**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2003**

УДК 539.3

© 2003 г. Н.Н. ШАВЛАКАДЗЕ

ИЗГИБ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Контактные задачи взаимодействия упругих изотропных пластин с тонкими упругими элементами, в виде стрингеров и включений, а также связанные с ними библиографические справки изложены в монографиях [1, 2]. Тангенциальные контактные напряжения как постоянного, так и эллиптического закона изменения поперечного сечения накладки вблизи ее концов имеют особенность порядка квадратного корня [3]. Для упругого изотропного клина, подкрепленного на конечном участке стержнем, площадь поперечного сечения которого изменяется по линейному закону, построено решение в [4], доказывается, что контактное напряжение вблизи тонкого конца накладки имеет особенность порядка меньше 1/2. А в случае параболического закона изменения поперечного сечения накладки контактное напряжение вблизи ее тонкого конца становится ограниченным [5].

Контактные задачи об изгибе изотропных пластин, подкрепленных тонкими включениями (жесткими или упругими) рассмотрены в работах [6, 7]. Эти задачи сводятся к интегральным уравнениям со специальной характеристической частью, решения которых ищутся в классе неинтегрируемых функций.

Контактные задачи для конечных или бесконечных пластин с упругими накладками переменной толщины (переменной изгибной жесткости) исследованы в [8–10]; относительно неизвестных контактных напряжений получено интегро-дифференциальное уравнение, характеристической частью которого является интегро-дифференциальное уравнение типа Прандтля. Это уравнение в некоторых условиях изучено в [11, 12], но когда коэффициент при сингулярном операторе обращается в нуль любого порядка в концах линии интегрирования, уравнение качественно изменяется, в частности, оно эквивалентно сводится к сингулярному интегральному уравнению третьего рода.

Рассмотрим упругую анизотропную пластинку под действием изгибающих моментов на бесконечности $M_x^\infty = M$, $M_y^\infty = 0$. По линии $y = 0$, $0 < x < 1$ она подкреплена тонким упругим включением переменной изгибной жесткости $D_0(x)$. Требуется найти контактные усилия взаимодействия включения с пластинкой.

Наличие подкрепляющего включения вызывает скачок обобщенной поперечной силы N_y в пластинке. Используя обозначение $\langle f\rangle = f(x, -0) - f(x, +0)$, имеем

$$\langle W\rangle = \langle W'_y\rangle = \langle M_y\rangle = 0, \quad \langle N_y\rangle = \mu(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

здесь W – прогиб пластинки; M'_y, M_y, N_y – соответственно угол поворота, изгибающий момент и обобщенная поперечная сила в пластинке; $\mu(x)$ – неизвестное контактное усилие взаимодействия включения с пластинкой, причем $\mu(x) = 0$ при $x \notin (0, 1)$ и удовлетворяет условиям равновесия включения

$$\int_0^1 \mu(t)dt = 0, \quad \int_0^1 t\mu(t)dt = -M_1 + M_2 \tag{2}$$

где M_1 и M_2 – неизвестные моменты на концевых сечениях $x = 0$ и $x = 1$ соответственно.

Относительно прогиба включения $\omega_0(x)$ получается следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}D_0(x)\frac{d^2}{dx^2}\omega_0(x) = -\mu(x), \quad 0 < x < 1 \\ &D_0(x)\omega_0''(x)\Big|_{x=0} = M_1, \quad D_0(x)\omega_0''(x)\big|_{x=1} = M_2 \\ &D_0(x)\omega_0''(x)\big|'_{x=0} = 0, \quad D_0(x)\omega_0''(x)\big|'_{x=1} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

где $D_0(x) = E_0(x)h_0^3(x)/12$ – жесткость включения на изгиб, $h_0(x)$ – толщина, а $E_0(x)$ – модуль Юнга материала включения.

Как известно, [13], напряженное состояние тонкой анизотропной пластинки определяется прогибом средней плоскости $W(x, y)$, который удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$D_{11}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 W}{\partial x^3\partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 W}{\partial x\partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \tag{4}$$

Осуществляя условие контакта включения с пластинкой

$$W(x, 0) = \omega_0(x) \tag{5}$$

решение краевой задачи (1)–(5) будем искать в классе функций $W(x, y)$, имеющих вторые производные, ведущих себя как $r^{-1/2}$ при приближении к точкам (0, 0) и (1, 0) и ограниченных на бесконечности.

