условие (1.2), можно представить в виде

$$n^2 U = \left[1 + \frac{\delta_0 F''}{r} (2 + \nu) \right] W'$$

Учитывая первое соотношение (1.9) получаем, что $|W'| \sim |W|$. Кроме того, согласно (1.2), (1.11) имеем

$$\left[1 + \frac{\delta_0 F''}{r} (2 + \nu) \right] \sim 1 \quad (1.19)$$

В результате на основании (1.14) получаем, что $n^2 |U| \sim |W|$. Так как согласно второму соотношению (1.9) $n^2 \gg 1$, то имеем $|U| \ll |W|$. Тогда из (1.18) получаем

$$T_1 \frac{Eh}{(1 - \nu^2)R} \left[\frac{R}{r} U' + (1 - \nu^2) \frac{\delta_0 F''}{r} W \right] \cos n\phi \cos \omega t \quad (1.20)$$

Далее на основании (1.14) находим

$$U' = n^{-2} \left[1 + \frac{\delta_0}{r} (2 + \nu) F'' \right] W'' + n^{-2} \frac{\delta_0}{r} [(2 + \nu) F''']$$

если $W'' = 0$, то

$$U' = n^{-2} \frac{\delta_0}{r} [(2 + \nu) F'''] W \quad (1.21)$$

Так как на основании (1.9), (1.11) $|F''''| \sim |F''|$, $|F'| \sim |W|$, то из равенства (1.21) получаем

$$|U'| \sim n^{-2} \frac{\delta_0 F''}{r} |W| \quad (\xi = \text{const}) \quad (1.22)$$

Поскольку $R/r \sim 1$, $n^2 \gg 1$, то на основании (1.22) получаем

$$\frac{R}{r} |U'| \ll \frac{\delta_0 F''}{r} |W| \quad (\xi = \text{const})$$

Следовательно, если $W'' = 0$ ($\xi = \text{const}$), тогда первым членом выражения (1.20) можно пренебречь в сравнении со вторым.

Таким образом, если выполняются условия $W = W'' = 0$ ($\xi = \text{const}$), тогда условие $T_1 = 0$ выполняется автоматически. Аналогично можно показать, что выполняется и условие $M_1 = 0$.

Следовательно, для выше рассмотренного класса оболочек, при выполнении условия $W = W'' = 0$ ($\xi = \text{const}$) выполняются все условия (1.17).

Аналогичные вопросы для оболочек нулевой гауссовой кривизны рассматривались в [6].

Так как по найденному w величины u , v могут быть определены из первых двух уравнений (1.12), то задача о свободных колебаниях рассматриваемых оболочек сводится к нахождению собственных значений, при которых третье уравнение (1.12) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие вместе с перемещениями u , v принятым граничным условиям.

2. Рассмотрим замкнутую оболочку, у которой образующая срединной поверхности определяется параболической функцией

$$F(\xi) = 1 - \xi^2 (r/l)^2 \quad (2.1)$$

В этом случае третье уравнение (1.12) принимает вид

$$\varepsilon \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4\delta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + 4\delta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + t^\circ \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\rho r^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$\delta = \delta_0 r/l^2, \quad t^\circ = qr/(Eh)$$

Пусть края оболочки жестко закреплены. При этом решение должно удовлетворять условию периодичности по φ и следующим граничным условиям по координате ξ :

$$w = 0 \quad (\xi = \pm l/r), \quad w_\xi = 0 \quad (\xi = \pm l/r) \quad (2.3)$$

Решение w уравнения (2.2) для гармонических колебаний, ищется в следующем виде

$$w = W(\xi) \cos n\varphi \cos \omega t \quad (2.4)$$

$$W^{(4)} - 4\delta n^2 W^{(2)} - n^4 \left(\frac{\rho r^2}{E} \omega^2 + t^\circ n^2 - \varepsilon n^4 - 4\delta^2 \right) W = 0 \quad (2.5)$$

Принимая $W = Ce^\alpha$, получаем из (2.5) характеристическое уравнение

$$\alpha^4 - 4\delta n^2 \alpha^2 - n^4 \left(\frac{\rho r^2}{E} \omega^2 + t^\circ n^2 - \varepsilon n^4 - 4\delta^2 \right) W = 0 \quad (2.6)$$

Это биквадратное уравнение имеет решения

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{p_1}, \quad \alpha_{3,4} = \pm i \sqrt{-p_1} \quad (2.7)$$

$$p_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}, \quad p_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \quad (2.8)$$

$$p = \alpha^2, \quad a = 4\delta n^2, \quad b = n^4(\Omega\omega^2 + t^\circ n^2 - \varepsilon n^4 - 4\delta^2) \quad \Omega = \rho r^2/E \quad (2.9)$$

