

УДК 539.214; 539.374

© 2003 г. И.Ю. КАДАШЕВИЧ, Ю.И. КАДАШЕВИЧ

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СВЯЗЯМИ

Являясь результатом развития многоповерхностной статистической теории пластичности, предлагаемая теория с перекрестными связями представляет из себя достаточно простую феноменологическую теорию пластичности, которая описывает широкий спектр явлений сложного нагружения.

В 1968 году В.В. Новожилов и Ю.И. Кадашевич [1] предложили вариант статистической теории пластичности, учитывающей микронапряжения. Эта теория оказала влияние на развитие новых идей в теории пластичности и ползучести.

Так упругопластическое деформирование конструкционных материалов при переменной температуре на основе многоэлементных моделей изучено в [2]. Оригинальная структурная модель с линейно упрочняющимися подэлементами детально исследована в применении к сложному нагружению в [3]. Расширение теории течения продемонстрировано в [4, 5]. В [6] дано обобщение структурной модели материала при неизотермическом нагружении. Новый подход к учету третьего инварианта указан в [7, 8]. Отметим обзорную работу [9], в которой подробно излагается тенденция развития математических моделей неупругого поведения и устанавливается взаимосвязь взглядов, намеченных В.В. Новожиловым и его учениками, как с теорией упругопластических процессов в форме А.А. Ильюшина [10], так и эндохронными подходами в теории пластичности, связанными с идеями К. Валаниса [11]. Установлена также связь и с теориями типа скольжения [12]. Связь микро- и макросвойств в упругопластических средах детально изучена в фундаментальной обзорной работе А.А. Вакуленко [13].

В данной работе приводятся результаты исследования, посвященного изучению одного из вариантов указанной теории, названного авторами теорией с перекрестными связями. Первоначально он не был воспринят читателями, так как не имел четкой реологической интерпретации. Более того, когда в [14] была предложена соответствующая реологическая модель и приведены термодинамические ограничения на определяющие соотношения, то стало казаться, что они столь значительно сужают ее возможности, что дальнейшее развитие теории было приостановлено и фактически теория была забыта.

В публикуемой работе приведен анализ определяющих соотношений, показано, что теория удачно совмещает в себе математическую простоту с широким спектром описываемых явлений, изучены вопросы термодинамической корректности и единственности решения. Выявлены четкие правила функционирования определяющих соотношений. Благодаря уникальному механизму перекрестных связей, заключающемуся в автоматическом выборе активной поверхности течения и смене режимов нагружения, оказывается возможным в рамках феноменологической теории подойти к описанию тонких эффектов сложного деформирования материала.

1. Определяющие соотношения теории. Идея, лежащая в основе теории [1], крайне проста: формулируется локальный закон пластического течения, выбирается основной случайный параметр задачи (предел текучести материала), конкретизируется условие связи случайных и осредненных параметров задачи (условие типа Кренера) и задается на основе экспериментальных данных интегральная функция распределения пределов текучести материала.

Возьмем за основу один из вариантов теории [1], перестроенный в девиаторном пространстве деформаций. Запишем его в следующем виде:

$$\sigma = 2G(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (1.1)$$

$$\varepsilon^p = \sum_i \alpha_i \varepsilon^{p(i)}, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_i \alpha_i = 1 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon^{Y(k)} \frac{d\varepsilon^{p(k)}}{d\lambda_k} = \varepsilon^{A(k)} = \varepsilon - \sum_i C_{ki} \varepsilon^{p(i)} \quad (i, k = 1, \dots, N) \quad (1.3)$$

Здесь σ , ε , ε^p – девиаторы напряжений, деформаций и пластических деформаций модели; $\varepsilon^{p(k)}$ – девиатор, соответствующий деформации (k) элемента; $\varepsilon^{A(k)}$ – девиатор тензора активных деформаций; $\varepsilon^{Y(k)}$ – локальный (k) предел деформации текучести; λ_k – длина дуги локальной пластической деформации; $d\lambda_k = \sqrt{d\varepsilon^{p(k)} \dots d\varepsilon^{p(k)}}$; G – модуль сдвига; C_{ki} – параметры материала; α_i – весовые статистические коэффициенты.