Общее выражение для функции $W(x, y)$ зависит от корней μ_1, μ_2, $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ соответствующего характеристического уравнения

$$W = 2\mathrm{Re}[W_1(z_1) + W_2(z_2)], \quad (\mu_1 \neq \mu_2) \tag{6}$$

где $W_1(z_1)$ и $W_2(z_2)$ – произвольные аналитические функции комплексных переменных $z_1 = x + \mu_1 y$, $z_2 = x + \mu_2 y$; μ_1 и μ_2 – комплексные или чисто мнимые постоянные $\mu_1 = \alpha + i\beta$, $\mu_2 = i\delta$.

Общие выражения для моментов и перерезывающих сил (при $\mu_1 \neq \mu_2$) имеют вид

$$\begin{aligned} &M_x = -2\mathrm{Re}[p_1 W_1''(z_1) + p_2 W_2''(z_2)] \\ &M_y = -2\mathrm{Re}[q_1 W_1''(z_1) + q_2 W_2''(z_2)] \\ &M_{xy} = -2\mathrm{Re}[r_1 W_1''(z_1) + r_2 W_2''(z_2)] \\ &N_x = -2\mathrm{Re}[\mu_1 s_1 W_1'''(z_1) + \mu_2 s_2 W_2'''(z_2)] \\ &N_y = -2\mathrm{Re}[s_1 W_1'''(z_1) + s_2 W_2'''(z_2)] \\ &p_i = D_{11} + D_{12}\mu_i^2 + 2D_{16}\mu_i, \quad q_i = D_{12} + D_{22}\mu_i^2 + 2D_{26}\mu_i, \quad r_i = D_{16} + D_{26}\mu_i^2 + 2D_{66}\mu_i \\ &s_i = \frac{D_{11}}{\mu_i} + 3D_{16} + (D_{12} + 2D_{66})\mu_i + D_{26}\mu_i^2, \quad s_i - r_i = \frac{p_i}{\mu_i}, \quad s_i + r_i = -q_i\mu_i \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{7}$$

Функции $W_1'(z_1)$ и $W_2'(z_2)$, для пластинки с отверстием, когда усилия, распределенные по краям отверстия, уравновешиваются, в окрестности бесконечно удаленной точки имеют вид

$$W_1'(z_1) + Bz_1 + \overset{\circ}{W}{}_1'(z_1), \quad W_2'(z_2) = (B' + iC')z_2 + \overset{\circ}{W}{}_2'(z_2) \tag{8}$$

где $\overset{\circ}{W}_1(z_1)$, $\overset{\circ}{W}_2(z_2)$ – функции, голоморфные вне отверстия, включая бесконечно удаленную точку. В силу формулы (6), (7) условия (1) дают

$$\begin{aligned}
&\langle W_1'(x) + W_2'(x) + \overline{W_1'(x)} + \overline{W_2'(x)}\rangle = 0\\
&\langle \mu_1 W_1'(x) + \mu_2 W_2'(x) + \bar{\mu}_1\overline{W_1'(x)} + \bar{\mu}_2\overline{W_2'(x)}\rangle = 0\\
&\langle q_1 W_1''(x) + q_2 W_2''(x) + \bar{q}_1\overline{W_1''(x)} + \bar{q}_2\overline{W_2''(x)}\rangle = 0\\
&\langle s_1 W_1'''(x) + s_2 W_2'''(x) + \bar{s}_1\overline{W_1'''(x)} + \bar{s}_2\overline{W_2'''(x)}\rangle = \mu(x), \quad 0 < x < 1
\end{aligned} \tag{9}$$

Продифференцировав первое и второе равенство два раза, а третье – один раз, относительно скачков $\langle W_1'''(x)\rangle$, $\langle W_2'''(x)\rangle$, $\langle \overline{W_1'''(x)}\rangle$, $\langle \overline{W_2'''(x)}\rangle$, получается система алгебраических уравнений.