Общее решение уравнения (2.5) принимает вид

$$W = A \operatorname{ch} k_1 \xi + B \operatorname{sh} k_1 \xi + C \cos k_2 \xi + D \sin k_2 \xi \quad (2.10)$$

$$k_1 = \sqrt{p_1}, \quad k_2 = \sqrt{-p_2}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.3) получаем систему уравнений

$$A \operatorname{ch} k_1 l - B \operatorname{sh} k_1 l + C \cos k_2 l - D \sin k_2 l = 0$$

$$A \operatorname{ch} k_1 l + B \operatorname{sh} k_1 l - C \cos k_2 l + D \sin k_2 l = 0 \quad (2.11)$$

$$k_1(-A \operatorname{sh} k_1 l + B \operatorname{ch} k_1 l) + k_2(C \sin k_2 l + D \cos k_2 l)$$

$$k_1(A \operatorname{sh} k_1 l + B \operatorname{ch} k_1 l) + k_2(-C \sin k_2 l + D \cos k_2 l)$$

Из условия равенства нулю определителя системы (2.11) получаем

$$\operatorname{th} k_1 l = \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg} k_2 l = -\frac{k_2}{k_1} \operatorname{tg} k_2 l \quad (2.12)$$

Следовательно система (2.11) распадается на две независимые системы и соответственно решение распадается на нечетную и четную функции. Четной функции соответствуют симметричные по ξ формы колебаний, а нечетной – кососимметричные. При этом находим, что

$$B = -D \frac{\sin k_2 l}{\operatorname{sh} k_1 l}, \quad W = D \left(\sin k_2 \xi - \frac{\sin k_2 l}{\operatorname{sh} k_1 l} \operatorname{sh} k_1 \xi \right) \quad (2.13)$$

$$A = -C \frac{\cos k_2 l}{\operatorname{ch} k_1 l}, \quad W = C \left(\cos k_2 \xi - \frac{\cos k_2 l}{\operatorname{ch} k_1 l} \operatorname{ch} k_1 \xi \right) \quad (2.14)$$

Первоначально рассмотрим случай $\delta = 0, t^\circ = 0$. При этом $p_1 = -p_2 = \sqrt{b}, k_1 = k_2 = \sqrt[4]{b} = k$. Уравнение (2.12), соответствующее кососимметричным формам колебаний, при $\delta = 0$: принимает вид

$$\operatorname{th} k l = \operatorname{tg} k l$$

При этом низшему корню этого уравнения соответствует значение

$$k = 3.927 r/l \quad (2.15)$$

Тогда, как уравнение (2.12), соответствующее симметричным формам колебаний, при $\delta = 0$ принимает вид

$$\operatorname{th} k l = -\operatorname{tg} k l \quad (2.16)$$

Низшему корню этого уравнения соответствует

$$k = 2.365r/l = 0.75\pi r/l \quad (2.17)$$

т.е. меньшее значение k соответствует симметричной форме колебания. Поэтому в дальнейшем рассмотрим колебания с симметричной формой прогиба по ξ . Учитывая, что при $\delta = 0, t^\circ = 0$:

$$-p_1 p_2 = b, \quad b = n^4(\Omega\omega^2 - \varepsilon n^4)$$

Получаем

$$k^4 = n^4(\Omega\omega^2 - \varepsilon n^4) \quad (2.18)$$

Отсюда следует, что низшему корню (2.17), при фиксированном значении n соответствует наименьшее значение собственной частоты, определяемое следующим выражением

$$\Omega\omega^2 = \varepsilon n^4 + (d_1 \lambda_1)^4 n^{-4}, \quad d_1 = 1.55, \quad \lambda_1 = \pi r/(2l) \quad (2.19)$$

Наименьшее значение частоты в зависимости от n реализуется при

$$n_0^2 = d_1 \lambda_1 \varepsilon^{-1/4} \quad (2.20)$$

При $n = n_0$ из (2.19) получаем известную формулу для наименьшей частоты цилиндрической оболочки средней длины с жестко закрепленными краями [5]:

$$\Omega\omega_{01}^2 = 2d_1^2 \lambda_1^2 \varepsilon^{1/2}$$

Для свободно опертых краев наименьшая частота цилиндрической оболочки, как известно, определяется формулой

$$\Omega\omega_0^2 = 2\lambda_1^2 \varepsilon^{1/2} \quad (2.21)$$

Обратимся теперь к общему случаю и исследуем симметричные в осевом направлении формы колебаний, соответствующие низшим частотам. На основании (2.9) имеем

