МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2003

УДК 539.3:534.1

© 2003 г. И.В. КИРИЛЛОВА

ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ ПОГРАНСЛОЕВ В ОКРЕСТНОСТЯХ ФРОНТОВ ВОЛН В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ НУЛЕВОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

Рассматриваются нестационарные волны в оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны при ударных торцевых воздействиях продольного тангенциального, продольного изгибающего и нормального типов. Исследованы асимптотически оптимальные уравнения погранслоев в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига.

Получены замкнутые подсистемы для асимптотически главных и второстепенных компонент НДС. Доказано, что решения для погранслоев сращиваются с решениями для квазиплоской квазисимметричной и квазиплоской квазиантисимметричной задач теории упругости. Дана оценка расположения областей согласования и, соответственно, границ областей применимости погранслоев.

1. Введение. Данная статья посвящена построению схемы расчленения нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек вращения на составляющие с различными показателями изменяемости. Ввиду того, что решения нестационарных задач для тонких оболочек имеют высокую изменяемость в окрестностях фронтов волн и малую изменяемость вне этих областей, то применяется асимптотический подход, который представляет версию [1, 2] метода сращиваемых разложений. Используются безмоментная и моментная составляющие низкочастотного длинноволнового приближения, соответствующие теории Кирхгофа–Лява, квазиплоская (квазисимметричная и квазиантисимметричная) задача теории упругости, описываемая уравнениями коротковолнового высокочастотного приближения, погранслои в окрестностях фронтов волн расширения, сдвига и в окрестности квазифронта, а также квазистатический погранслой типа Сен-Венана.

В [1, 2] доказано сращивание безмоментной составляющей и плоского симметричного погранслоя, моментной составляющей и плоского обратносимметричного погранслоя. В [2, 3] доказано сращивание безмоментной составляющей и погранслоя в окрестности квазифронта, погранслоя в окрестности квазифронта и квазиплоской квазисимметричной задачи теории упругости. Для завершения доказательства корректности предложенной схемы расчленения необходимо показать наличие области согласования решения для погранслоя в окрестности фронта волны расширения и сдвига и решения для квазиплоской задачи теории упругости: при воздействии тангенциального типа последняя является квазисимметричной, а при воздействии изгибающего типа – квазиантисимметричной.

2. Постановка задачи. Рассмотрим оболочку вращения нулевой гауссовой кривизны. Отнесем срединную поверхность оболочки к координатной системе (s, θ), где s – длина дуги меридиана, θ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ – угловая координата. Тогда первая квадратичная форма поверхности может быть записана как $ds^2 + A^2R^2d\theta^2$, R – характерное значение радиусов кривизны срединной поверхности. Введем также безразмерную длину дуги меридиана $\xi = s/R$.

Уравнения движения теории упругости, определяющие движение оболочки как трехмерного тела, в данной системе координат примут вид:

$$
\begin{aligned}
&H\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\frac{1}{A}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\theta}+HR\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha_3}+\frac{A'}{A}(\sigma_{11}-\sigma_{22})+\frac{1}{R_2^*}\sigma_{13}-\rho HR\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}=0\\
&H\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+\frac{1}{A}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\theta}+HR\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\alpha_3}+2\frac{A'}{A}\sigma_{12}+\frac{2}{R_2^*}\sigma_{23}-\rho HR\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}=0 \qquad (2.1)\\
&H\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\xi}+\frac{1}{A}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\theta}+HR\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\alpha_3}-\frac{1}{R_2^*}(\sigma_{22}-\sigma_{33})+\frac{A'}{A}\sigma_{13}-\rho HR\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}=0
\end{aligned}
$$