Основные принципы функционирования определяющих уравнений теории сформируем на примере двухповерхностного варианта теории ($i, k = 1, 2$):

1. Деформация $\varepsilon^{p(1)}$ вызывается движением первой поверхности текучести, если точка нагружения находится на границе первой поверхности текучести. Деформация $\varepsilon^{p(2)}$ вызывается движением второй поверхности текучести, если точка нагружения находится на ее границе. Соответствующие пластические деформации называются активными.

2. Если точка нагружения находится внутри поверхности текучести, то соответствующая пластическая деформация не развивается, такую пластическую деформацию будем называть пассивной, она будет постоянна.

3. Точка нагружения всегда находится внутри или на границе соответствующей поверхности текучести.

4. Возможно латентное (скрытое) движение одной поверхности за счет развития другой пластической деформации, при этом пластическая деформация отвечающая этой поверхности текучести не развивается.

5. Возможные типы поведения модели при деформировании в пластической зоне:

(а) ($d\varepsilon^{p(1)} \neq 0$ или $d\varepsilon^{p(2)} \neq 0$) – развивается одна из двух пластических деформаций;

(б) ($d\varepsilon^{p(1)} \neq 0$ и $d\varepsilon^{p(2)} \neq 0$) – развиваются совместно обе пластические деформации.

6. Активное движение одной поверхности текучести (с развитием соответствующей пластической деформации) не должно приводить к выходу за вторую поверхность текучести точки нагружения. Для численного решения это означает, что соответствующий вариант решения исключается из рассмотрения.

7. Принимая во внимание второе начало термодинамики в форме диссипативного неравенства, из рассмотрения исключаются варианты, не удовлетворяющие условию: $\varepsilon^{A(i)} \dots d\varepsilon^{p(i)} \geq 0$. При численном моделировании это требование постоянно проверяется и обеспечивает термодинамическую корректность получаемого решения. Пла-

стическая деформация, таким образом, всегда должна развиваться в направлении противоположном действию сил сухого трения, характеризующихся тензором $\epsilon^{A(k)}$.

8. Если возможны несколько решений, не противоречащих указанным выше принципам, то реализуется решение, соответствующее принципу минимума потенциальной энергии системы.

9. Если при активном нагружении окажется, что на определенном этапе нельзя удовлетворить всем перечисленным принципам, то это будет означать, что дальнейшее нагружение невозможно: определяющая система уравнений становится неразрешимой (сингулярное состояние).

Учитывая перечисленные выше законы функционирования модели, определяющие соотношения теории можно переписать в виде системы неравенств:

$$\begin{aligned} \|d\epsilon^{P(i)}\| (\epsilon^{Y(i)} - \|\epsilon^{A(i)}\|) &= 0 \\ \|d\epsilon^{P(i)}\| + (\epsilon^{Y(i)} - \|\epsilon^{A(i)}\|) &> 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где норма определяется по правилу: $\|\epsilon\| = \sqrt{\epsilon \cdot \epsilon}$.

Второе начало термодинамики в форме диссипативного неравенства должно быть добавлено в определяющие соотношения

$$\epsilon^{A(i)} \dots d\epsilon^{P(i)} \geq 0 \quad (1.5)$$

Соотношения (1.1)–(1.5) – определяют множество допустимых решений \mathbf{M} , соответствующих напряженно-деформированному состоянию материала. Любое решение задачи должно принадлежать этому множеству. Пусть k, s – решения ($k, s \in \mathbf{M}$), тогда реализуется решение k , удовлетворяющее принципу:

$$k = \text{Arg} \left\{ \min \left(\int_0^{\epsilon^*} \sigma(s) \cdot d\epsilon^P(s), s \in \mathbf{M} \right) \right\} \quad (1.6)$$

где ϵ^* определяет конкретное деформированное состояние.