Если детерминант этой системы отличен от нуля, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ \mu_1 & \mu_2 & \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2\\ q_1 & q_2 & \bar{q}_1 & \bar{q}_2\\ s_1 & s_2 & \bar{s}_1 & \bar{s}_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

то получим следующие краевые условия:

$$\begin{aligned}
&[W_1'''(x)]^- = [W_1'''(x)]^+ = -\frac{\Delta_1}{\Delta}\mu(x)\\
&[W_2'''(x)]^- = [W_2'''(x)]^+ = -\frac{\Delta_2}{\Delta}\mu(x), \quad 0 < x < 1
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ \mu_2 & \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2\\ q_2 & \bar{q}_1 & \bar{q}_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ \mu_1 & \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2\\ q_1 & \bar{q}_1 & \bar{q}_2 \end{vmatrix}$$

где $[W_i'''(x)]^{\pm}$ – граничные значения аналитических функций $W_i'''(z_i)$ ($i = 1, 2$) из верхней и нижней полуплоскости соответственно.

Функция $\mu(x)$ может иметь неинтегрируемые особенности на сегменте [0, 1], учитывая проведенные в [7] доказательства о перенесении результатов монографии [14] на регуляризованные значения расходящихся интегралов [15]; Поскольку $W_1'''(\infty) = 0$, $W_2'''(\infty) = 0$, то решения граничных задач (10) представляются в виде

$$W_1'''(z_1) = \frac{\Delta_1}{2\pi i\Delta}\int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{t - z_1}, \quad W_2'''(z_2) = -\frac{\Delta_2}{2\pi i\Delta}\int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{t - z_2}$$

где z_1 и z_2 – комплексные переменные, изменяющиеся соответственно в областях S_1 и S_2 (см. [13]), разрезанных вдоль отрезка (0, 1).

В силу формул (8), функции $W_1''(z_1)$ и $W_2''(z_2)$ имеют вид

$$\begin{aligned} W_1''(z_1) &= -\frac{\Delta_1}{2\pi i\Delta}\int_0^1 \ln|t-z_1|\mu(t)dt + B \\ W_2''(z_2) &= -\frac{\Delta_2}{2\pi i\Delta}\int_0^1 \ln|t-z_2|\mu(t)dt + (B'+iC') \end{aligned} \tag{11}$$

Постоянные B, B' и C' определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} &(p_1+\bar{p}_1)B + p_2B_1 + \bar{p}_2\bar{B}_1 = -M \\ &(q_1+\bar{q}_1)B + q_2B_1 + \bar{q}_2\bar{B}_1 = 0 \\ &(r_1+\bar{r}_1)B + r_2B_1 + \bar{r}_2\bar{B}_1 = 0, \quad B_1 = B'+iC' \end{aligned}$$

Осуществляя условие контакта (5) включения с пластинкой и имея в виду, что

$$\partial^2 W(x,0)/\partial x^2 = 2\mathrm{Re}[W_1''(x) + W_2''(x)]$$

с учетом (11), условие (3) будет иметь вид

$$\frac{d^2}{dx^2}D_0(x)\left[\frac{\lambda_0}{\pi}\int_0^1 \ln|t-x|\mu(t)dt + B + B'\right] = -\mu(x), \quad 0<x<1$$

$$\lambda_0 = \mathrm{Im}\frac{\Delta_1-\Delta_2}{\Delta}$$

Интегрируя последнее уравнение два раза и вводя обозначение

$$\lambda(x) = -\int_0^x dt\int_0^t \mu(t)dt$$

приходим к уравнению

$$\lambda(x) - \frac{\lambda_0}{\pi}D_0(x)\int_0^1 \frac{\lambda'(t)dt}{t-x} = -(B+B')D_0(x), \quad 0<x<1 \tag{12}$$

при условии

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda(1) = -M_1 + M_2, \quad \lambda'(0) = \lambda'(1) = 0 \tag{13}$$

Моменты M_1 и M_2 на концевых сечениях включения определяются из следующих соотношений

$$M_1 = \int_{-h_0(0)/2}^{h_0(0)/2} M_x(0,y)dy, \quad M_2 = \int_{-h_0(1)/2}^{h_0(1)/2} M_x(1,y)dy, \tag{14}$$

В работе [10] доказана теорема, из которого следует справедливость следующей теоремы.