Уравнения, выражающие закон Гука, запишем в форме

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11}&=\frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2}\frac{1}{R}\left[\frac{\partial v_1}{\partial\xi}+\frac{\nu}{1-\nu}\left(R\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_3}+\frac{1}{AH}\frac{\partial v_2}{\partial\theta}+\frac{A'}{AH}v_1+\frac{1}{HR_2^*}v_3\right)\right]\\
\sigma_{22}&=\frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2}\frac{1}{R}\left[\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial v_1}{\partial\xi}+R\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_3}\right)+\frac{1}{AH}\frac{\partial v_2}{\partial\theta}+\frac{A'}{AH}v_1+\frac{1}{HR_2^*}v_3\right]\\
\sigma_{33}&=\frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2}\frac{1}{R}\left[\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial v_1}{\partial\xi}+\frac{1}{AH}\frac{\partial v_2}{\partial\theta}+\frac{A'}{AH}v_1+\frac{1}{HR_2^*}v_3\right)+R\frac{\partial v_3}{\partial\alpha_3}\right]\\
\sigma_{13}&=\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{1}{R}\left[R\frac{\partial v_1}{\partial\alpha_3}+\frac{\partial v_3}{\partial\xi}\right],\quad \kappa=\frac{c_2}{c_1},\quad H=1+\frac{\alpha_3}{R_2} \qquad (2.2)\\
\sigma_{12}&=\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{1}{R}\left[\frac{\partial v_2}{\partial\xi}+\frac{1}{AH}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}-\frac{A'}{AH}v_2\right]\\
\sigma_{23}&=\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{1}{R}\left[R\frac{\partial v_2}{\partial\alpha_3}+\frac{1}{AH}\frac{\partial v_3}{\partial\theta}-\frac{1}{HR_2^*}v_2\right],\quad R_2^*=\frac{R_2}{R}
\end{aligned}
$$

где σ_{ij} $(i,j=1,2,3)$ – напряжения, v_i – перемещения, c_1 – скорость волны расширения, c_2 – скорость волны сдвига, t – время, ρ – плотность, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $2h$ – толщина оболочки, α_3 – координата внешней нормали срединной поверхности, R_2 – главный радиус кривизны срединной поверхности оболочки, штрихом обозначена производная по ξ.

Будем рассматривать три типа воздействия, которые, в соответствии с классификацией из [4], названы продольным воздействием тангенциального типа (**LT**-нагружение), продольным воздействием изгибающего типа (**LM**-нагружение) и нормальным воздействием (**NW**-нагружение). В случае **LT**-нагружения имеем ненулевое значение продольного нормального усилия, в случае **LM**-нагружения на торце задан ненулевой изгибающий момент, в случае **NW**-нагружения задано ненулевое значение перерезывающий силы.

Запишем начальные условия ($t=0$) в виде $v_i=\partial v_i/\partial t=0$ $(i=1,2,3)$ и примем, что лицевые поверхности оболочки свободны от напряжений $\sigma_{13}=\sigma_{23}=\sigma_{33}=0$ при $\alpha_3=\pm h$.

3. Вывод уравнений погранслоя. НДС в узкой окрестности фронта волны расширения в задачах с воздействиями **LT**, **LM** описано в [2]. При этих воздействиях передний фронт волны расширения несет главный разрыв нормального напряжения, отражающий скачок напряжения на торце в начальный момент времени. Для построения асимптотически оптимальной теории использован метод погранслоя. Вывод уравнений погранслоя основан на введении характеристической переменной, определяющей расстояние до фронта. Предполагаем, что асимптотика для напряжений и перемещений определяется выражениями [2]:

$$\begin{aligned} &v_1 = R\eta v_1^*, \quad v_2 = R\eta^{3-p}v_2^*, \quad v_3 = R\eta^2 v_3^*, \quad \sigma_{ii} = E\eta^{-1}\sigma_{ii}^* \quad (i = 1, 2, 3) \\ &\sigma_{13} = E\sigma_{13}^*, \quad \sigma_{23} = E\eta^{2-p}\sigma_{23}^*, \quad \sigma_{12} = E\eta^{1-p}\sigma_{12}^* \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\eta = h/R$ – относительная полутолщина оболочки. Величины со звездочками имеют здесь один и тот же асимптотический порядок, p – показатель изменяемости НДС по окружной координате.