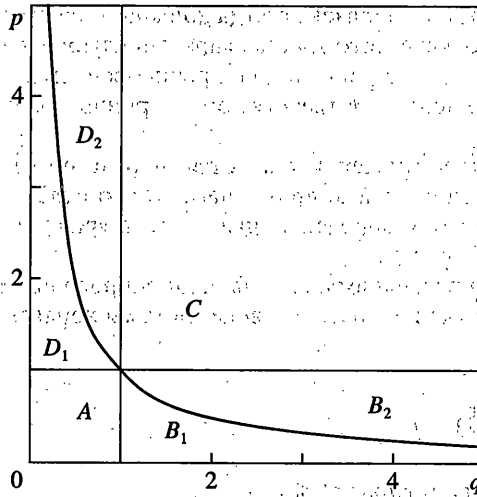
Таким образом, указанная выше теория в компактной форме записи может быть представлена в виде соотношений (1.1)–(1.6), полностью обеспечивая единственность решения:

2. Анализ поведения модели в одномерном случае. Рассмотрим двухэлементный вариант теории при одномерном нагружении. Определяющие соотношения имеют наиболее простой вид:

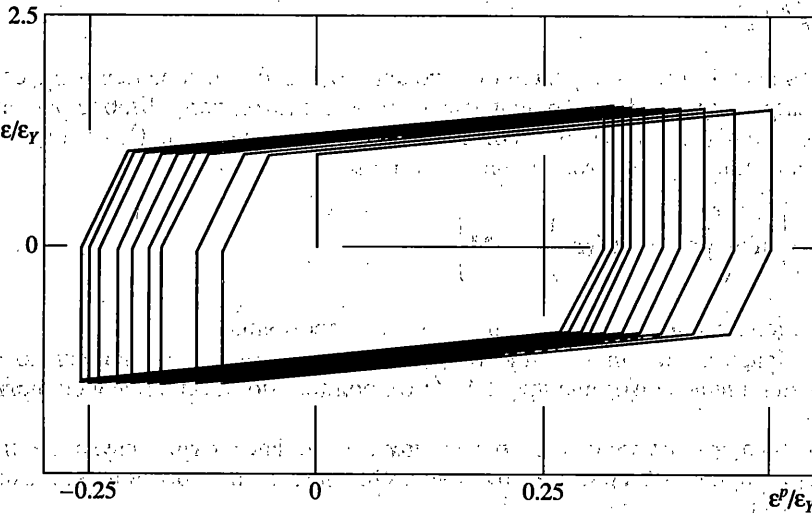
$$\begin{aligned} \epsilon^{A(1)} &= \epsilon - C_{11}\epsilon^{P(1)} - C_{12}\epsilon^{P(2)} \\ \epsilon^{A(2)} &= \epsilon - C_{21}\epsilon^{P(1)} - C_{22}\epsilon^{P(2)} \\ \|\epsilon^{A(1)}\| &\leq \epsilon^{Y(1)}, \quad \|\epsilon^{A(2)}\| \leq \epsilon^{Y(2)} \\ \epsilon^{Y(1)} &= \epsilon^{Y(2)} = \epsilon^Y, \quad \epsilon^P = (\epsilon_1^P + \epsilon_2^P)/2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введем новые параметры p и q по формулам $p = C_{21}/C_{11}$, $q = C_{12}/C_{22}$. Тогда можно продемонстрировать, что вся область параметров на фиг. 1 делится на 6 областей в соответствии с реакцией материала на циклическое симметричное жесткое нагружение.