$$-p_2 = p_1 - a, \quad a = 4\delta n^2$$

Отсюда полагая $x = \bar{l}\sqrt{p_1}$, получаем

$$-p_2 \bar{l}^2 = x^2 - \alpha, \quad \alpha = 4n^2 \delta_0 / r \quad (2.22)$$

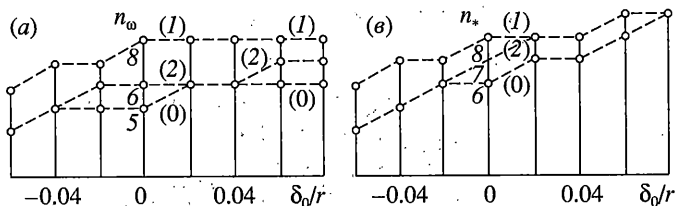
Тогда уравнение (2.18), соответствующее симметричным формам колебаний, можно представить в виде

$$x \operatorname{th} x = -\sqrt{x^2 - \alpha} \operatorname{tg} \sqrt{x^2 - \alpha} \quad (2.23)$$

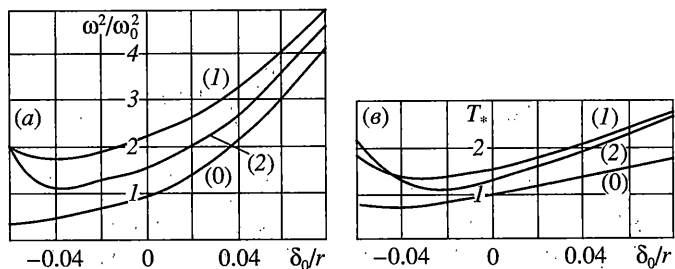
На основании равенств (2.22), (2.7) нетрудно получить, что

$$\Omega\omega^2 = \varepsilon n^4 + x^2(x^2 - \alpha)n^{-4} r^4 / l^4 + 4\delta^2 - t^\circ n^2 \quad (2.24)$$

Следовательно, в общем случае, для рассматриваемых оболочек собственные частоты ω определяются по формуле (2.24), где x – любой корень уравнения (2.29). Наименьшая частота ω получается в результате минимизации правой части равенства (2.24)



Фиг. 2



Фиг. 3

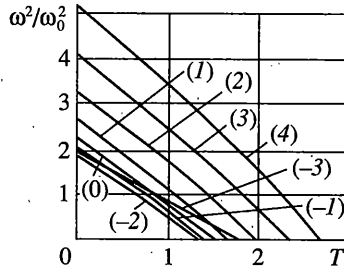
по n , когда за x принимается положительный корень уравнения (2.29), который обозначен x_ω . На основании (2.22), (2.23) не трудно видеть, что x_ω существенно зависит как от δ_0/r , так и от n . Такая минимизация осуществляется путем перебора значений n в окрестности n_0 определяемого равенством (2.20). Ниже приводятся результаты расчетов для оболочки с геометрическими размерами $l = r$, $h/r = 10^{-2}$, $\nu = 0.3$ при различных значениях δ_0/r . На фиг. 1, а представлен график зависимости x_ω от δ_0/r (при $t^\circ = 0$) – кривая (1). На фиг. 2, а показан график (1) зависимости n_ω (при котором реализуется x_ω) от δ_0/r (при $t^\circ = 0$).

На фиг. 3, а приведена кривая (1), зависимости квадрата наименьшей безразмерной частоты ω^2/ω_0^2 от δ_0/r (при $t^\circ = 0$), где ω_0^2 – определяется равенством (2.21). При $\omega = 0$ из равенства (2.30) получаем

$$t^\circ = \varepsilon n^2 + x^2(x^2 - \alpha)n^{-6}r^4/l^4 + 4\delta^2n^{-2} \tag{2.25}$$

Наименьшее значение t° , получается в результате минимизации правой части равенства (2.25) по n , когда за x принимается наименьший положительный корень уравнения (2.23), который обозначается x_* . Нетрудно видеть, на основании (2.23), значение x_* зависит от n . Соответствующие значения x_* , n_* , t_* являются критическими, и представлены в зависимости от δ_0/r кривыми (1) на фиг. 1, в, 2, в, 3, в. На фиг. 3, в по оси ординат отложено безразмерное критическое давление $T_* = t_*/t_{0*}$ (t_{0*} характеризует критические давления для свободно опертой цилиндрической оболочки и определяется равенством $t_{0*} = 0.855(1 - \nu^2)^{-3/4}(h/r)^{3/2}r/L$ [2]). Сравнивая кривые 1 на фиг. 3, а и 3, в нетрудно заметить, что они имеют качественно близкое поведение, если при $\delta_0 > 0$ значения наименьшей частоты и критического давления возрастают, то при $\delta_0 < 0$ они в начале убывают до $\delta_0/r \approx -(0.03-0.04)$ однако затем возрастают.