Проведение последовательных преобразований уравнений (2.1) и (2.2) с учетом (3.1) позволило получить следующие асимптотически оптимальные уравнения [2]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_3^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{A'}{A}\frac{\partial v_1}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial s} - \frac{1}{AR}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} = 0 \\ &\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial v_3}{\partial s} = 0, \quad \sigma_{11} = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2}\frac{\partial v_1}{\partial s}, \quad \sigma_{22} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial v_1}{\partial s} \\ &\sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial v_1}{\partial s}, \quad \sigma_{13} = \frac{E}{1+\nu}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3}, \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{AR}\frac{\partial v_1}{\partial \theta} \\ &\sigma_{23} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{AR}\frac{\partial v_3}{\partial \theta}\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

где штрихом обозначена уже производная по s.

Полученная система уравнений описывает распространение только одной волны – волны расширения.

Построим уравнения погранслоя в окрестности фронта волны сдвига (NW-воздействие). При этом передний фронт волны сдвига несет главный разрыв напряжения σ_{13}, отражающий скачок напряжения в начальный момент времени. Фронт волны образован нормалями к срединной поверхности и определяется уравнением $s = c_2 t$.

Запишем разрешающие уравнения в перемещениях. Подставляя (2.2) в (2.1), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\kappa^2}{A^2H^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} - \left(\frac{(A')^2}{A^2H^2} - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{A''}{AH}\right)v_1 + \kappa^2 R^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_3^2} - \frac{R^2}{c_1^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{A'}{AH}\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \\ &+ \kappa^2\frac{R}{HR_2^*}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{1}{AH}\frac{\partial^2 v_2}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{R}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \alpha_3} - \\ &- \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)}\frac{A'}{A^2H^2}\frac{\partial v_2}{\partial \theta} - \left[\frac{A'}{AH^2}\frac{1}{R_2^*} - \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{A'}{AH}\frac{1}{R_2^*} - \frac{1}{HR}\frac{(R_2^*)'}{(R_2^*)^2}\right)\right]v_3 + \\ &+ \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{1}{HR_2^*}\frac{\partial v_3}{\partial \xi} = 0 \\ &\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{1}{AH}\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{1}{A^2H^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial \theta^2} - \kappa^2\left(\frac{1}{H^2(R_2^*)^2} + \frac{(A')^2}{A^2H^2} + \frac{A''}{AH}\right)v_2 + \\ &+ \kappa^2 R^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial \alpha_3^2} - \frac{R^2}{c_1^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \kappa^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial \xi^2} + \kappa^2\frac{A'}{AH}\frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{R}{AH}\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha_3 \partial \theta} + \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$+\frac{3-4\nu}{2(1-\nu)}\frac{A''}{A^2H^2}\frac{\partial\upsilon_1}{\partial\theta}+\kappa^2\frac{R}{HR_2^*}\frac{\partial\upsilon_2}{\partial\alpha_3}+\frac{3-4\nu}{2(1-\nu)}\frac{1}{AH^2}\frac{1}{R_2^*}\frac{\partial\upsilon_3}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{R}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2\upsilon_1}{\partial\xi\partial\alpha_3}+\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{R}{AH}\frac{\partial^2\upsilon_2}{\partial\alpha_3\partial\theta}+\kappa^2\frac{\partial^2\upsilon_3}{\partial\xi^2}+\frac{\kappa^2}{A^2H^2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\theta^2}-$$

$$-\frac{\upsilon_3}{H^2(R_2^*)^2}+R^2\frac{\partial^2\upsilon_3}{\partial\alpha_3^2}-\frac{R^2}{c_1^2}\frac{\partial^2\upsilon_3}{\partial t^2}+\kappa^2\frac{A'}{AH}\frac{\partial\upsilon_3}{\partial\xi}+\frac{R}{HR_2^*}\frac{\partial\upsilon_3}{\partial\alpha_3}-\frac{A'}{AH^2}\frac{\upsilon_1}{R_2^*}+$$

$$+\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{A'R\partial\upsilon_1}{AH\partial\alpha_3}-\frac{3-4\nu}{2(1-\nu)}\frac{1}{AH^2}\frac{1}{R_2^*}\frac{\partial\upsilon_2}{\partial\theta}=0$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$x=\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{c_2t}{R}-\xi\right),\quad t_2=\frac{c_2t}{R},\quad \zeta=\frac{1}{R\eta}\alpha_3,\quad \theta^*=\eta^{-p}\theta \tag{3.4}$$

Считается, что дифференцирование по безразмерным переменным не изменяет асимптотического порядка искомых функций.