В зависимости от выбора зоны (набора значений параметров материала) для каждой из них характерно определенное поведение материала: соответствующее перемещение петли гистерезиса; быстрота выхода на стационарный режим или же установление ре-

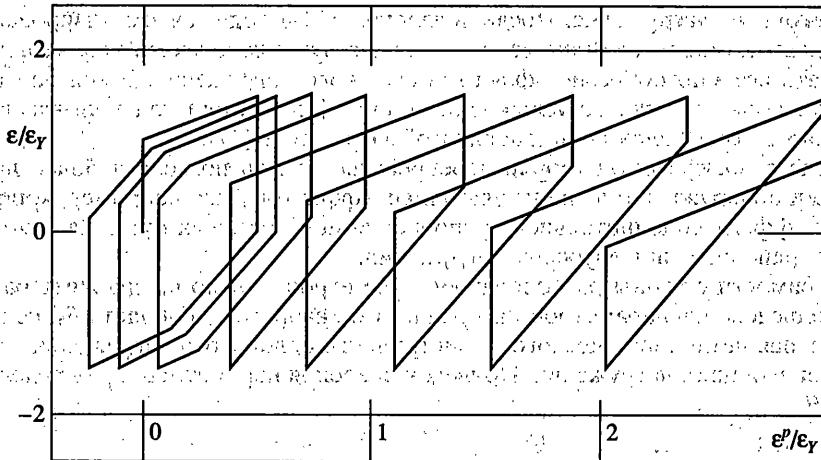


Фиг. 1

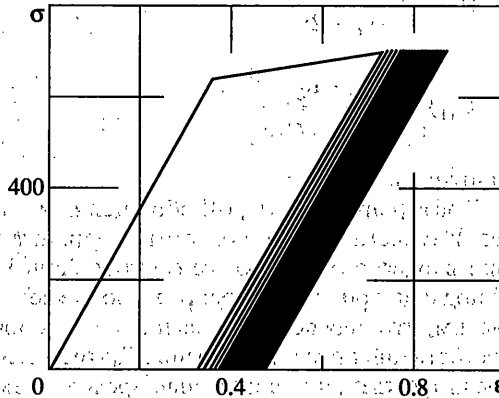


Фиг. 2

жима нестационарного пластического течения (сингулярные зоны). Зоны A , B_1 , D_1 – соответствуют циклически устойчивым материалам; C , B_2 , D_2 – циклически неустойчивым материалам (разупрочняющиеся материалы). На фиг. 2, 3 приведены типичные теоретические результаты при одноосном циклическом нагружении циклически устойчивого и неустойчивого материала. Результаты показывают, что теория способна описывать весьма контрастные эффекты сложного нагружения, известные из экспериментальных работ. На фиг. 4 приведены результаты расчета по предлагаемой теории для отнулевого циклического нагружения (напряжения в МПа, деформация в %). В отличие от классической теории течения четко прослеживается смещение петли гистерезиса, что полностью отвечает современным экспериментальным данным.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 2 приведены данные изучения зоны B_1 , для которой

$$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 4.5 \\ 1.0 & 9.5 \end{pmatrix} \cdot \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon^Y} = 1.5$$

Фиг. 3 иллюстрирует результаты исследования области B_2 , где

$$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.85 \\ 1.0 & 1.5 \end{pmatrix} \cdot \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon^Y} = 1.5$$

На фиг. 4 представлены данные, полученные при изучении зоны D_1 . Здесь

$$C = \begin{pmatrix} 0.551 & 0.7 \\ 1.08 & 3.0 \end{pmatrix}$$

3. Многоосное нагружение. После появления в 70-х годах автоматизированных испытательных комплексов стало ясно, что существующие классические теории не могут описать все многообразие эффектов сложного нагружения. Были предприняты различные попытки резкого усложнения теории [15, 16] или попытки ввести специальные параметры “непропорционального” нагружения [17].

Наличие в обсуждаемой теории перекрестных связей позволяет более простыми средствами обнаружить многие из указанных эффектов. Так, например, хорошо описывается эффект дополнительного упрочнения при круговых путях нагружения или эффект “храповика” при двусосном нагружении.

