

УДК 531.38

© 2003 г. В.П. ЛЕГЕЗА

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ШАРА
В ЦИКЛОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ
МЕЖДУ ДВУМЯ ПОДВИЖНЫМИ ОПОРАМИ**

С привлечением неголономной механики Аппеля получены динамические уравнения плоского движения механической системы “тяжелый однородный шар в циклоидальной полости между подвижными верхней и нижней опорами” под действием внешнего кинематического возмущения. Выполнен численный анализ изучаемого движения для характерного набора начальных данных и параметров системы.

1. Постановка задачи, геометрические и кинематические соотношения. Рассматривается динамическое поведение трехмассовой системы твердых тел “нижняя подвижная опора m_1 , тяжелый однородный шар m_2 , верхняя подвижная опора m_3 ” под действием внешнего кинематического возбуждения $x_0(t)$ (фиг. 1).

Такая система моделирует функционирование виброзащитных опор между сооружением и фундаментом в сейсмостойком строительстве. Нижняя и верхняя подвижные опоры имеют одинаковые циклоидальные поверхности, расположенные симметрично вогнутостями друг к другу. Основной частью таких опорных устройств является тяжелый однородный шар m_2 , который перекатывается по циклоидальным поверхностям нижней m_1 и верхней m_3 подвижных опор без скольжения. Это условие является необходимым ввиду технического требования точного возврата (без накопления относительных смещений нижней и верхней опор) в первоначальное до сейсмического возбуждения положение. При этом предполагается, что верхняя опора (подвижная полезная нагрузка) движется поступательно, т.е. движение верхней опоры вполне определяется движением одной из ее точек, например, точки G . Внешнее кинематическое возбуждение $x_0(t)$ действует на нижнюю опору и задано в виде экспоненциально затухающей синусоиды [11]:

$$x_0(t) = Q_0 e^{-\xi t} \sin(\omega_b t) \quad (1.1)$$

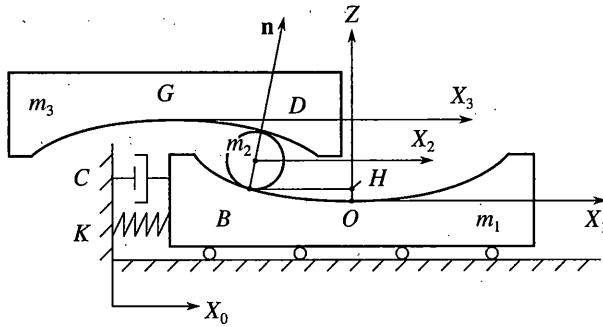
где Q_0 – максимальная (начальная) амплитуда внешнего возбуждения, ξ – коэффициент затухания интенсивности внешнего возбуждения, ω_b – угловая частота внешнего возбуждения.

При последующих колебаниях системы после прохождения кинематического возбуждения сопротивление слоев грунта вблизи фундамента (нижней опоры) будем моделировать согласно [2] в виде упругого элемента K с демпфером C .

Запишем кинематические соотношения, которые следуют из условия непроскальзывания шара относительно нижней и верхней подвижных опор

$$\mathbf{V}_2 = \dot{x}_1 \mathbf{i} + \phi \mathbf{j} \times r \mathbf{n} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_D \quad (1.3)$$



Фиг. 1

где $\dot{\phi}$ – угловая скорость шара относительно своего центра масс, r – радиус шара, V_2 – линейная скорость ЦМ шара, \mathbf{n} – единичная внутренняя нормаль в точке B .

Последнее уравнение имеет место вследствие поступательности движения верхней опоры и отсутствия проскальзывания шара в точке D . Кроме того, так как точка D всегда диаметрально противоположна точке B в силу симметричности расположения верхней и нижней опор, имеет место равенство ($V_D = (\dot{x}_3, 0, \dot{z}_3)$):

$$V_D = V_3 = \dot{x}_3 \mathbf{i} + 2\dot{\phi} \mathbf{j} \times r \mathbf{n} \quad (1.4)$$

Параметрические уравнения циклоиды нижней опоры в системе координат ZOX_1 ($q = BH, z = OH$) имеют вид:

$$q = R(\theta - \sin\theta) - \pi R, \quad z = R(1 + \cos\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (1.5)$$

где q – относительное отклонение точки контакта B шара на циклоидальной поверхности нижней опоры, z – смещение вдоль оси OZ упомянутой точки B , R – характеристика циклоиды.