Предполагаем, что толщина погранслоя имеет порядок $O(\eta^2)$. НДС погранслоя определим следующим образом:

$$\begin{aligned}&\upsilon_1=R\eta^2\upsilon_1^*,\quad \upsilon_2=R\eta^{4-p}\upsilon_2^*,\quad \upsilon_3=R\eta\upsilon_3^*,\quad \sigma_{ii}=E\sigma_{ii}^*\quad (i=1,2,3)\\&\sigma_{13}=E\eta^{-1}\sigma_{13}^*,\quad \sigma_{23}=E\eta^{1-p}\sigma_{23}^*,\quad \sigma_{12}=E\eta^{2-p}\sigma_{12}^*\end{aligned}\tag{3.5}$$

Для рассматриваемого антисимметричного типа погранслоя υ_1, υ_2, σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{12} являются нечетными функциями относительно ζ, а υ_3, σ_{13}, σ_{23} – четными.

В данном случае асимптотически главной компонентой вектора перемещений является υ_3. Следовательно, третье уравнение системы (3.3) является главным уравнением, определяющим погранслой в окрестности фронта волны сдвига; пренебрегая асимптотически малыми членами, получаем его следующую форму:

$$-\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2\upsilon_1^*}{\partial x\partial\zeta}+\kappa^{-2}\frac{\partial^2\upsilon_3^*}{\partial\zeta^2}-2\frac{\partial^2\upsilon_3^*}{\partial x\partial t_2}-\frac{A'}{A}\frac{\partial\upsilon_3^*}{\partial x}=0 \tag{3.6}$$

Первое уравнение системы (3.3) служит для определения υ_1 через асимптотически главное перемещение υ_3. Оставляя в этом уравнении только асимптотически главные члены и интегрируя его по x, получаем

$$\partial\upsilon_1^*/\partial x-\partial\upsilon_3^*/\partial\zeta=0 \tag{3.7}$$

Подставляя выражение для υ_1^* через υ_3^* в уравнение (3.6), можно выписать подсистему, замкнутую относительно главных компонент НДС υ_3^*, σ_{13}^*:

$$\frac{\partial^2\upsilon_3^*}{\partial\zeta^2}-2\frac{\partial^2\upsilon_3^*}{\partial x\partial t_2}-\frac{A'}{A}\frac{\partial\upsilon_3^*}{\partial x}=0,\quad \sigma_{13}^*=-\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial\upsilon_3^*}{\partial x} \tag{3.8}$$

Рассмотрим подсистему, определяющую асимптотически второстепенные компоненты υ_1^*, υ_2^*, σ_{11}^*, σ_{22}^*, σ_{33}^*, σ_{23}^*, σ_{12}^* через асимптотически главную компоненту υ_3^*. Уравнение (3.7) является первым уравнением подсистемы. Второе уравнение системы (3.3) служит для определения υ_2^* через υ_3^*. Анализ показывает, что для построения второго уравнения рассматриваемой асимптотически оптимальной подсистемы не хватает точности уравнения (3.7). Уточнение уравнения (3.7) приводит к следующей его форме, записанной с асимптотической точностью $O(\eta^2)$:

$$\frac{1}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x \partial \zeta}\right)+\eta^2\left[\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial \zeta^2}-2\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x \partial t_2}-\kappa^{-2}\frac{A'}{A}\frac{\partial v_1^*}{\partial x}\right]=0 \qquad (3.9)$$