Теорема: если в задаче (1)–(5) изгибная жесткость включения изменяется законом $D_0(x) = x^{\alpha}b(x)$ ($b(x) > 0$, $\alpha > 0$, $0 \le x \le 1$), то контактное усилие взаимодействия включения с пластинкой в окрестности точки $x = 0$ имеет следующее поведение

$$\langle N_y \rangle \equiv \mu(x) = \begin{cases} O(x^{-3/2}) \text{ при } 0 \le \alpha < 1 \\ O(x^{-2+\delta_0}) \text{ при } \alpha = 1, \quad \delta_0 > 1/2 \\ O(x^{-1}) \text{ при } 1 < \alpha \le 2 \\ O(x^{\alpha-3}) \text{ при } \alpha > 2 \end{cases}$$

Пусть изгибная жесткость включения изменяется законом: $D_0(x) = D_0x^2$, $D_0 = \text{const}$, $0 < x < 1$. Производя замену переменных

$$x = \frac{1}{1+e^{\xi}}, \quad t = \frac{1}{e^{\zeta}+1}, \quad \lambda(x) = \lambda\left(\frac{1}{1+e^{\xi}}\right) = \psi(\xi) = \lambda_0(e^{\xi}) \tag{15}$$

уравнение (12, 13) принимает вид

$$\begin{gathered} e^{\xi}\psi(\xi) + \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi'(\zeta)d\zeta}{1-e^{\zeta-\xi}} = \tilde{M}_1\frac{e^{\xi}}{1+e^{\xi}} - \tilde{M}_2\frac{e^{\xi}}{(1+e^{\xi})^2}, \quad -\infty < \xi < \infty \\ \psi(-\infty) = M_2 - M_1, \quad \psi(\infty) = 0 \\ \lambda = \lambda_0 D_0, \quad \tilde{M}_1 = \frac{\lambda(M_1 - M_2)}{\pi}, \quad \tilde{M}_2 = (B + B')D_0 \end{gathered} \tag{16}$$

Произведем преобразование Фурье обеих частей уравнения (16), где в качестве параметра рассмотрим комплексную переменную $s = s_0 - i\varepsilon$ (ε – сколь угодно малое положительное число). После некоторых преобразований уравнение сводится к условию задачи типа Карлемана для полосы

$$\begin{gathered} \Psi(s-i) + \lambda s\,\mathrm{cth}\,\pi s\,\Psi(s) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{M}_2\frac{s}{\mathrm{sh}\,\pi s} + \tilde{M}_1 i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\mathrm{sh}\,\pi s} \\ -\infty - i\varepsilon < s < +\infty - i\varepsilon \end{gathered} \tag{17}$$

где $\Psi(s)$ – преобразование Фурье функции $\psi(\xi)$.

Требуется найти функцию $\Psi(z)$, голоморфную в полосе $-1-\varepsilon < \mathrm{Im}\,z < -\varepsilon$, непрерывную на границе полосы и удовлетворяющую условию (17).

Представим функцию $s\,\mathrm{cth}\,\pi s$ в таком виде:

$$G(s) \equiv s\,\mathrm{cth}\,\pi s = is\,\mathrm{cth}\,\pi s\,\mathrm{th}\frac{\pi}{2}s\frac{\mathrm{sh}\,\pi(s-i)/2}{\mathrm{sh}\,\pi s/2} \equiv isG_0(s)\frac{\mathrm{sh}\,\pi(s-i)/2}{\mathrm{sh}\,\pi s/2}$$

В виду того, что $\mathrm{Ind}\,G_0(s) = \mathrm{Ind}(\mathrm{cth}\,\pi s\,\mathrm{tg}\,\pi s/2) = 0$ функция $G_0(s)$ может быть представлена в виде [16]:

$$G(s) = \frac{\chi_0(s-i)}{\chi_0(s)}, \quad \chi_0(z) = \exp\left\{\frac{1}{2i}\int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon}\ln[G_0(s)]\,\mathrm{cth}\,\pi(s-z)ds\right\}$$