Самой нижней точке контакта шара и нижней опоры соответствует параметр $\theta = \pi$. Координаты вектора \mathbf{n} в точке B выразим через параметр циклоиды θ :

$$\mathbf{n} = \left(\cos \frac{1}{2}\theta, 0, \sin \frac{1}{2}\theta \right) \quad (1.6)$$

Введем две обобщенные координаты для рассматриваемой системы: x_1 – отклонение нижней подвижной опоры m_1 вдоль оси OX_1 , θ – параметр циклоиды, который однозначно определяет координаты точки контакта B .

Учитывая, что шар движется без скольжения относительно опор, можно приравнять элементарные дуги смежности на шаре и на циклоидальной поверхности нижней опоры, после чего записать следующие уравнения дифференциалов и производных

$$rd\phi = ds = \sqrt{(dq)^2 + (dz)^2} = 2R \sin \frac{\theta}{2} d\theta \rightarrow d\phi = \frac{2R}{r} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \rightarrow \dot{\phi} = \frac{2R}{r} \sin \frac{\theta}{2} \dot{\theta} \quad (1.7)$$

Перепишем соотношения (1.2) в скалярном виде с учетом введенных обобщенных координат и выражений (1.6) и (1.7). Здесь введено обозначение $V_2 = (\dot{x}_3, 0, \dot{z}_2)$:

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + 2R \sin^2(\theta/2) \dot{\theta} \quad (1.8)$$

$$\dot{z}_2 = -R \sin(\theta) \dot{\theta} \quad (1.9)$$

2. Вывод динамических уравнений движения исследуемой системы. Перейдем к построению динамических уравнений движения исследуемой сейсмозащитной системы. Для этого используем подход Апделя для неголономных систем [3, 4]. Это связано с удобством вывода динамических уравнений движения системы с помощью непосредственного использования соотношений (1.8), (1.9) при построении функции S – энергии ускорений всех масс системы.

Запишем упомянутую функцию S в общем виде

$$S = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{J_2}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{m_3}{2} (\dot{x}_3^2 + \dot{z}_3^2) \quad (2.1)$$

$$\dot{\phi} = \frac{2R}{r} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \ddot{\theta} \right) \quad (2.2)$$

где J_2 – момент инерции шара относительно оси, проходящей параллельно оси ОУ через его ЦМ ($J_2 = 0.4m_2r^2$).

Используя соотношения (1.8) и (1.9), определим соответствующие вторые производные координат ЦМ шара

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + 2R \sin^2(\theta/2) \ddot{\theta} + R \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \quad (2.3)$$

$$\ddot{z}_2 = -R(\sin(\theta) \ddot{\theta} + \cos(\theta) \dot{\theta}^2) \quad (2.4)$$

Для нахождения вторых производных координат ЦМ верхней опоры m_3 используем соотношение (1.4):

$$\ddot{x}_3 = \ddot{x}_1 + 4R \sin^2(\theta/2) \ddot{\theta} + 2R \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \quad (2.5)$$

$$\ddot{z}_3 = -2R(\sin(\theta) \ddot{\theta} + \cos(\theta) \dot{\theta}^2) \quad (2.6)$$

Подставим полученные выражения (2.2)–(2.6) в (2.1) и учтем только ту часть функции S , которая зависит от вторых производных обобщенных координат (обозначим ее S^*):

$$S^* = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \dot{x}_1^2 + (2.8m_2 + 8m_3) R^2 \times \sin^2(\theta/2) \dot{\theta}^2 + \quad (2.7)$$

$$+ (4m_3 + 1.4m_2) R^2 \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \ddot{\theta} + (m_2 + 2m_3) R \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \dot{x}_1 + 2(m_2 + 2m_3) R \sin^2(\theta/2) \dot{\theta} \dot{x}_1$$

Теперь запишем выражение для элементарной работы δA , рассматривая движение шара и верхней опоры под действием сил тяжести, а нижней опоры – под действием упругой силы $F_1 = K(x_1 - x_0)$ и вязкого сопротивления грунта в виде $F_2 = C(\dot{x}_1 - \dot{x}_0)$, которые возникают при кинематическом возбуждении

$$\delta A = [K(x_1 - x_0) + C(\dot{x}_1 - \dot{x}_0)] \delta x_1 - m_2 g \delta z_2 - m_3 g \delta z_3 \quad (2.8)$$