Тогда второе уравнение подсистемы запишем в виде

$$-\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \theta^*}\left(\frac{\partial v_1^*}{\partial x}-\frac{\partial v_3^*}{\partial \zeta}\right)+\eta^2\left[\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial \zeta^2}-2\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x \partial t_2}-\frac{A'}{A}\frac{\partial v_2^*}{\partial x}+\frac{3-4\nu}{1-2\nu}\frac{A'}{A^2}\frac{\partial v_1^*}{\partial \theta^*}\right]=0 \qquad (3.10)$$

Продифференцировав уравнения (3.10) по x, (3.9) по θ^*, сложив их, приходим к следующему уравнению для определения v_2^* через v_1^*, v_3^*:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial \zeta^2}-2\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x \partial t_2}-\frac{A'}{A}\frac{\partial v_2^*}{\partial x}\right)+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \theta^*}\left[\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial \zeta^2}-2\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x \partial t_2}\right]+\frac{A'}{A^2}\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x \partial \theta^*}=0$$

Таким образом, асимптотически оптимальная подсистема для определения асимптотически второстепенных составляющих имеет вид

$$\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x}-\frac{\partial v_3^*}{\partial \zeta}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial \zeta^2}-2\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x \partial t_2}-\frac{A'}{A}\frac{\partial v_2^*}{\partial x}\right)+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \theta^*}\left[\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial \zeta^2}-2\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x \partial t_2}\right]+\frac{A'}{A^2}\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x \partial \theta^*}=0$$

$$\sigma_{11}^*=-\frac{1}{(1+\nu)}\frac{\partial v_3^*}{\partial \zeta},\quad \sigma_{22}^*=\frac{\eta^2}{2(1+\nu)\kappa^2}\frac{A'}{A}v_1^*,\quad \sigma_{33}^*=\frac{1}{(1+\nu)}\frac{\partial v_3^*}{\partial \zeta}$$

$$\sigma_{23}^*=\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{1}{A}\frac{\partial v_3^*}{\partial \theta^*},\quad \sigma_{12}^*=\frac{1}{2(1+\nu)}\left[-\frac{\partial v_2^*}{\partial x}+\frac{1}{A}\frac{\partial v_1^*}{\partial \theta^*}\right]$$

Запишем системы разрешающих уравнений в исходной размерной форме относительно координат s, θ, α_3, t:

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha_3^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial s^2}+\frac{A'}{A}\frac{1}{R}\frac{\partial v_3}{\partial s}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}=0,\quad \sigma_{13}=\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial v_3}{\partial s}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial s}+\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3}=0,\quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial \alpha_3^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial s^2}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}-\frac{A'}{A}\frac{\partial v_2}{\partial s}\right)+$$

$$+\frac{1}{AR}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_3^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}\right)+\frac{A'}{A^2 R}\frac{\partial^2 v_1}{\partial s \partial \theta}=0 \qquad (3.11)$$

$$\sigma_{11}=-\frac{E}{(1+\nu)}\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3},\quad \sigma_{22}=\frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2}\frac{A'}{A}v_1,\quad \sigma_{33}=\frac{E}{(1+\nu)}\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3}$$

$$\sigma_{23}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{AR}\frac{\partial v_3}{\partial \theta}\right],\quad \sigma_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial v_2}{\partial s}+\frac{1}{AR}\frac{\partial v_1}{\partial \theta}\right]$$

где штрихом обозначена производная по s.

4. Области согласования погранслоя и коротковолнового высокочастотного приближения. Согласно [1, 2] квазиплоская задача теории упругости описывается уравнениями коротковолновых высокочастотных приближений с показателями изменяемости по продольной координате и динамичности, равными единице. При воздействиях вида **LT**, **LM** квазиплоская задача является соответственно квазисимметричной и квазиантисимметричной, но описывается одинаковыми асимптотически оптимальными уравнениями.

