

УДК 539.3

© 2003 г. М.А. ИЛЬГАМОВ, Р.Г. ЯКУПОВ

## **СИЛЬНЫЙ ИЗГИБ ТРУБОПРОВОДА**

Исследуется сильный изгиб пролета трубопровода при подъеме внешней сосредоточенной силой. Учитываются собственные веса трубы и транспортируемой жидкости, силы, обусловленные давлением и скоростью движения жидкости, а также осевое перемещение в концевых сечениях трубопровода. Дается параметрический анализ, в частности, сравнение результатов по линейной и нелинейной теориям.

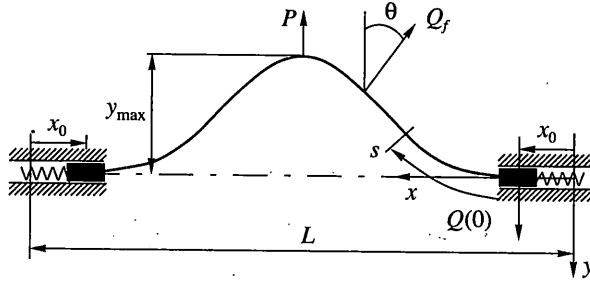
**1. Постановка задачи.** Трубопровод длиной  $L$ , радиусом срединной поверхности  $R$  и толщиной стенки  $h$  зашцеилен в двух опорах с возможностью перемещения в осевом направлении без трения (фиг. 1). Отношение  $R/L$  принимается малым по сравнению с единицей. Через трубопровод протекает жидкость удельным весом  $\gamma$  под давлением  $p$  и со скоростью  $V$ . Давление  $p$  поддерживается постоянным на уровне опорных устройств. К середине трубопровода прикладывается статическая сосредоточенная сила  $P$ , под действием которой происходит подъем пролета.

Рассматривается такой изгиб, когда возникают большие прогибы, но материал остается в пределах упругости. Величина горизонтального смещения в опоре зависит от внешней силы  $P$ , жесткости опорного устройства  $B$  и определяется в процессе решения. До приложения внешней силы трубопровод, провисающий между двумя опорами, деформирован под действием собственного веса и веса содержащейся в нем жидкости, прогибы направлены в сторону положительной оси  $Y$  (фиг. 1). После приложения внешней силы и по мере ее увеличения положение трубопровода приближается к горизонтальному, затем прогибы принимают отрицательные значения. Принимаем, что в концевых сечениях осевая сила на трубопровод со стороны жидкости отсутствует.

Приведенная постановка задачи представляет собой идеализацию статического состояния участка магистрального трубопровода с транспортируемой жидкостью в условиях проседания под ним грунта, карстовых образований на поверхности земли или оползней [1–3]. К провисающему участку трубопровода могут подводиться опорные устройства, производиться ремонтновосстановительные работы.

Теория сильного изгиба гибкого невесомого стержня сосредоточенными силами и моментами рассматривается во многих работах. Наиболее полное ее изложение содержится в монографиях [4, 5]. К самым последним исследованиям в этом направлении можно отнести работы [6, 7]. Статика и динамика трубопроводов и гибких шлангов с протекающей жидкостью изложена в [8]. В [9] приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований влияния внутреннего давления на изгиб трубы.

Для решения поставленной выше задачи применяется система уравнений относительно угла поворота сечения, эйлеровых координат точки упругой линии и внутренних силовых факторов. Эта система получена в предположении, что изгиб происходит в упругой области, упругая линия нерастяжима, поперечное сечение трубы не деформируется, остается плоским и перпендикулярным к упругой линии, протекающая жидкость идеальна и несжимаема [10, 11]. Учитывается изменение осевых сил, опорных реакций и гидростатического давления в зависимости от изгиба трубы.



Фиг. 1

Ниже используются безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{GL^3}{D}, & \varepsilon_\gamma &= \frac{\gamma FL^3}{D}, & \varepsilon_p &= \frac{pFL^2}{D}, & \varepsilon_V &= \frac{\rho V^2 FL^2}{D} \\ \varepsilon_p &= \frac{PL^2}{D}, & q_f &= \frac{Q_f L^3}{D}, & q &= \frac{QL^2}{D}, & t &= \frac{TL^2}{D}, & m &= \frac{ML}{D} \\ \beta &= \frac{BL^3}{D}, & s &= \frac{S}{L}, & x &= \frac{X}{L}, & y &= \frac{Y}{L} \end{aligned}$$

где  $G, D = \pi ER^3 h$  – вес трубы единичной длины и жесткость на изгиб;  $E$  – модуль упругости материала трубы;  $\rho, F$  – плотность и площадь поперечного сечения жидкости;  $Q, T, M$  – перерезывающая и продольная силы, изгибающий момент в поперечном сечении трубопровода;  $S$  – лагранжева координата;  $X, Y$  – эйлеровы координаты точки упругой линии.