На фиг. 4 представлены графики изменения ω^2/ω_0^2 от величины безразмерного внешнего давления $T = t^\circ/t_{0*}$ при различных значениях δ_0/r . При этом рассматривались



Фиг. 4

значения $\delta_0/r = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, -0.2, -0.2, -0.4, -0.6$ соответствующие кривые обозначены 0, 1, 2, 3, 4; -1, -2, -3.

3. Рассмотрим случай, когда один край оболочки свободно оперт, а другой жестко заделан. Введем новую переменную $\bar{z} = z + l$ и соответственно $\bar{\xi} = \xi + l/r$. Уравнение (2.5) при этом имеет тот же вид, а граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} W = 0 (\bar{\xi} = 0), \quad W'' = 0 (\bar{\xi} = 0), \quad W = 0 (\bar{\xi} = L) \\ W' = 0 (\bar{\xi} = \bar{L}), \quad \bar{L} = L/r, \quad L = 2l \end{aligned} \quad (3.1)$$

Общее решение уравнения (2.5), в данном случае, удобно представить в виде

$$\begin{aligned} W = A(\cos k_2 \bar{\xi} + \operatorname{ch} k_1 \bar{\xi}) + B(\cos k_2 \bar{\xi} - \operatorname{ch} k_1 \bar{\xi}) + \\ + C(\sin k_2 \bar{\xi} + \operatorname{sh} k_1 \bar{\xi}) + D(\sin k_2 \bar{\xi} - \operatorname{sh} k_1 \bar{\xi}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Удовлетворяя первому и второму условиям (3.1) получаем

$$A = 0, \quad B = 0 \quad (3.3)$$

тогда как из третьего и четвертого получаем

$$\begin{aligned} C(\sin k_2 \bar{L} + \operatorname{sh} k_1 \bar{L}) + D(\sin k_2 \bar{L} - \operatorname{sh} k_1 \bar{L}) = 0 \\ C(k_2 \cos k_2 \bar{L} + k_1 \operatorname{ch} k_1 \bar{L}) + D(k_2 \cos k_2 \bar{L} - k_1 \operatorname{ch} k_1 \bar{L}) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из условия нетривиальности решения имеем

$$\operatorname{th} k_1 \bar{L} = \frac{k_1}{k_2} \operatorname{tg} k_2 \bar{L} \quad (3.5)$$

На основании первого уравнения системы (3.4) получаем

$$D = -\frac{\sin k_2 \bar{L} + \operatorname{sh} k_1 \bar{L}}{\sin k_2 \bar{L} - \operatorname{sh} k_1 \bar{L}} C, \quad k_1 = \sqrt{p_1}, \quad k_2 = \sqrt{-p_2}$$

И решение принимает вид

$$W = C \left[\sin k_2 \bar{\xi} + \operatorname{sh} k_1 \bar{\xi} - \frac{\sin k_2 \bar{L} + \operatorname{sh} k_1 \bar{L}}{\sin k_2 \bar{L} - \operatorname{sh} k_1 \bar{L}} (\sin k_2 \bar{\xi} - \operatorname{sh} k_1 \bar{\xi}) \right] \quad (3.6)$$

Введем обозначение

$$y = \sqrt{p_1} L/2 \quad (3.7)$$

Тогда учитывая, что $p_2 = a - p_1$ получаем

$$p^2 L^2 / r^2 = 4\alpha - y^2, \quad \alpha = 4n^2 \delta_0 / r$$

Следовательно

$$k_1 = yr/L, \quad k_2 = \sqrt{y^2 - 4\alpha} r/L \quad (3.8)$$

Учитывая, что

$$-p_1 p_2 = y^2 (y^2 - 4\alpha) r^4 / L^4, \quad p_1 p_2 = b \quad (3.9)$$

Получаем

$$\Omega \omega^2 = \varepsilon n^4 + x^2 (x^2 - \alpha) n^{-4} r^4 / l^4 + 4\delta^2 + t^\circ n^2, \quad x = y/2 \quad (3.10)$$

Учитывая (3.8), уравнения (3.5) представим в следующем виде

$$\sqrt{x^2 - \alpha} \operatorname{th} 2x = x \operatorname{tg} 2\sqrt{x^2 - \alpha} \quad (3.11)$$