С использованием (1.8), (1.9) и (1.4) преобразуем выражение (2.8) в обобщенных координатах

$$\delta A = -[K(x_1 - x_0) + C(\dot{x}_1 - \dot{x}_0)] \delta x_1 + (m_2 + 2m_3) g R \sin(\theta) \delta \theta \quad (2.9)$$

С другой стороны выражение для элементарной работы в вариациях обобщенных координат можно записать таким образом

$$\delta A = P_{x_1} \delta x_1 + P_{\theta} \delta \theta \quad (2.10)$$

Исходя из выражений (2.9) и (2.10), получим обобщенные силы (правые части уравнений Аппеля) для всей механической системы

$$P_{x_1} = [K(x_1 - x_0) + C(\dot{x}_1 - \dot{x}_0)] \quad (2.11)$$

$$P_{\theta} = (m_2 + 2m_3)gR \sin \theta \quad (2.12)$$

Теперь можно записать уравнения Аппеля в обобщенных координатах

$$\partial S / \partial \dot{x}_1 = P_{x_1}, \quad \partial S / \partial \dot{\theta} = P_{\theta} \quad (2.13)$$

После дифференцирования в соответствии с (2.13) и выполнения некоторых преобразований, получим следующие уравнения движения механической системы в обобщенных координатах (здесь учтено, что $m_2/m_3 \rightarrow 0$):

$$A_{11} \ddot{x}_1 + \ddot{\theta} = b_1, \quad \ddot{x}_1 + A_{22} \ddot{\theta} = b_2 \quad (2.14)$$

$$A_{11} = \frac{\mu + 1}{4R \sin^2(\theta/2)}, \quad A_{22} = 4R, \quad b_1 = -\frac{\Delta F}{4R \sin^2(\theta/2)} - \operatorname{ctg}(\theta/2) \dot{\theta}^2, \quad \mu = m_1/m_3$$

$$b_2 = (g - 2R\dot{\theta}^2) \operatorname{ctg}(\theta/2), \quad \Delta F = \omega_{cb}^2(x_1 - x_0) + 2n(\dot{x}_1 - \dot{x}_0), \quad \omega_{cb} = \sqrt{K/m_3},$$

$$n = \frac{1}{2} C/m_3$$

Для приведения системы (2.14) к виду, удобному для алгоритмизации, выразим из нее старшие производные

$$\ddot{x}_1 = \frac{\Delta F + \sin(\theta)(0.5g + R\dot{\theta}^2)}{ZN(\mu, \theta)} \quad (2.15)$$

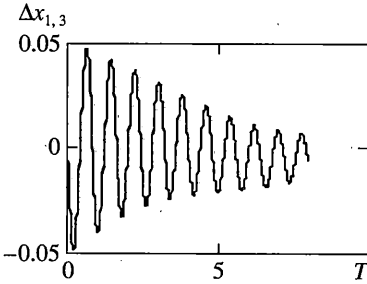
$$\ddot{\theta} = \frac{(1 + \mu)(g/R - 2\dot{\theta}^2) \operatorname{ctg} \theta/2 + 2 \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + \Delta F/R}{4ZN(\mu, \theta)} \quad (2.16)$$

$$ZN(\mu, \theta) = \mu + \cos^2(\theta/2)$$

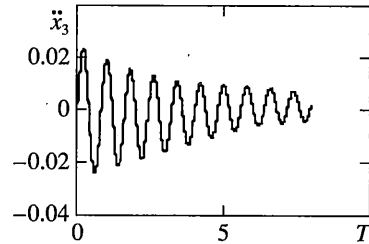
Как видно из приведенной системы уравнений движения (2.15) и (2.16), она представляет собой полную систему дифференциальных уравнений без привлечения уравнений кинематических связей (1.2) и (1.4). По ходу построения уравнений движения с помощью подхода Аппеля лишние переменные из них были исключены и теперь можно исследовать полученную замкнутую систему (2.15) и (2.16) относительно двух независимых обобщенных координат.

3. Результаты численного эксперимента. Интегрирование полученной системы уравнений и исследование динамического поведения рассматриваемой механической системы выполнялось численно с привлечением сертифицированного пакета прикладных программ "MATHCAD" [5].