Принимаем, что осевая сила на трубопровод со стороны опорного устройства в сечениях  $s = 0; 1$  равна  $t(0) = \beta x_0$ , где  $x_0$  – смещение конца трубопровода. Сила  $Q_f$  на трубопровод со стороны жидкости, обусловленная ее весом, давлением и скоростью движения, углом поворота и кривизной упругой линии, определяется по формуле

$$Q_f = \frac{D}{L^3} q_f, \quad q_f = -\varepsilon_\gamma \cos \theta + (\varepsilon_p + \varepsilon_V + \varepsilon_\gamma y) \left( \frac{d\theta}{ds} \right) \quad (1.1)$$

где  $\theta$  – угол между касательной к упругой линии трубопровода и горизонтальной осью.

Разрешающее уравнение задачи, учитывающее сосредоточенную силу, записывается в форме [10, 11]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{ds^2} &= [a - h(s)] \sin \theta + \left[ b - \varepsilon s + \varepsilon_p H \left( s - \frac{1}{2} \right) + g(s) \right] \cos \theta = 0 \\ H \left( s - \frac{1}{2} \right) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq 1/2 \\ 1, & 1/2 < s < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $a$  и  $b$  – константы, которые определяются из граничных условий с использованием выражений

$$\begin{aligned} a &= t \cos \theta + q \sin \theta + h(s) \\ b &= t \sin \theta - q \cos \theta - g(s) + \varepsilon s - \varepsilon_p H \left( s - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

а функции  $h(s)$  и  $g(s)$  – формулам

$$h(s) = \int_0^s q_f \sin \theta ds, \quad g(s) = \int_0^s q_f \cos \theta ds \quad (1.4)$$

Связь между безразмерными лагранжевыми и эйлеровыми координатами записывается в форме

$$x = \int_0^s \cos \theta ds + c, \quad y = \int_0^s \sin \theta ds + d \quad (1.5)$$

где  $c$  и  $d$  – постоянные интегрирования, определяемые из кинематических граничных условий. Используя соотношения (1.5), можно построить форму упругой линии трубопровода.

Приведенные уравнения могут быть использованы для решения задач сколь угодно сильного изгиба прямолинейного гибкого трубопровода в одной плоскости, когда перемещения сравнимы с длиной упругой линии. При известном угле поворота сечения трубопровода безразмерный изгибающий момент, поперечная и продольная силы определяются по формулам

$$m = d\theta/ds, \quad q(s) = d^2\theta/ds^2 \quad (1.6)$$

$$t(s) = [a - h(s)] \cos \theta + [b - \varepsilon s + \varepsilon_p H(s - 1/2) + g(s)] \sin \theta$$

Граничные условия задачи одинаковы на обоих концах

$$\theta = 0, \quad y = 0, \quad t = \beta x_0 \quad (s = 0; 1) \quad (1.7)$$

В случае малых углов поворота сечения по сравнению с единицей ( $\theta \ll 1$ ), принимая  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\sin \theta \approx \theta \approx dw/dx$ , из (1.5) находим  $x = s + c$ ,  $y = w + d$  ( $w$  – прогиб). Если исключить перемещение трубопровода как твердого тела, то координаты  $x$  и  $s$ , прогиб  $w$  и  $y$  совпадают. Во всех соотношениях сохраняются только слагаемые, содержащие  $\theta$  в первой степени. С помощью (1.1) и (1.4) из (1.2) получаем линейное уравнение изгиба горизонтально расположенного прямолинейного стержня

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} - (a - \varepsilon_p - \varepsilon_\gamma)\theta = -b + (\varepsilon + \varepsilon_\gamma)s - \varepsilon_p H\left(s - \frac{1}{2}\right) \quad (1.8)$$

**2. Метод решения.** Приведенная выше система нелинейных уравнений не имеет решения в замкнутой форме. Поэтому определим ее приближенное решение с помощью метода Бубнова–Галеркина. В последующем задаем функцию  $\theta(s)$  в виде

$$\theta = \theta_0 \sin 2\pi s + \theta_1 \sin 4\pi s + \dots \quad (2.1)$$

удовлетворяющем условиям (1.7) относительно  $\theta$ , и используем разложения

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3, \quad \cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \quad (2.2)$$

Такое приближение удовлетворительно при значениях прогибов и углов поворота, характерных при подъемных работах с трубопроводными системами [2].