Коротковолновые высокочастотные колебания в рассматриваемом случае определяются следующей асимптотикой:

$$\begin{aligned} &v_1 = R\eta v_1^*, \quad v_2 = R\eta^{2-p} v_2^*, \quad v_3 = R\eta v_3^*, \quad \sigma_{ii} = E\sigma_{ii}^* \quad (i = 1, 2, 3) \\ &\sigma_{13} = E\sigma_{13}^*, \quad \sigma_{23} = E\eta^{1-p}\sigma_{23}^*, \quad \sigma_{12} = E\eta^{1-p}\sigma_{12}^* \end{aligned} \tag{4.1}$$

Введем безразмерные переменные:

$$\xi_h = \frac{s}{h}, \quad \tau_h = \frac{c_2 t}{h}, \quad \xi = \frac{\alpha_3}{h}, \quad \theta^* = \eta^{-p}\theta \tag{4.2}$$

и примем, что дифференцирование по ξ_h, τ_h не изменяет порядка неизвестных функций.

В рассуждениях удобно иметь дело с разрешающими уравнениями [2] в перемещениях, которые с требуемой асимптотической точностью запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial\xi_h\partial\zeta} + \frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial\xi_h^2} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial\tau_h^2} + \frac{\eta^{2-2p}}{A^2}\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial\theta^{*2}} + \\ &+ \frac{\eta}{\kappa^2}\frac{A'}{A}\frac{\partial v_1^*}{\partial\xi_h} + \frac{\eta^{2-2p}}{1-2\nu}\frac{1}{A}\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial\xi_h\partial\theta^*} = 0 \\ &\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial\xi_h^2} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial\tau_h^2} + \frac{\eta^{2-2p}}{\kappa^2}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial\theta^{*2}} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\theta^*}\left(\frac{\partial v_1^*}{\partial\xi_h} + \frac{\partial v_3^*}{\partial\zeta}\right) + \\ &+ \eta\left(\frac{A'}{A}\frac{\partial v_2^*}{\partial\xi_h} + \frac{3-4\nu}{1-2\nu}\frac{A'}{A^2}\frac{\partial v_1^*}{\partial\theta^*}\right) = 0 \\ &\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial\xi_h^2} + \frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial\tau_h^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial\xi_h\partial\zeta} + \\ &+ \eta^{2-2p}\left[\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{A}\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial\zeta\partial\theta^*} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial\theta^{*2}}\right] + \eta\frac{A'}{A}\left(\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial v_1^*}{\partial\zeta} + \frac{\partial v_3^*}{\partial\xi_h}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Асимптотическое описание поведения решения при приближении к фронту волны расширения $\xi_h = \kappa^{-1}\tau_h$ основывается на свойстве увеличения значения показателя изменяемости по продольной координате и показателя динамичности от значений $q = a = 1$, имеющих место на расстоянии от фронта порядка η или большем, до значений $q = a = 2$, имеющих место на расстоянии порядка $O(\eta^2)$, где решение описывается погранслоем. Для определения значения изменяемости решения для квазиплоской задачи в рассматриваемой переходной зоне $\eta^2 \lesssim \kappa^{-1}\tau_h - \xi_h \lesssim \eta$ введем координаты

$$x_0 = \eta\left(\frac{1}{\kappa}\tau_h - \xi_h\right) = \frac{c_1 t}{R} - \xi, \quad t_1 = \eta\frac{1}{\kappa}\tau_h = \frac{c_1 t}{R}, \quad \xi = \eta\xi_h \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.3), получаем следующую форму этих уравнений

$$-2\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_0 \partial t_1} - \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial t_1^2} + \eta^{-2}\kappa^2\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial \zeta^2} - \frac{\eta^{-1}}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_0 \partial \zeta} + \kappa^2\frac{\eta^{-2p}}{A^2}\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial \theta^{*2}} -$$

$$-\frac{A'}{A}\frac{\partial v_1^*}{\partial x_0} - \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\eta^{1-2p}}{A}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_0 \partial \theta^*} = 0$$

$$-\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_0^2} + \eta^{-2}\kappa^2\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial \zeta^2} - 2\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_0 \partial t_1} - \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial t_1^2} + \frac{\eta^{-2p}}{A^2}\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial \theta^{*2}} -$$