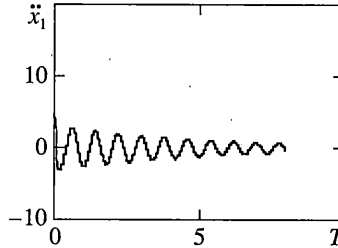
При проектировании сейсмозащитных опор их разработчиков в первую очередь интересуют максимальные значения относительных смещений сооружения относительно подвижного фундамента, ускорения ЦМ сооружения, степень затухания ко-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

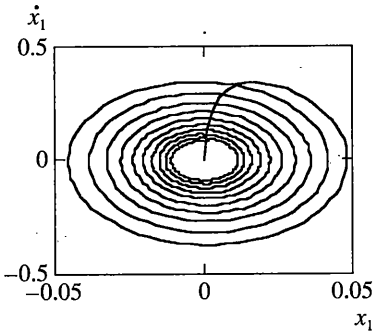
лебаний сооружения, т.е. характеристики реакции здания на входное кинематическое воздействие (в данном случае в виде (1.1)).

В качестве иллюстрации приведем некоторые результаты численного эксперимента с исследуемой системой со следующими параметрами: $n = 2.0$, $\mu = 0.1$, $\xi = 0.2$, $R = 2.5$ м, $\omega_b = 7.9$ рад/с, $\omega^* = \omega_b \sqrt{\mu} = 2.5$ рад/с, $Q_0 = 0.05$ м, ω^* – частота свободных колебаний. На фиг. 2 показано изменение смещения ЦМ верхней подвижной опоры m_3 относительно ЦМ нижней подвижной опоры m_1 во времени T . Как видно из представленного графика, максимальное смещение опор друг относительно друга не превышает 0.05 м. При этом абсолютное перемещение ЦМ верхней опоры не превышает 0.005 м (этот график не приведен). В свою очередь абсолютное перемещение ЦМ верхней опоры определяет степень влияния входного кинематического воздействия на сооружение: чем меньше это перемещение, тем меньше степень влияния входного воздействия на сооружение, т.е. тем меньше уровень горизонтальных перерезывающих сил, возникающих в конструкциях сооружения при прохождении сейсмозбуждения.

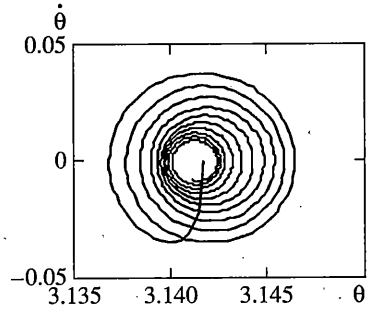
Для иллюстрации меры динамической нагруженности сооружения приведем график изменения ускорения \ddot{x}_3 центра масс верхней опоры во времени T (фиг. 3).

Для сравнения с ускорением \ddot{x}_3 на фиг. 4 показан процесс изменения во времени T ускорения \ddot{x}_1 центра масс нижней подвижной опоры, на которую непосредственно воздействует сейсмическое возбуждение.

Сравнивая максимальные значения ускорений (соответственно 0.023 и 10.66 м/с²), можно сделать вывод о том, что рассматриваемые сейсмозащитные опоры обеспечивают высокий уровень виброзащиты сооружений: их применение в сотни раз снижа-



Фиг. 5



Фиг. 6

ет уровень наиболее опасных поперечных (горизонтальных перерезывающих) инерционных сил.

Процесс затухания колебаний в системе можно проследить с помощью построения фазовых портретов ее масс. На фиг. 5 и фиг. 6 показаны фазовые портреты для центров масс нижней опоры m_1 и для шара m_2 (через параметр циклоиды θ для точки контакта шара и нижней опоры).

Результаты приведенного исследования могут быть использованы разработчиками виброзащитных шаровых опор при принятии конструктивных решений в части рационального выбора характеристик циклоидальных поверхностей опор. Это вызвано необходимостью минимизации динамических нагрузок на сооружения при различных типах и параметрах входного кинематического возбуждения (в том числе имеющего промышленное происхождение).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия. Справочник проектировщика (под ред. Б.Г. Коренева и И.М. Рабиновича). М.: Стройиздат, 1981. 216 с.
2. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
5. Аладьев В.З., Тупало В.Г. Компьютерная хрестоматия (программное обеспечение персональных компьютеров). Киев: Укр. энциклопедия, 1993. 448 с.

Киев

Поступила в редакцию
08.01.2001