Подставляя разложения (2.2) и функцию (2.1) в формулы (1.5), после интегрирования имеем

$$x = s - \frac{\theta_0^2}{4} \left( s - \frac{1}{4\pi} \sin 4\pi s + \frac{1}{2} \right) - \frac{\theta_0 \theta_1}{3\pi} \sin^3 2\pi s + c \quad (2.3)$$

$$y = \frac{\theta_0}{2\pi} (1 - \cos 2\pi s) + \frac{\theta_1}{2\pi} \sin^2 2\pi s - \frac{\theta_0^2 \theta_1}{8\pi} \sin^4 2\pi s + \frac{\theta_0^3}{12\pi} \left( \cos 2\pi s - \frac{1}{3} \cos^3 2\pi s - \frac{2}{3} \right) + d \quad (2.4)$$

В выражениях (2.3), (2.4) и в последующем в соотношениях слагаемые, содержащие  $\theta_0$  в степени выше третьей и  $\theta_1$  в степени выше первой, отбрасываем, но оставляем слагаемые, содержащие произведения  $\theta_0\theta_1$  и  $\theta_0^2\theta_1$ .

Вследствие симметричности задачи  $x(s=1) = 1 - x_0$ , где  $x_0 = x(0)$ . Тогда с помощью граничных условий (1.7) из (2.3) и (2.4) находим  $c = x_0 = \theta_0^2/8$ ,  $d = 0$ . В частности горизонтальное смещение трубы в опорах и прогиб под силой  $P$  в принятом приближении равны

$$x_{\max} = x_0 = \frac{\theta_0^2}{8}, \quad y\left(s = \frac{1}{2}\right) = \frac{\theta_0}{\pi}\left(1 - \frac{\theta_0^2}{9}\right) \quad (2.5)$$

Должно соблюдаться неравенство  $\varepsilon_p + \varepsilon_\gamma(s = 1/2) > 0$ , которое означает положительность давления в жидкости.

Обозначим опорную реакцию по оси  $y$  в сечении  $s = 0$  через  $Q(0)$ . Ее определяем, проектируя на вертикальную ось силы, действующие на половину длины трубопровода. Имеем

$$Q(0) = \frac{P}{2} - \frac{GL}{2} + \int_0^{L/2} Q_f \cos \theta ds$$

С помощью разложения (2.2) и функции (2.1) производим интегрирование и после приведения к безразмерной форме получаем

$$q(0) = Q(0)L^2/D = \varepsilon_p/2 - (\varepsilon + \varepsilon_\gamma)/2 \quad (2.6)$$

Выражения (1.4) для функций  $g$  и  $h$  имеют вид

$$\begin{aligned} g(s) = & -\varepsilon_\gamma s + \frac{\varepsilon_\gamma \theta_0^2}{2\pi} \left( \sin 2\pi s - \frac{1}{2} \sin 4\pi s \right) + \frac{\varepsilon_\gamma \theta_0 \theta_1}{2\pi} \left( \frac{1}{4} \sin 2\pi s + \sin 4\pi s - \frac{3}{4} \sin 6\pi s \right) + \\ & + (\varepsilon_p + \varepsilon_\gamma) \left( \theta_0 \sin 2\pi s + \theta_1 \sin 4\pi s - \frac{\theta_0^3}{6} \sin^3 2\pi s - \frac{\theta_0^2 \theta_1}{2} \sin^2 2\pi s \sin 4\pi s \right) \\ h(s) = & \frac{\varepsilon_\gamma \theta_0}{2\pi} (\cos 2\pi s - 1) - \frac{\varepsilon_\gamma \theta_1}{2\pi} \sin^2 2\pi s + \\ & + \frac{\varepsilon_\gamma \theta_0^2 \theta_1}{2\pi} \left( \cos 2\pi s + \frac{1}{4} \cos 4\pi s - \cos 6\pi s + \frac{7}{16} \cos 8\pi s + 2 \sin^4 2\pi s - \frac{11}{16} \right) + \\ & + \varepsilon_\gamma \theta_0^3 \left( \frac{1}{18\pi} - \frac{1}{3\pi} \cos 2\pi s + \frac{1}{4\pi} \sin^2 2\pi s + \frac{5}{18\pi} \cos^3 2\pi s \right) + \\ & + (\varepsilon_p + \varepsilon_\gamma) \left( \frac{\theta_0^2}{2} \sin^2 2\pi s + 2\theta_0 \theta_1 \sin^2 2\pi s \cos 2\pi s \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Используя граничные условия (1.7), соотношения (2.6) и (2.7), из выражений (1.3) находим с принятой точностью

$$a = t(0) = \beta x_0 = \frac{1}{8} \beta \theta_0^2, \quad b = -q(0) = \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon_\gamma - \varepsilon_p) \quad (2.8)$$