$$-\frac{\eta^{-1}}{2(1-\nu)}\frac{1}{A}\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_0 \partial \theta^*} + \frac{\eta^{-2}}{2(1-\nu)}\frac{1}{A}\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial \zeta \partial \theta^*} - \kappa^2\frac{A'}{A}\frac{\partial v_2^*}{\partial x_0} + \tag{4.5}$$

$$+\eta^{-1}\frac{(3-4\nu)}{2(1-\nu)}\frac{A'}{A^2}\frac{\partial v_1^*}{\partial x_0 \theta^*} = 0$$

$$-\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_0^2} + \eta^{-2}\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial t_1^2} - \frac{\eta^{-1}}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_0 \partial \zeta} - 2\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_0 \partial t_1} +$$

$$+\eta^{-2p}\left[\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{1}{A}\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial \zeta \partial \theta^*} + \frac{\kappa^2}{A^2}\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial \theta^{*2}}\right] + \frac{A'}{A}\left(\frac{\eta^{-1}}{2(1-\nu)}\frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta} - \kappa^2\frac{\partial v_3^*}{\partial x_0}\right) = 0$$

Обозначим показатель изменяемости по x_0 как $1 + r$ $(r \geq 0)$. Изменяемость НДС увеличивается при $x_0 \to 0$. В соответствии с этим изменяемость решения по ξ_h, τ_h увеличивается, когда эти переменные входят в x_0. Получим выражения для показателя изменяемости по t_1 и для показателей интенсивности компонент НДС.

Поскольку главный разрыв на фронте волны расширения имеет место для напряжения σ_{11}, то для производной от v_1, первое уравнение системы (4.5) является основным при определении рассматриваемого НДС в этой окрестности. Тогда асимптотически главным часть этого уравнения должна содержать производные от v_1 по $x_0 t_1$ и ζ^2. Из этого следует, что показатель изменяемости по t_1 должен быть равен $1 - r$. Третье уравнение системы (4.5) определяет соотношение между перемещениями v_1, v_3; перемещение v_3 имеет порядок $O(\eta^r)$ по сравнению с перемещением v_1. Второе уравнение системы (4.5) определяет интенсивность перемещения v_2, которое имеет порядок $O(\eta^r)$ по сравнению с v_1.

Выводы, касающиеся величин показателей изменяемости по переменным x_0, t_1, полностью согласуются с анализом решений уравнений теории упругости для плиты, полученных в [5]. Указанные решения представлены в виде рядов по функциям Бесселя

$$J_n\left[\frac{2}{\eta}\sqrt{a\xi(t_1-\xi)}\right] \tag{4.6}$$

где a – постоянная. Эти ряды были получены с помощью метода прифронтовой асимптотики разложением изображений решений (по Лапласу) в ряды по отрицательным степеням параметра преобразования.

При дифференцировании функций (4.6) по выражению $t_1 - \xi$ появляется множитель $1/(\eta\sqrt{t_1-\xi})$, а множитель $\sqrt{t_1-\xi}/\eta$ появляется при дифференцировании этих функций прямо по переменной ξ (когда переменная ξ не входит в выражение $t_1 - \xi$). Таким образом, показатель $1 + r$ и расстояние до фронта волны расширения связаны следующим выражением: $t_1 - \xi = O(\eta^{2r})$.

Выполним операцию растяжения масштаба для переменных x_0, t_1 и представим перемещения и напряжения, принимая во внимание их интенсивность

$$x_r = \frac{x_0}{\eta^{1+r}}, \quad t_r = \frac{t_1}{\eta^{1-r}}, \quad v_1^* = v_1^{**}, \quad v_2^* = \eta^r v_2^{**}, \quad v_3^* = \eta^r v_3^{**}$$

$$\sigma_{ii}^* = \eta^{-r}\sigma_{ii}^{**} \quad (i = 1, 2, 3) \quad \sigma_{12}^* = \sigma_{12}^*, \quad \sigma_{13}^* = \sigma_{13}^{**}, \quad \sigma_{23}^* = \eta^r \sigma_{23}^{**}$$