Тогда решение поставленной задачи будет

$$\Psi(z) = \frac{\chi(z)}{2z}\int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon}\frac{F(s)(1+is)ds}{\chi(s)\operatorname{sh}\pi(s-z)}, \quad -1-\varepsilon<\operatorname{Im}z<-\varepsilon$$

$$\chi(z) = \chi_0(z)\operatorname{sh}\pi z/2\chi_1(z), \quad \chi_1(z) = \exp(iz\ln\lambda)\Gamma(1+iz) \tag{18}$$

$$F(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\tilde{M}_2\frac{z}{\operatorname{sh}\pi z}+\tilde{M}_1 i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\operatorname{sh}\pi z}$$

С применением асимптотической оценки Стирлинга для Гамма функции, функция $\chi(z)$ в указанной полосе допускает оценки: $A_1|t|^{1/2} < |\chi(t+i\tau)| < A_2|t|^{3/2}$, $-\infty - i\varepsilon < t < +\infty - i\varepsilon$, $-1-\varepsilon<\tau<-\varepsilon$.

Так как функция $F(z)$ экспоненциально исчезает на бесконечности, можно доказать, что и функция $\Psi(z)$, представленная формулой (18), обладает указанным свойством. Кроме того, в точке $z = -i$ она имеет полюс первого порядка.

Применяя эти свойства функции $\Psi(z)$, по формуле Коши получаем

$$\psi''(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon}s^2\Psi(s)e^{-is\xi}ds = ce^{-\xi}-\frac{e^{-(1+\varepsilon)\xi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon}(s-i-i\varepsilon)\Psi(s-i-i\varepsilon)e^{-is\xi}ds$$

где c – некоторая постоянная.

Так как $\lambda_0''(y) = (\psi''(\ln y) - \psi'(\ln y))/y^2$, то следовательно функция $\lambda_0''(y)$ при достаточно больших y допускает оценки: $\lambda_0''(y) = O(1/y^3)$, $y \to +\infty$, а для скачка обобщенной поперечной силы V_y имеем

$$\langle V_y\rangle \equiv \mu(x) = \lambda''(x) = O(1/x), \quad x\to 0 \tag{19}$$

Таким образом, в рассмотренном случае относительно функции $D_0(x)$, задача (1)–(5) решается в квадратурах, решение получается обратным преобразованием Фурье от функции $\Psi(z)$, представленной формулой (18), а асимптотическое поведение искомой функции $\mu(x)$ дается формулой (19).

Заметим, что в данном случае можно взять $h_0(0) = 0$, и соответственно из (14) следует $M_1 = 0$, а M_2 определяется из второй формулы (14) с учетом (7), (11), (18).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
3. *Морарь Г.А., Попов Г.Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 412–421.
4. *Нуллер Б.М.* Упругий клин, подкрепленный на конечном участке стержнем переменного сечения // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 5. С. 98–100.
5. *Шавлакадзе Н.Н.* Упругая изотропная полуплоскость, подкрепленная конечным стержнем переменного сечения // Сообщ. АН ГССР. 1988. Т. 130. № 3. С. 509–512.
6. *Онищук О.В., Попов Г.Я.* О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 141–150.
7. *Онищук О.В., Попов Г.Я., Фаршайт П.Г.* Об особенностях контактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 293–302.

8. *Shavlakadze N.* On some contact problems for bodies with elastic inclusions // Georg. Math. J. 1998. V. 5. No. 3. P. 285–300.
9. *Shavlakadze N.* A contact problem of the interaction of semi-finite inclusion with a plate // Georg. Math. J. 1999. V. 6. No. 5. P. 489–500.
10. *Shavlakadze N.* On singularities of contact stress upon tension and bending of plates with elastic inclusion // Proc. of A. Razmadze Math. Inst. 1999. V. 120. P. 135–147.
11. *Векуа И.Н.* Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 2. С. 143–150.
12. *Магнарадзе Л.Г.* Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолета // Сообщ. АН ГССР. 1942. Т. 3. № 6. С. 503–508.
13. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 364 с.
14. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
15. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
16. *Банцури Р.Д.* Об одной граничной задаче теории аналитических функций // Сообщ. АН Груз. ССР. 1974. Т. 73. № 3. С. 549–552.

Тбилиси

Поступила в редакцию
4.05.2001