При $\delta = 0$ имеем $k_1 = k_2 = k$ и уравнение (3.11) для цилиндрической оболочки принимает вид

$$\operatorname{th} 2x = \operatorname{tg} 2x, \quad 2x = kL/r, \quad k = xr/l$$

Нижнему корню этого уравнения, как известно, соответствует значение

$$2x_* = 3.927, \quad k = 1.9635r/l \quad (k = 0.625\pi r/l)$$

Этому корню, при фиксированном значении n , соответствует наименьшее по x значение собственной частоты ω , определяемое формулой

$$\Omega \omega^2 = \varepsilon n^4 + x_0^4 n^{-4} r^4 / l^4 - t^\circ n^2 \quad (3.12)$$

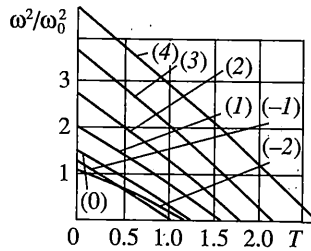
Наименьшее значение частоты (при $t^\circ = 0$) реализуется при

$$n_{02} = d_2 \lambda_1 \varepsilon^{-1/4}, \quad d_2 = 1.25, \quad \lambda_1 = \pi r / (2l) \quad (3.13)$$

При $n = n_{02}$ на основании (3.12), получаем известную формулу для наименьшей частоты цилиндрической оболочки [5]:

$$\Omega \omega_{02}^2 = 2d_2^2 \lambda_1^2 \varepsilon^{3/2} \quad (3.14)$$

Таким образом, для рассматриваемых оболочек вращения, находящихся под предварительным действием внешнего давления, у которых один край свободно оперт, а другой зашпелен, собственные частоты определяются по формуле (3.10), где x – любой корень уравнения (3.11). Наименьшая частота ω (при фиксированном δ_0/r) определяется подобно предыдущему случаю, когда за x_ω принимается наименьший положительный корень уравнения (3.11), а минимизацию по n (при $t = 0$) осуществляется в окрестности n_{02} , определяемого формулой (3.13). Для выше рассмотренной оболочки и рассматриваемого случая закрепленных краев на фиг. 1, а представлен график зависимости x_ω от δ_0/r ($t^\circ = 0$) – кривой 2. На фиг. 2, а представлен график 2 зависимости n_ω



Фиг. 5

(при котором реализуется x_0) от δ_0/r (при $t^\circ = 0$). На фиг. 3, а приведена кривая 2 зависимости квадрата наименьшей безразмерной частоты ω^2/ω_0^2 от δ_0/r (при $t^\circ = 0$). При $\omega = 0$ из равенства (3.10) получаем

$$t^\circ = \varepsilon n^2 + x^2(x^2 - \alpha)n^{-6}r^4/l^4 + 4\delta^2 n^{-2} \quad (3.15)$$

Наименьшее значение t° получается в результате минимизации правой части равенства (3.15) по n , когда за x принимается наименьший положительный корень уравнения (3.11), который обозначен x_* . Соответствующие значения x_* , n_* , t_* являются критическими и представлены в зависимости от δ_0/r кривыми 2 на фиг. 1, в, 2, в, 3, в.

Для сравнения на фиг. 1, 2, 3 приведены графики соответствующих величин под номером 0, для случая, когда оба края оболочки свободно оперты [7]. Нетрудно видеть, что ординаты, соответствующие кривой 0 на фиг. 3, а меньше в сравнении с соответствующими ординатами кривых 1 и 2 на рассматриваемом промежутке значений δ_0/r .

На фиг. 5 представлены графики изменения ω^2/ω_0^2 в зависимости от T для рассматриваемого случая различных граничных условий на краях оболочки при следующих значениях δ_0/r : 0, 0.2, 0.4, 0.6; 0.8, -0.2, -0.4, -0.6 соответствующие кривые обозначены 0, 1, 2, 3, 4, -1, -2 и -3.

Таким образом, получены формулы и кривые для наименьшей частоты оболочек вращения близких по форме к цилиндрическим, а зависимости от рассматриваемых граничных условий, амплитуды отклонения от цилиндра и величины предварительного напряжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Даревский В.М. Устойчивость оболочки, близкой по форме к цилиндрической // Проблемы расчета пространственных конструкций. М.: МИСИ, 1980. С. 35-45.
2. Вольфир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
4. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
5. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
6. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. 320 с.
7. Кукуджанов С.Н. О влиянии нормального давления на частоты свободных колебаний оболочек вращения, близких к цилиндрическим // Изв. АН. МГТ. 1996. № 6. С. 121-126.