Применим к уравнению (1.2) процедуру Бубнова–Галеркина с учетом (2.1), (2.2), (2.7), (2.8). В силу симметрии задачи интегрирование производим в пределах половины

длины трубопровода  $0 \leq s \leq 1/2$  (в уравнении (1.2) функция  $H = 0$ ). В результате приходим к системе алгебраических уравнений для  $\theta_0$  и  $\theta_1$ :

$$\alpha_1 \theta_0^3 + \alpha_2 \theta_0^2 + \frac{3}{16}(\varepsilon + \varepsilon_\gamma) \theta_0 \theta_1 + \alpha_3 \theta_0 + \alpha_4 = 0 \quad (2.9)$$

$$\theta_1 = \frac{\varepsilon + \varepsilon_\gamma}{32\pi^3 + (\pi/4)\beta\theta_0^2 - 2\pi(\varepsilon_p + \varepsilon_\nu)(1 - \theta_0^2/4) - \frac{16}{15}\alpha_4\theta_0} \quad (2.10)$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{8}(\beta + \varepsilon_p + \varepsilon_\nu), \quad \alpha_2 = -\frac{1}{3}(2\varepsilon_p - \varepsilon - \varepsilon_\gamma)$$

$$\alpha_3 = \pi(4\pi^2 - \varepsilon_p - \varepsilon_\nu), \quad \alpha_4 = 2\varepsilon_p - \varepsilon - \varepsilon_\gamma$$

Для трубопровода, не содержащего жидкость, в выражениях (2.6)–(2.10) следует принять  $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_p = \varepsilon_\nu = 0$ . Из (2.9) и (2.10) в линейной задаче имеем

$$\theta_0 = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = -\frac{2\varepsilon_p - \varepsilon - \varepsilon_\gamma}{\pi(4\pi^2 - \varepsilon_p - \varepsilon_\nu)}, \quad \theta_1 = \frac{\varepsilon + \varepsilon_\gamma}{2\pi(16\pi^2 - \varepsilon_p - \varepsilon_\nu)} \quad (2.11)$$

Рассмотрим отношение  $\theta_1/\theta_0$  в случае  $\varepsilon_p + \varepsilon_\nu = 0$ . Из (2.11) находим

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{1}{8[1 - 2\varepsilon_p/(\varepsilon + \varepsilon_\gamma)]}$$

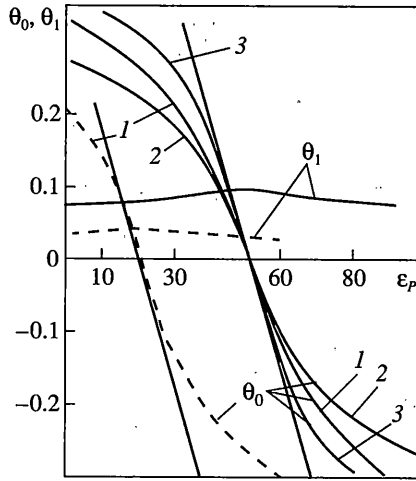
Отсюда следует, что, если  $2\varepsilon_p/(\varepsilon + \varepsilon_\gamma) \ll 1$ , то  $\theta_1/\theta_0 \approx 0.125$ . В случае  $2\varepsilon_p/(\varepsilon + \varepsilon_\gamma) \gg 1$  отношение  $|\theta_1/\theta_0| \approx (\varepsilon + \varepsilon_\gamma)/(16\varepsilon_p)$  также мало по сравнению с единицей. Первое неравенство удовлетворяется, когда трубопровод провисает между двумя опорами, деформирован под действием собственного веса и веса содержащейся в нем жидкости. Второе неравенство имеет место, когда он занимает положение выше горизонтальной оси после приложения внешней силы. Случай, когда отношение  $2\varepsilon_p/(\varepsilon + \varepsilon_\gamma)$  близко к единице, не рассматривается. Из первого выражения (2.11) следует, что в случае линейной задачи с приближением значения суммы  $\varepsilon_p + \varepsilon_\nu$  к величине  $4\pi^2$  угол  $\theta_0$  стремится к бесконечности. Принимая  $\varepsilon_p + \varepsilon_\nu = 4\pi^2$  и переходя к размерным величинам, запишем

$$p + \rho V^2 = 4\pi^2 D/(FL^2) \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) представляет собой критическое значение комбинации давления  $p$  и скорости течения  $V$  жидкости [12]. Это известная особенность линейной задачи.