В зависимости от зоны расположения параметров, можно предложить различные методы определения параметров материала. Так, например, в области B_1 используется предельная петля циклического симметричного одноосного нагружения, а в области B_2 – первый цикл нагружения. Приведем значения параметров C_{ij} , определяемые в области B_2 :

$$C_{11} = \frac{1}{2(1-k_1)}, \quad C_{22} = \frac{1}{2(1-k_2)}$$

$$C_{12} = C_{11} + 2(C_{22} - C_{11}) \frac{\varepsilon_B - \varepsilon^Y - 2C_{22}\varepsilon_B^p}{\varepsilon_B - \varepsilon_C - 2\varepsilon^Y}$$

$$C_{21} = -C_{22} + 2(C_{22} - C_{11}) \frac{2\varepsilon_B^p C_{11} - \varepsilon_C - \varepsilon^Y}{\varepsilon_B + \varepsilon_C - 4C_{22}\varepsilon_B^p}$$

где k_i – угловые коэффициенты.

Замечание. В 1953 г. Койтер предложил [18] обобщенный ассоциированный закон пластического течения. Изучаемый в данной статье вариант теории Новожилова–Кадашевича несомненно входит в общий класс соотношений Койтера и может считаться конкретизацией подхода при учете перекрестных связей.

4. Заключение. Отметим, что перспективы расширения теории пластичности с перекрестными связями естественны и многообразны. Кроме увеличения числа элементов теории, логично предположить, что локальные пределы текучести не постоянны, а изменяются в зависимости от длины дуги траектории неупругого деформирования. Более того, представляется возможным описание эффектов типа памяти формы и суперупругости в рамках предлагаемой теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Об учете микронапряжений в теории пластичности // Инж. ж. МТТ. 1968. № 3. С. 82–91.
2. Зарубин В.С., Кузьмин М.А. Упруго-пластическое деформирование конструкционного материала при переменной температуре // Изв. вузов. Машиностроение. 1969. № 12. С. 57–60.
3. Шевченко Ю.Н., Марина В.Ю. Структурная модель среды при неизотермическом процессе нагружения // Приклад. механика. 1976. Т. 12. № 12. С. 18–27.
4. Супрун А.Н. О базовом эксперименте реономной пластичности // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1987. С. 74–84.
5. Коротких Ю.Г. О базовом эксперименте для модели термовязкопластичности // Проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1977. Вып. 6. С. 3–20.
6. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при вторичных нагружениях. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
7. Бондарь В.С., Фролов А.Н. Математическое моделирование процессов неупругого поведения и накопления повреждений материала при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 99–107.

8. *Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П.* Учет фазы подобия девиаторов в теории ползучести // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 129–133.
9. *Васин Р.А.* Определяющие соотношения теории пластичности // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1990, Т. 21. С. 3–75.
10. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
11. *Valanis K.C.* A theory of plasticity without a yield surface // Arch. Mech. 1971. V. 23. № 4. P. 517–533.
12. *Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И., Черняков Ю.А.* Теория пластичности, учитывающая микродеформации // Докл. АН. СССР. 1985. Т. 284. № 4. С. 821–823.
13. *Вакуленко А.А.* Связь микро и макросвойств в упругопластических средах // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 22. С. 3–54.
14. *Пальмов В.А.* Об одном варианте теории пластического течения // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 6. С. 179–182.
15. *Коротких Ю.Г., Маковкин Г.А.* О моделировании процессов непропорционального упругопластического деформирования на базе уравнений пластичности с комбинированным упрочнением // Прикладные проблемы прочности и пластичности. М.: Товарищ. научных изданий КМК, 1997. С. 5–10.
16. *Xia Z., Ellyin F.* A constitutive model with capability to simulate complex multiaxial ratcheting behavior of materials. // Intern. J. Plasticity. 1997. V. 13. № 1/2. P. 127–142.
17. *McDowell D.L.* Description of nonproportional cyclic ratchetting behavior // Eur. J. Mech. A. 1994. V. 13. № 5. P. 593–604.
18. *Koiter W.T.* Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface // Quart. Appl. Math. 1953. V. 11. P. 350–354.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
3.05.2000