Чтобы построить решение, обладающее показателем изменяемости по продольной координате $1 + r$ с асимптотической погрешностью $O(\eta)$, разрешающие уравнения в исходных координатах s, θ, α_3, t должны иметь асимптотическую погрешность $O(\eta^{1+r})$. Следовательно, уравнения для асимптотически главных компонент v_1^{**}, σ_{11}^{**}, σ_{22}^{**}, σ_{33}^{**} имеют вид

$$-2\frac{\partial^2 v_1^{**}}{\partial x_r \partial t_r} + \frac{\partial^2 v_1^{**}}{\partial \zeta^2} - \eta^{1-r}\frac{A'}{A}\frac{\partial v_1^{**}}{\partial x_r} = 0, \quad \sigma_{11}^{**} = -\frac{1}{2(1+\nu)\kappa^2}\frac{\partial v_1^{**}}{\partial x_r}$$

$$\sigma_{22}^{**} = -\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial v_1^{**}}{\partial x_r}, \quad \sigma_{33}^{**} = -\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{\partial v_1^{**}}{\partial x_r}$$

а уравнения для асимптотически второстепенных компонент v_2^{**}, v_3^{**}, σ_{13}^{**} записываются следующим образом:

$$\frac{\partial v_1^{**}}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3^{**}}{\partial x_r} = 0, \quad \frac{\partial v_2^{**}}{\partial x_r} + \frac{1}{A}\frac{\partial v_1^{**}}{\partial \theta^*} = 0, \quad \sigma_{13}^{**} = \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial v_1^{**}}{\partial \zeta}$$

$$\sigma_{23}^{**} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial v_2^{**}}{\partial \zeta} + \frac{1}{A}\frac{\partial v_3^{**}}{\partial \theta^*}\right], \quad \sigma_{12}^{**} = \frac{1}{1+\nu}\frac{1}{A}\frac{\partial v_1^{**}}{\partial \theta^*}$$

В размерных исходных координатах рассматриваемые подсистемы примут форму, полностью совпадающую с уравнениями (3.2). Таким образом, уравнения квазиплоской задачи на границе области применимости уравнений погранслоя $O(\eta^2)$ $t_1 - \xi = O(\eta^2)$ совпадают с уравнениями погранслоя.

В случае воздействия типа NW коротковолновые высокочастотные колебаний описываются, как и в предыдущем случае, асимптотикой (4.1) и уравнениями (4.3). Вывод искомых приближений этих уравнений при стремлении к фронту волны сдвига основывается на свойстве увеличения показателей изменяемости и динамичности при стремлении продольной координаты к фронту волны сдвига: указанные показатели увеличивают свои значения от $q = a = 1$, имеющих место на расстоянии от фронта, большем или равным η, до значений $q = a = 2$, имеющих место на расстоянии порядка $O(\eta^2)$, где решение описывается погранслоем.

Вводя координаты

$$x_0 = \frac{c_2 t}{R} - \xi = \eta(\tau_h - \xi_h), \quad t_2 = \frac{c_2 t}{R}, \quad \zeta = \frac{1}{R\eta}\alpha_3$$

и проводя преобразования и рассуждения аналогичные тем, которые были проведены выше, получаем, что в области применимости уравнений погранслоя $t_2 - \xi = O(\eta^2)$ уравнения для квазиплоской задачи совпадают с уравнениями (3.11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во сарат. ун-та, 1986. 176 с.
2. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. London: Acad. Press, 1998. 226 p.
3. *Kaplunov J.D.* On the quasi-front in two-dimensional shell theories // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. II. 1991. T. 313. № 7. P. 731–736.
4. *Nigul U.* Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Intern. J. Solid and Structures. 1969. V. 5. № 6. P. 607–627.
5. *Нигул У.К.* О методах и результатах анализа переходных волновых процессов изгиба упругой плиты // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14. № 3. С. 345–385.

Саратов

Поступила в редакцию
1.06.2001