Продольную силу определяем по формуле (1.6) с учетом (2.2), (2.7), (2.8):

$$\begin{aligned} t(s) = & \frac{\varepsilon_\gamma \theta_0}{2\pi}(1 - \cos 2\pi s) + \frac{\varepsilon_\gamma \theta_1}{2\pi} \sin^2 \pi s \left(1 + \frac{\theta_0^2}{4} \sin^2 2\pi s\right) + \frac{\beta \theta_0^2}{8} + \\ & + \theta_0 \theta_1 \left[2(\varepsilon_p + \varepsilon_\nu) \sin^2 2\pi s \cos 2\pi s - \frac{\varepsilon_\gamma}{4\pi} \sin^4 2\pi s\right] + \\ & + \frac{\theta_0^2}{2}(\varepsilon_p + \varepsilon_\nu) \sin^2 2\pi s + \left[(\varepsilon + \varepsilon_\gamma) \left(\frac{1}{2} - s\right) - \frac{\varepsilon_p}{2}\right] \times \\ & \times \left(\theta_0 \sin^2 2\pi s + \theta_1 \sin 4\pi s - \theta_0^2 \theta_1 \sin^3 2\pi s \cos 2\pi s - \frac{\theta_0^3}{6} \sin^3 2\pi s\right) - \\ & - \frac{\varepsilon_\gamma \theta_0^3}{6\pi} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cos 2\pi s + \frac{1}{6} \cos^3 2\pi s\right) \quad (0 \leq s \leq 1/2) \end{aligned}$$



Фиг. 2

**3. Численный пример.** Определим деформации стальной трубы, имеющей наружный диаметр и толщину стенки соответственно 10.2 см и 0.2 см [1]. Модуль упругости материала трубы  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, предел текучести  $\sigma_T = 340$  МПа. Принимаем, что расстояние между опорами  $L = 50$  м, по трубе течет жидкость плотностью  $\rho = 98.1$  кг/м<sup>3</sup> под давлением  $p$ . Давление  $p$  и скорость  $V$  приняты  $p = 0.15$  МПа,  $V = 3$  м/с, безразмерные значения жесткости опорного устройства принимаем равными  $\beta = 4000$  и  $8000$ .

Значения  $\theta_0$  и  $\theta_1$  определены из совместного численного решения уравнений (2.9) и (2.10). Графики  $\theta_0$  и  $\theta_1$  [рад] приведены на фиг. 2, где сплошные кривые относятся к случаю трубы с жидкостью, штриховые кривые – без жидкости. Кривые, отмеченные цифрой 1, соответствуют значению  $\beta = 4000$ , цифрой 2 – значению  $\beta = 8000$ . Наклонные тонкие прямые линии представляют графики  $\theta_0$  из решения линейной задачи. Из (2.11) видно, что в линейной задаче величина  $\theta_1$  от внешней силы непосредственно не зависит.

Напряжения в трубопроводе достигают предела текучести при условии

$$\left| \frac{t(s)}{2L} \right| + \left| \frac{m(s)}{R} \right| \leq \frac{\sigma_T L}{ER^2} \quad (3.1)$$

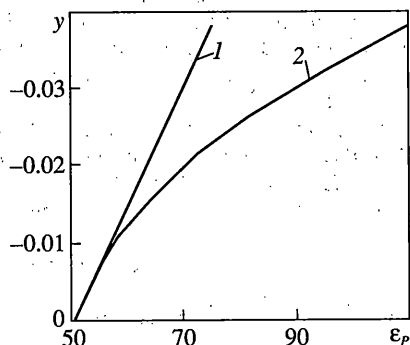
После подстановки в (3.1) значений  $t$  и  $m$  в сечениях  $s = 0$  и  $s = 0.5$  имеем

$$\theta_0^2 + \frac{32\pi L}{\beta R} \theta_0 + \frac{64\pi L}{\beta R} \theta_1 \leq \frac{16L^2 \sigma_T}{\beta ER^2}, \quad (3.2)$$

$$\left( \frac{\epsilon_\gamma}{\pi} + \frac{4\pi L}{R} \right) \theta_0 + \frac{\beta}{8} \theta_0^2 - \frac{\epsilon_\gamma}{9\pi} \theta_0^3 + \left( \frac{\epsilon_\gamma}{2\pi} - \frac{8\pi L}{R} \right) \theta_1 < \frac{2\sigma_T L^2}{ER^2} \quad (3.3)$$

Предельные значения углов поворота  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  подчиняются условиям (3.2) и (3.3).

Из приведенных на фиг. 2 данных следует, что линейная теория дает приемлемые результаты лишь в узком диапазоне изменения прогиба трубопровода около горизонтального положения. При увеличении отклонения трубы от горизонтального положения линейная теория дает завышенные значения  $\theta_0$ . Погрешности линейной теории



Фиг. 3

зависят от безразмерных параметров внешней силы  $\epsilon_p$  и жесткости опорного устройства  $\beta$ .

Кривая 3 построена при давлении в трубе  $p = 0.15$  МПа. Сравнивая сплошные кривые 1 и 3 видим, что с увеличением внутреннего давления при постоянной внешней нагрузке  $\epsilon_p$  угол  $\theta_0$  возрастает. Влияние давления жидкости на изгиб равносильно действию продольной сжимающей силы  $pF$  и изгибающего момента  $pFY$ , стремящегося увеличить кривизну трубопровода. Явление выпучивания трубки под внутренним давлением изучено также экспериментально [9]. Наибольшее влияние на изгиб оказывает давление  $p$  в случае абсолютно податливых опор ( $\beta = 0$ ). Если принять жесткость опор  $\beta = 4000$ , давление  $\epsilon_p = 18.7$  и внешнюю силу  $\epsilon_p = 20$ , то значение угла  $\theta_0$  возрастает на 35%.

Коэффициенты  $\epsilon_p$  и  $\epsilon_v$ , характеризующие давление и скорость течения жидкости, содержатся в расчетных соотношениях в виде суммы  $\epsilon_p + \epsilon_v$ . Численное значение коэффициента  $\epsilon_v$  при скорости 3М/с и давлении  $p = 0.15$  МПа на порядок меньше коэффициента  $\epsilon_p$ . Поэтому влияние течения жидкости со скоростью 3М/с на напряженное и деформированное состояние мало. Критическое значение комбинации давления и скорости течения жидкости  $p + \rho V^2$  для трубы по формуле (2.12) равно 0.32 МПа.

На фиг. 3 приведены графики изменения прогиба посередине пролета при  $\beta = 4000$  в зависимости от внешней силы  $\epsilon_p$ . Прямая линия 1 соответствует линейной теории, кривая линия 2 — нелинейной. Как видно, начиная с  $\epsilon_p > 60$  линейная теория дает значительное отличие по величине прогиба.

**Заключение.** Результаты расчетов могут быть использованы при проектировании новых технологий прокладки и ремонта магистральных трубопроводов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-97911).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочное руководство по нефтепромысловым трубам / И.С. Пивоваров, А.Е. Сараян, М.Д. Седюк и др. М.: Недра, 1967. 576с.
2. Айнбиндер А.Б., Камерштейн А.Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. М.: Недра, 1982, 342 с.
3. Шаммазов А.М., Чечелов В.А., Зарипов Р.М., Коробков Г.Е. Расчет магистральных трубопроводов в карстовой зоне. Уфа: Гилем, 1999, 213 с.
4. Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. М.; Л.: Наука, 1948. 170 с.
5. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.

6. Jounis C.J., Panayotounakos D.E. Elastica of an axially loaded column/footing system resting on elastic base // Int. J. Nonlinear Mech. 1993. V. 28. № 6. P. 737–751.
7. Астапов Н.С., Корнев В.М. Выпучивание эксцентрично сжатого упругого стержня // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 2. С. 162–169.
8. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
9. Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.N. Buckling and postbuckling behaviour of a pipe subjected to internal pressure // J. Appl. Mech. 1995. V. 62. P. 595–600.
10. Ильгамов М.А. Уравнения сильного изгиба сверхпроводящего кабеля // Докл. АН. 1996. Т. 348. № 6. С. 764–767.
11. Ilgamov M.A., Ratrouf R.A. Large deflection of superconducting cable // Int. J. Nonlinear Mech. 1999. V. 34. P. 869–880.
12. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 184 с.

Уфа

Поступила в редакцию  
19.01.2000